

ANÁLISE MATEMÁTICA II

(LEEC, LEB, LEQ, LQ)

Resolução da 1ª Ficha de problemas-teste

I.

$$\int \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \int (2x)' \cos(2x) dx = \frac{1}{2} \sin(2x).$$

$$\int \sin x \sqrt{1 - \cos x} dx = \int (1 - \cos x)' (1 - \cos x)^{1/2} dx = \frac{2}{3} (1 - \cos x)^{3/2}.$$

$$\int \frac{(\log |x|)^2}{x} dx = \int (\log |x|)' (\log |x|)^2 dx = \frac{1}{3} (\log |x|)^3$$

Para o quarto integral consideramos a fórmula de primitivação por partes $\int f g' = f g - \int f' g$, escolhendo $f(x) = x^2$ e $g'(x) = x e^{x^2}$, correspondendo a $f'(x) = 2x$ e $g(x) = \frac{1}{2} e^{x^2}$:

$$\begin{aligned} \int x^3 e^{x^2} dx &= x^2 \cdot \frac{e^{x^2}}{2} - \int 2x \cdot \frac{e^{x^2}}{2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} = \frac{e^{x^2}}{2} (x^2 - 1). \end{aligned}$$

II.

$$\int e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} \int (-2x)' e^{-2x} dx = -\frac{1}{2} e^{-2x}.$$

$$\int \frac{(\arctan x)^4}{1+x^2} dx = \int (\arctan x)' (\arctan x)^4 dx = \frac{1}{5} (\arctan x)^5.$$

$$\int (1 + \tan^2 x) \tan x dx = \int (\tan x)' \tan x dx = \frac{1}{2} (\tan x)^2.$$

Usamos a fórmula de integração por partes, desta vez fazendo $f(x) = \log |x|$ e $g'(x) = x^2$, correspondendo a $f'(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{x^3}{3}$:

$$\int x^2 \log |x| dx = \frac{x^3}{3} \log |x| - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \left(\log |x| - \frac{1}{3} \right).$$

III.

$$\int \sqrt[3]{2x^2} dx = \sqrt[3]{2} \int x^{2/3} dx = \frac{3\sqrt[3]{2}}{5} x^{5/3} = \frac{3}{5} \sqrt[3]{2x^5}.$$
$$\int \frac{\sqrt{1+\log x}}{x} dx = \int (1+\log x)' \sqrt{1+\log x} dx = \frac{2}{3} (1+\log x)^{3/2}.$$
$$\int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^x}} dx = - \int (1-e^x)' (1-e^x)^{-1/2} dx = -2\sqrt{1-e^x}.$$

Usamos de novo a fórmula de primitivação por partes com $f(x) = \arcsin x$ e $g'(x) = 1$ correspondendo a $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e $g(x) = x$:

$$\begin{aligned} \int \arcsin x dx &= x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= x \arcsin x + \frac{1}{2} \int (1-x^2)' (1-x^2)^{-1/2} dx \\ &= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}. \end{aligned}$$