ANÁLISE MATEMÁTICA II

(LEEC, LEB, LEQ, LQ)

Resolução da 10ª Ficha de problemas-teste

I.

Como

$$M_{(x,y)}(g) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} -2x\sin(x^2+y^2) & -2y\sin(x^2+y^2) \end{array} \right]$$

e

$$M_t(F) = \left[\frac{dF}{dt}(t) \right] = \left[-2te^{1-t^2} \right],$$

pela regra da derivação da função composta :

$$M_{(x,y)}(F \circ g) = M_{g(x,y)}(F) M_{(x,y)}(g) =$$

$$4e^{\sin^2(x^2+y^2)} \sin(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2) \left[\begin{array}{cc} x & y \end{array} \right]$$

Para o cálculo directo da matriz jacobiana começemos por determinar explicitamente $F \circ g$:

$$(F \circ g)(x,y) = e^{\sin^2(x^2+y^2)}.$$

Logo,

$$\frac{\partial (F \circ g)}{\partial x} = e^{\sin^2(x^2+y^2)} \frac{\partial}{\partial x}(\sin^2(x^2+y^2)) = e^{\sin^2(x^2+y^2)} 4x \sin(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2),$$

$$\frac{\partial (F \circ g)}{\partial y} = e^{\sin^2(x^2+y^2)} \frac{\partial}{\partial y}(\sin^2(x^2+y^2)) = e^{\sin^2(x^2+y^2)} 4y \sin(x^2+y^2)\cos(x^2+y^2),$$

e como

$$M_{(x,y)}(F \circ g) = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial (F \circ g)}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial (F \circ g)}{\partial y}(x,y) \end{array} \right]$$

o resultado que se obtem por esta via é o mesmo que o anterior.

II. Como $f(0,0) = (1,2,0)$, tem-se $(g \circ f)'(0,0) = g'(1,2,0) \circ f'(0,0)$. Como a matriz da composição de duas aplicações lineares relativamente a uma base é o produto das respectivas matrizes tem-se:

$$M_{(0,0)}(g \circ f) = M_{(1,2,0)}(g) M_{(0,0)}(f).$$

Calculando directamente,

$$M_{(1,2,0)}(g) = \left[\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right]$$

Por outro lado,

$$f'(0,0)(x,y) = (L_1(x,y), L_2(x,y), L_3(x,y)) = (2x - y,\, x + y,\, x - 3y)$$

o que mostra que

$$M_{(0,0)}(f) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$M_{(0,0)}(g \circ f) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}.$$

III.

Como

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{2x}{1 + (x^2 - y)^2}, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{-1}{1 + (x^2 - y)^2}, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x} = 2x, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0,$$

tem-se

$$M_{(1,1)}(f) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por outro lado, $f(1,1) = (0,1)$, e levando em conta que, $\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,1) = 2x$, $\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,1) = 0$, $\frac{\partial g_3}{\partial x}(x,1) = 1$, $\frac{\partial g_1}{\partial y}(0,y) = 0$, $\frac{\partial g_2}{\partial x}(0,y) = 1$, $\frac{\partial g_3}{\partial x}(0,y) = 0$, resulta

$$M_{(0,1)}(g) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$M_{(1,1)}(g \circ f) = M_{(0,1)}(g) M_{(1,1)}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$