Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA II

LEEC, LEB, LEQ, LQ - 2º exame

Data: 9/7/2003
Duração: 3h00.

I.

1. Calcule uma primitiva de cada uma das funções seguintes:

$$x \sin x\,, \qquad \frac{x^3}{x^2+4}\,, \qquad x \log x\,, \qquad \frac{\sin(2x)}{4-\cos^2 x}\,.$$

2. Calcule a área do subconjunto limitado de $\mathbb{R}^2$ definido por $2|x| \le y \le 1 + x^2$.

3. Calcule $\displaystyle \frac{d}{dx}\int_x^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\,dt\,.$

4. Desenvolva em série de Taylor relativa ao ponto 0 a função

$$f(x) = x + \frac{x-1}{x+1}, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},$$

e determine o maior intervalo aberto onde a série representa a função.

II.

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciável com matriz jacobiana

$$M_{(x,y)}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x & y \\ x^2 & y^2 \end{bmatrix}$$

e seja $g(u,v,w) = w^2 + we^u + ue^v$. Calcule a derivada de $g \circ f$ em $(x,y) = (1,1)$ sabendo que $f(1,1) = (0,0,1)$.

6. Considere a função

$$f(x,y) = xy(1 - x^2 - y^2)$$

definida no semiplano $x > 0$. Determine os extremos relativos da função f. Terá f máximo ou mínimo absolutos?

V.S.F.F. →

7. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin(y^2)}{x^2+y^2}\,, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0\,, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Estude a continuidade de f em $\mathbb{R}^2$.

b) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

c) Decida se f é diferenciável em $(0,0)$.

III.

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞, tal que

$$\forall_{x\in\mathbb{R}}\,, \quad \alpha|x|^p \leq |f(x)| \leq \beta|x|^p$$

onde α e β são duas constantes positivas e p é um inteiro maior que 1.

a) Prove que $f(0) = f'(0) = 0$.

b) Prove que f tem extremo relativo em $x = 0$ sse p é par.