ANÁLISE MATEMÁTICA II

(LEEC, LEB, LEQ, LQ)

Resolução da ficha suplementar sobre fórmulas/séries de taylor

1.a) Primeiro, relacionamos com uma das séries acima referidas:

$$\frac{1}{a+bx} = \frac{1}{a}\frac{1}{1+\frac{bx}{a}} = \frac{1}{a}\frac{1}{1-y}, \qquad \text{com} \qquad y = -\frac{bx}{a}.$$

Então:

$$\frac{1}{a+bx} = \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty} y^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k b^k}{a^{k+1}}\, x^k.$$

Intervalo de validade I:

$$|y| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \left|-\frac{bx}{a}\right| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |x| < \frac{|a|}{|b|}\,.$$

Logo, $I = \left]-\frac{|a|}{|b|}, \frac{|a|}{|b|}\right[$.

b) Como

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-y} \qquad \text{com} \qquad y = -x^2,$$

temos

$$(\arctan x)' = \sum_{k=0}^{\infty} y^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}\,.$$

Como sabemos que, no interior do intervalo de convergência de uma série de potências, podemos "fazer a derivação termo a termo", deduz-se que

$$\arctan x = C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, x^{2k+1}\,.$$

A constante C é ajustada atendendo a que, substituindo $x = 0$ em ambos os membros da igualdade anterior, obtem-se $0 = C + 0$ e, logo, $C = 0$, donde

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\, x^{2k+1}\,.$$

Maior intervalo aberto de validade:

$$|y| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |-x^2| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |x| < 1\,.$$

Logo $I =]-1, 1[$.

c) O processo é o mesmo da alínea anterior. Como

$$(\log(1+x))' = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-y} \qquad \text{com} \qquad y = -x,$$

temos

$$(\log(1+x))' = \sum_{k=0}^{\infty} y^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k.$$

Logo,

$$\log(1+x) = C + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1}.$$

Substituindo $x = 0$, obtem-se $0 = C + 0$, logo $C = 0$ e, portanto,

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k.$$

Maior intervalo aberto de validade:

$$|y| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |-x| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |x| < 1.$$

Logo, $I =]-1, 1[$.

d) Neste caso,

$$\frac{1}{1-2x+x^2} = \frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} x^k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} k x^{k-1}.$$

(Atenção à derivada do termo correspondente a $k = 0$!)

Este desenvolvimento é válido para todo o $x \in]-1, 1[$.

e) Tendo calculado o desenvolvimento em série de $\arctan x$ como em b)

$$\frac{\arctan(x^{100})}{x} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} (x^{100})^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{200k+99}.$$

O intervalo aberto de validade é o mesma de $\arctan x$, ou seja, $I =]-1, 1[$.

f) $2x(1+x^{100}) = 2x + 2x^{101} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, onde $c_1 = c_{101} = 2$ e, para todos os outros valores de k, $c_k = 0$. Ou seja, neste caso, (caso de qualquer função polinomial), a série reduz-se a uma soma finita, ou seja, ao próprio polinómio, evidentemente válida em $\mathbb{R}$.

g) Solução usando c):

$$1+x+x^2\log(1+x) = 1+x+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^{k+2} = 1+x+x^3-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{3}-\dots$$

O maior intervalo aberto em que este desenvolvimento é válido é o mesmo que o de $\log(1+x)$ ou seja, $]-1, 1[$.

h) Como anteriormente,

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-y}\,, \qquad \text{com } y = -x^2.$$

Logo,

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} y^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}\,,$$

e, portanto,

$$\frac{1+x}{1+x^2} = \frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k+1}$$
$$= 1 + x - x^2 - x^3 + x^4 + x^5 - \dots$$

válida para $|y| < 1$, ou seja para $|x| < 1$. Logo o intervalo aberto de validade é $]-1, 1[$.

i) Como

$$\log(2+18x^2) = \log(2(1+9x^2)) = \log 2 + \log(1+9x^2) = \log 2 + \log(1+y),$$

com $y = 9x^2$. Calculando a série para $\log(1+y)$ como em c),

$$\log(2+18x^2) = \log 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} y^k = \log 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} 9^k}{k} x^{2k}.$$

Maior intervalo aberto de validade: atendendo a c),

$$|y| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |9x^2| < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |x| < \frac{1}{3},$$

logo é $I = \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$.

j) Fazendo $y = x^2$,

$$e^{x^2} = e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!},$$

vem

$$\frac{1-e^{x^2}}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left(1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-2}}{k!}\,,$$

válida para todo $x \in \mathbb{R}$.

k) $e^{2+x^2} = e^2 e^{x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^2 x^{2k}}{k!}$, válida para todo $x \in \mathbb{R}$.

l) $(x+x^2)e^{2+x^2} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^2 x^{2k+1}}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^2 x^{2k+2}}{k!} = e^2 x + e^2 x^2 + \frac{e^2 x^3}{2!} + \frac{e^2 x^4}{2!} + \dots,$
válida para todo $x \in \mathbb{R}$.

m) $3^x = e^{x \log 3} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\log 3)^k x^k}{k!}$, válida para todo $x \in \mathbb{R}$.

2.) As respostas são baseadas nos desenvolvimentos em série obtidos em 1 e na expressão $f^{(k)}(0) = k!c_k$ (ver introdução). Em cada caso I representa o maior intervalo aberto de validade do desenvolvimento em série.

a) $\forall_{x\in I}, f(x) = \frac{1}{a+bx} = \frac{1}{a} - \frac{bx}{a^2} + \dots$. Logo, $f'(0) = -\frac{b}{a^2} \neq 0$. Logo, 0 não é ponto de estacionaridade de f.

b) $\forall_{x\in I}, f(x) = \arctan x = x + \dots$. Logo, $f'(0) = 1$ e 0 não é ponto de estacionaridade de f.

c) $\forall_{x\in I}, f(x) = \log(1+x) = x + \dots$. Logo, $f'(0) = 1$ e 0 não é ponto de estacionaridade de f.

d) $\forall_{x\in I}, f(x) = \frac{1}{1-2x+x^2} = 1 + 2x + \dots$. Logo, $f'(0) = 2$ e 0 não é ponto de estacionaridade de f.

e) $\forall_{x\in I}, f(x) = \frac{\arctan(x^{100})}{x} = x^{99} + \dots$. Logo, $f^{(k)}(0) = 0$, para $k = 1, 2, \dots, 98$ e $f^{(99)}(0) = 99!$. Sendo assim, 0 é ponto de estacionaridade e como a derivada de menor ordem que não se anula é de ordem ímpar, concluimos que 0 não é ponto de extremo de f.

f) $f'(0) = 2$. Logo 0 não é ponto de estacionaridade.

g) $\forall_{x\in I}, f(x) = 1 + x + x^2\log(1+x) = 1 + x + \dots$ e, logo, $f'(0) = 1$, e 0 não é ponto de estacionaridade de f.

h) $\forall_{x\in I}, f(x) = \frac{1+x}{1+x^2} = 1 + x - \dots$. Logo $f'(0) = 1$ e 0 não é ponto de estacionaridade de f.

i) $\forall_{x\in I}, f(x) = \log(2 + 18x^2) = \log 2 + 9x^2 - \dots$. Logo $f'(0) = 0$ e $f''(0) = (2!)\cdot 9 = 18$. Logo 0 é um ponto de estacionaridade de f e como a derivada de menor ordem que não se anula é a segunda, logo de ordem par, conclui-se que 0 é ponto de extremo de f. Além disso, sendo $f''(0) > 0$, conclui-se que $f(0) = \log 2$ é um mínimo local.

j) $\forall_{x\in\mathbb{R}}, f(x) = \frac{1-e^{x^2}}{x^2} = -1 - \frac{x^2}{2!} - \dots$. Logo, $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 2!\cdot(-\frac{1}{2!}) = -1$. Pelas razões da alínea anterior 0 é ponto de extremo de f. Mas como $f''(0) < 0$, concluimos que $f(0) = -1$ é um máximo local de f.

k) $\forall_{x\in\mathbb{R}}, f(x) = e^2 e^{x^2} = e^2 + e^2x^2 + \dots$. Logo, $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 2!e^2 = 2e^2 > 0$. Tal como em i) deduz-se que f tem um mínimo relativo em 0 dado por $f(0) = e^2$.

l) $\forall_{x\in\diagdown}, f(x) = (x + x^2)e^{2+x^2} = e^2x + \dots$. Logo $f'(0) = e^2$ e 0 não é ponto de estacionaridade de f.

m) $\forall_{x\in\mathbb{R}}, f(x) = 3^x = 1 + (\log 3)x + \dots$. Logo, $f'(0) = \log 3$ e 0 não é ponto de estacionaridade de f.

3.a) Seja $f(x) = x^4$. Como $f(1) = 1$, $f'(1) = 4$, $f''(1) = 12$, $f'''(1) = 24$, $f^{(4)}(1) = 24$ e $f^{(k)}(1) = 0$, para $k > 4$, obtemos

$$\begin{aligned} x^4 &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 \\ &= 1 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4, \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Sendo f uma função polinomial, a série fica reduzida a um número finito de termos.

b) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2+(x-2)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\frac{x-2}{2}} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-y}$, com $y = -\frac{x-2}{2}$. Logo,

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} y^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}(x-2)^k\,.$$

Intervalo de validade:

$$|y| < 1 \iff \left|-\frac{x-2}{2}\right| < 1 \iff |x-2| < 2 \iff x \in \,]0,4[\,.$$

c) $e^x = e^{(x-a)+a} = e^a e^{x-a} = e^a \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-a)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^a(x-a)^k}{k!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) $\log x = \log((x-a)+a) = \log a\left(\dfrac{x-a}{a}+1\right) = \log a + \log(1+y)$
com $y = \frac{x-a}{a}$. Logo, procedendo como em 1.c),

$$\log x = \log a + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} y^k = \log a + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{ka^k}(x-a)^k,$$

Maior intervalo aberto de validade:

$$|y| < 1 \iff \left|\frac{x-a}{a}\right| < 1 \iff |x-a| < a,$$

ou seja, $I = \,]0, 2a[$.

e) $\arctan(x-a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}(x-a)^{2k+1}$, para $|x-a| < 1$ ou seja, para $x \in \,]a-1, a+1[$.

f) Como,

$$\frac{1}{1+3x} = \frac{1}{1+3(x-1)+3} = \frac{1}{4}\frac{1}{1+\frac{3(x-1)}{4}} = \frac{1}{4}\frac{1}{1-y},$$

com $y = \frac{3(x-1)}{4}$, vem

$$\frac{1}{1+3x} = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} y^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k(x-1)^k}{4^{k+1}}\,.$$

Intervalo de validade deste desenvolvimento:

$$|y| < 1 \iff \left|\frac{3(x-1)}{4}\right| < 1 \iff |x-1| < \frac{4}{3}$$

ou seja, para $x \in \left]-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right[$. Além disso,

$$e^{2x} = e^{2(x-1)+2} = e^2 e^{2(x-1)} = e^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k (x-1)^k}{k!},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\frac{1}{1+3x} + e^{2x} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3^k}{4^{k+1}} + \frac{2^k}{k!} \right) (x-1)^k .$$

válida no intervalo $\left]-\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right[$.

g) $\log(2-x) = \log(1-(x-1)) = \log(1+y)$, com $y = -(x-1)$. Logo,

$$\log(2-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} y^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k} (x-1)^k$$

e, portanto

$$(x-1)^{100} \log(2-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{k} (x-1)^{k+100}$$

para $|y| < 1$, ou seja, para $|x-1| < 1$. Logo $I =]0, 2[$.

h) Sabemos que $\arctan y = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} y^{2k+1}$. Logo, fazendo $y = \frac{(x-1)^2}{4}$, obtemos:

$$\arctan \frac{(x-1)^2}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4^{2k+1}(2k+1)} (x-1)^{4k+2}.$$

Maior intervalo aberto de validade: $|y| < 1 \iff \left| \frac{(x-1)^2}{4} \right| < 1 \iff |x-1| < 2$, ou seja, $x \in]-1, 3[$.

4.a) $f'(1) = 4 \neq 0$, logo 1 não é ponto de estacionaridade de f.

b) $\forall_{x \in I}, f(x) = \frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{x-2}{4} + \dots$. Logo, $f'(2) = -\frac{1}{4} \neq 0$ e, portanto 2 não é ponto de estacionaridade de f.

c) $\forall_{x \in \mathbb{R}}, f(x) = e^x = e^a + e^a(x-a) + \dots$. Logo, $f'(a) = e^a \neq 0$ e, portanto, a não é ponto de estacionaridade de f.

d) $\forall_{x \in I}, f(x) = \log x = \log a + (x-a) + \dots$ Logo, $f'(a) = 1$ e a não é ponto de estacionaridade de f.

e) $\forall_{x \in I}, f(x) = \arctan(x-a) = (x-a) + \dots$ Logo, $f'(a) = 1$ e, portanto, a não é ponto de estacionaridade de f.

f) $\forall_{x \in I}, f(x) = \frac{1}{1+3x} + e^{2x} = \frac{5}{4} + \frac{35(x-1)}{16} + \dots$ Assim, $f'(1) = \frac{35}{16} \neq 0$ e, portanto, 1 não é ponto de estacionaridade de f.

g) $\forall_{x \in I}, f(x) = (x-1)^{100} \log(2-x) = -(x-1)^{101} + \ldots$. Logo, $f^{(k)}(1) = 0$, para $k = 1, 2, \ldots, 100$, e $f^{(101)}(1) = -101!$. Como a derivada de menor ordem que não se anula em 1 é de ordem ímpar, concluimos que 1 não é ponto de extremo de f.

h) $\forall_{x \in I}, f(x) = \arctan \frac{(x-1)^2}{4} = \frac{(x-1)^2}{4} + \ldots$. Logo, $f'(1) = 0$ e $f''(1) = 2! \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} > 0$. Logo, 1 é ponto de extremo de f, porque a derivada de menor ordem que não se anula em 1 é de ordem par, e esse extremo é um mínimo relativo, já que essa derivada é positiva. O valor desse mínimo é $f(1) = 0$.