ANÁLISE MATEMÁTICA II

(LEEC, LEB, LEQ, LQ)

$7^{\underline{a}}$ Ficha de problemas-teste

I. Considere a função $f : D \to \mathbb{R}$ com $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, definida por

$$f(x,y) = \frac{x^2 y^3}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

a) Calcule o limite de $f(x,y)$, quando $(x,y) \to (0,0)$, relativo a cada semirecta S com origem no ponto $(0,0)$.

b) Prove que existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

II. Considere a função $g : D \to \mathbb{R}$, com $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ definida por

$$g(x,y) = \frac{(x-1)^2 y^2}{\left((x-1)^2+y^2\right)^2}\,.$$

a) Calcule o limite de $g(x,y)$, quando $(x,y) \to (1,0)$, relativo a cada semirecta S com origem no ponto $(1,0)$.

b) Conclua sobre a existência de $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} g(x,y)$.

III. Considere a função $\varphi : D \to \mathbb{R}^2$, com $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dada por

$$\varphi(x,y) = \frac{x\sin(y^2)}{x^2+y^4}\,.$$

a) Mostre que o limite de $\varphi(x,y)$, quando $(x,y) \to (0,0)$, ao longo de cada semirecta S com origem no ponto $(0,0)$ existe e é o mesmo para todas essas semirectas.

b) Calcule o limite de $\varphi(x,y)$, quando $(x,y) \to (0,0)$, relativo ao conjunto $A = \{(x,y) : x = y^2\}$. Que pode concluir sobre a existência de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \varphi(x,y)$?