ANÁLISE MATEMÁTICA II

(LEEC, LEB, LEQ, LQ)

Resolução da 11ª Ficha de problemas-teste

I.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3(6-x-y) - x^2y^3 = xy^3(12-3x-2y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2y^2(6-x-y) - x^2y^3 = x^2y^2(18-3x-4y)$$

Resolvendo o sistema que resulta das condições de ponto de estacionaridade $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, vem:

$$\begin{cases} xy^3(12-3x-2y) = 0 \\ x^2y^2(18-3x-4y) = 0 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow (x = 0 \vee y = 0 \vee 12 - 3x - 2y = 0) \wedge (x = 0 \vee y = 0 \vee 18 - 3x - 4y = 0)$.

Logo, os pontos de estacionaridade são os do tipo $(0, y)$, para qualquer $y \in \mathbb{R}$, do tipo $(x, 0)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, e o(s) que verificar(em) o sistema de equações

$$\begin{cases} 12-3x-2y = 0 \\ 18-3x-4y = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 6-2y = 0 \\ 6-3x = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3\,. \end{cases}$$

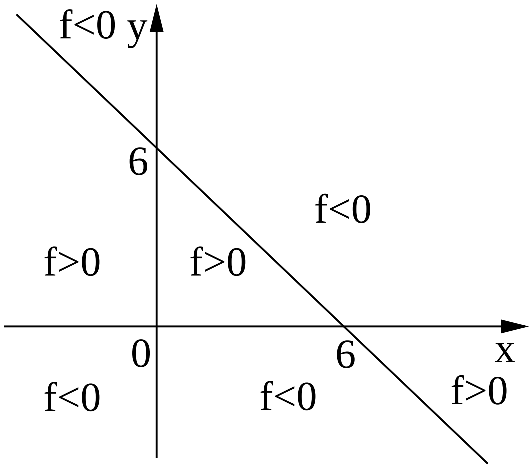
Assim, os pontos de estacionaridade são os pontos do eixo Ox, do eixo Oy e o ponto $(2, 3)$. Como,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= y^3(12-3x-2y) - 3xy^3\,, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) &= 3xy^2(12-3x-2y) - 2xy^3\,, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 2x^2y(18-3x-4y) - 4x^2y^2\,, \end{aligned}$$

resulta, para a matriz hessiana no ponto $(x, y) = (3, 2)$:

$$H_{(3,2)}(f) = \begin{bmatrix} -162 & -108 \\ -108 & -144 \end{bmatrix}.$$

Como $\det H_{(2,3)}(f) = 162 \times 144 - 108^2 > 0$, e $-162 < 0$, resulta que a forma quadrática associada é definida negativa e, portanto, f tem um máximo relativo em $(2, 3)$ cujo valor é $f(2, 3) = 108$. Nos pontos dos eixos coordenados é fácil vêr que a matriz hessiana de f tem determinante nulo. No entanto, a natureza daqueles pontos de estacionaridade são facilmente determinadas pelos factos de que, nesses pontos $f(x, y) = 0$, e de que o sinal de f é facilmente determinado para cada ponto não pertencente aos eixos. Este estudo deverá ser feito com recurso a um esboço que mostre em que pontos (x, y), f é negativo ou positivo. Concluimos que todos os pontos do tipo $(x, 0)$ são pontos de sela, que os pontos $(0, y)$ com $y < 0$, e $y > 6$ são pontos de máximos relativos, que os pontos $(0, y)$ com $0 < y < 6$ são de mínimos relativos e que o ponto $(0, 6)$ é um ponto de sela.



Estudo do sinal de f

Não existe nem máximo nem mínimo absolutos como se pode ver estudando os valores da função f sobre, por exemplo, a recta $y = -x$:

$$f(x, -x) = -6x^3.$$

Fazendo $x \to -\infty$ obtem-se $f(x, -x) \to +\infty$, e fazendo $x \to +\infty$ obtem-se $f(x, -x) \to -\infty$, donde se conclui que a função f não é minorada nem majorada.

II.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \cos x \, \cosh y$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \sin x \, \sinh y$$

Logo, $\nabla g(x, y) = (0, 0)$ é equivalente a

$$\begin{cases} \cos x \, \cosh y = 0 \\ \sin x \, \sinh y = 0 \end{cases}$$

Resolvendo a primeira equação, e uma vez que $\cosh y$ não tem zeros, conclui-se que $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Substituindo na segunda equação, obtem-se $1 \,.\, \sinh y = 0$ e, uma vez que o único zero de $\sinh y$ é $y = 0$, conclui-se que os pontos de estacionaridade são os pontos $(\frac{\pi}{2} + k\pi \,,\, 0)$, com $k \in \mathbb{Z}$.

Como

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) &= -\sin x \, \cosh y \,, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x, y) &= \cos x \, \sinh y \,, \\ \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y) &= \sin x \, \cosh y \,, \end{aligned}$$

segue-se que, se k é par,

$$H_{(\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\,0)}(g) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

enquanto que, se k é ímpar,

$$H_{(\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\,0)}(g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Em ambos os casos $\det H_{(\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\,0)}(g) < 0$, e as formas quadráticas correspondentes são indefinidas. Logo, todos os pontos de estacionaridade $(\frac{\pi}{2}+k\pi\,,\;0)$ são pontos de sela de g.

Todos os pontos de estacionaridade de g são pontos de sela. Logo, g não tem extremos relativos em $\mathbb{R}^2$. Concluimos que g não tem extremos absolutos, uma vez que se os tivesse, estes também seriam extremos relativos.

III.

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 6x^2+y^2+10x$$
$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 2xy+2y\,.$$

Logo, os pontos de estacionaridade são dados pelo sistema,

$$\begin{cases} 6x^2+y^2+10x=0 \\ y(x+1)=0 \end{cases}.$$

As soluções da segunda equação são $x=-1$ e $y=0$. Sunstituindo $x=-1$ na primeira equação resulta, $-4+y^2=0$, dando os pontos $(-1,-2)$ e $(-1,2)$. Substituindo $y=0$ na primeira equação resulta $x(6x+10)=0$, resultando $x=0$ ou $x=-\frac{5}{3}$, correspondendo aos pontos de estacionaridade $(0,0)$ e $(-\frac{5}{3},0)$. Dado que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,y) &= 12x+10\,, \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y\partial x}(x,y) &= 2y\,, \\ \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(x,y) &= 2x+2\,, \end{aligned}$$

resulta,

$$H_{(0,0)}(h) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad H_{(-\frac{5}{3},0)}(h) = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 0 & -\frac{20}{3} \end{bmatrix},$$

$$H_{(-1,-2)}(h) = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad H_{(-1,2)}(h) = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $\det H_{(0,0)}(h) > 0$, $10 > 0$ resulta que $(0,0)$ é um ponto de mínimo. Como $\det H_{(0,0)}(h) > 0$, $-10 < 0$, conclui-se que h tem um máximo em $(-\frac{5}{3},0)$.

Como os determinantes da matriz hessiana em $(-1,-2)$ e $(-1,2)$ são negativos conclui-se que estes pontos são pontos de sela de h.

Considerando, por exemplo, o eixo Ox, obtem-se

$$h(x,0) = x^2(2x+5)$$

e, portanto $h(x,0) \to -\infty$, quando $x \to -\infty$ enquanto que, $h(x,0) \to +\infty$, quando $x \to +\infty$. Logo, h não é minorada nem majorada, não tendo, por isso, extremos absolutos.