ANÁLISE MATEMÁTICA II

(LEEC, LEB, LEQ, LQ)

$8^{\underline{a}}$ Ficha de problemas-teste

I. Considere a função $f : D \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (g(x,y), h(x,y))$ onde

$$g(x,y) = \frac{1-\cos(y-x^2)}{y-x^2} \qquad \text{e} \qquad h(x,y) = \frac{1}{\log(1+x^2y^2)}.$$

e $D = \{(x,y) : \, y \neq x^2 \wedge x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$.

a) A que pontos $(x,y) \in \text{front } D$ é a função f prolongável por continuidade?

b) Seja $X = \overline{B}_1(-2,-2) = \{(x,y) : \, \|(x,y) - (-2,-2)\| \leq 1\}$. Justifque que $g(X)$ é um intervalo compacto.

II. Considere a função $f : D \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (\varphi(x,y,z), \psi(x,y,z))$, onde

$$\varphi(x,y,z) = \arctan e^{\frac{1}{x^2+y^2+z^2}} \qquad \text{e} \qquad \psi(x,y,z) = \frac{\sin xyz}{xyz}.$$

em $D = \{(x,y,z) : \, x \neq 0 \wedge y \neq 0 \wedge z \neq 0\}$.

a) Mostre que f admite um prolongamento por continuidade a $\mathbb{R}^3$.

b) Justifique porque é que $\varphi(D)$ é um intervalo e determine-o.

III. Considere a função $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, dada por

$$F(x,y,z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2-y^2-z^2}} & \text{se} \quad x^2+y^2+z^2 > 1 \\ y(x^2+y^2+z^2) & \text{se} \quad x^2+y^2+z^2 \leq 1 \end{cases}$$

a) Estude a continuidade de F.

b) Mostre, usando um dos teoremas globais da continuidade, que $[0,1] \subset F(\mathbb{R}^3)$.