# ANÁLISE MATEMÁTICA II

(LEEC, LEB, LEQ, LQ)

9ª Ficha de problemas-teste

**I.** Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \dfrac{1-e^{xy}}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0)$.
b) Mostre que $f$ não é contínua em $(0,0)$. Em que pontos é $f$ diferenciável?
c) Para cada $v = (v_1, v_2)$ determine $\frac{\partial f}{\partial v}(1,0)$.

**II.** Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 \sin y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Calcule $\frac{\partial g}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial g}{\partial y}(0,0)$.
b) Calcule $\frac{\partial g}{\partial v}(0,0)$ com $v = (1,1)$ (use a definição). Que conclui quanto à diferenciabilidade de $g$?
c) Seja $\varphi(x,y) = a + bx + cy$ tal que

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{g(x,y) - \varphi(x,y)}{\|(x-1,y)\|} = 0.$$

Determine $a$, $b$ e $c$.

**III.** Considere a função $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)^2 y^2}{(x^2-1)^2+y^2} + y & \text{se } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

a) Calcule $\nabla h(1,0)$.
b) Mostre que $h$ é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.
c) Para cada $v = (v_1, v_2)$ determine $\frac{\partial h}{\partial v}(1,0)$.

**Atenção:** $\frac{\partial f}{\partial v}(a) \equiv f'_v(a) \equiv f'(a;v)$ representa a derivada de $f$ no ponto $a$ relativamente ao vector $v$.