Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Secção de Álgebra e Análise

ANÁLISE MATEMÁTICA II

LEEC, LEB, LEQ, LQ - 1º exame

Data: 25/6/2003
Duração: 3h00.

I

1. Calcule uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

$$\text{a)}\ \frac{\cos(\sqrt{x+2})}{\sqrt{x+2}} \qquad \text{b)}\ \frac{3^x}{\cos^2(3^x)} \qquad \text{c)}\ \sin(\log x) \qquad \text{d)}\ \frac{2\sin^2 x\cos x}{(-1+\sin x)(2-\cos^2 x)}$$

2. Calcule a área da região do plano limitada pelos gráficos das funções $f, g : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = \tan x \qquad \text{e} \qquad g(x) = 2\sin x$$

3. Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$h(x) = \int_0^{x^2} e^{t^2}\, dt\,.$$

a) Calcule $h'(x)$.

b) Desenvolva $h'(x)$ em série de MacLaurin (série de Taylor em torno do ponto $x = 0$).

c) Determine a série de MacLaurin de $h(x)$.

d) Use uma das expansões anteriores para calcular $h^{(17)}(0)$.

II

1. Considere as funções de duas variáveis φ e ψ definidas pelas fórmulas

$$\varphi(x,y) = \frac{\log(-x-\sin y)}{\sqrt{\pi^2 - x^2 - y^2}\sqrt{x^2+(y+2)^2-\frac{1}{4}}} \qquad\qquad \psi(x,y) = \sqrt[4]{\frac{1}{4} - x^2 - (y-2)^2}$$

de domínio B e M, respectivamente (caso precise, $\sin\frac{5}{2} > \frac{1}{2}$).

a) Determine os conjuntos B e M e esboce geometricamente B, M e $Y = B \cup M$.

b) Para cada um dos três conjuntos B, M e Y, diga, sem justificar, quais são abertos, fechados, conexos e/ou compactos.

c) Indique, justificando (sem exceder 3 linhas por cada alínea), quais das proposições seguintes são necessariamente verdadeiras e quais não são:

c.1) Toda a sucessão convergente em que nenhum termo pertence a B, converge para um ponto que não pertence a B.

c.2) Toda a sucessão de termos no complementar de B tem uma subsucessão convergente para um ponto não pertencente a B.

c.3) Qualquer função contínua com domínio M e contradomínio contido em $\mathbb{R}$ tem mínimo.

c.4) O contradomínio de qualquer função contínua com domínio B é um conjunto conexo.

2. Sejam φ e g as funções definidas por

$$\varphi(x,y) = \frac{x^3 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}\,, \qquad\qquad g(x,y) = \int_1^{\varphi(x,y)} f(t)\,dt$$

onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$.

a) Estude φ quanto à continuidade e quanto ao prolongamento por continuidade.

b) Questão idêntica a b) mas para a função g.

c) Mostre que g tem derivadas parciais no ponto $(2,2)$ e calcule-as.

3. Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(u,v) = \sin(2u+v) + 5$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função definida por

$$f(x,y) = (\phi(x,y)\,,\, -4x^3 + 6x^2 - 4xy - 2x + 2y)$$

onde ϕ é uma função de classe C^2 verificando:

i) $\phi(0,0) = 0\,, \qquad \phi(1,0) = 0\,, \qquad \nabla\phi(0,0) = (1,-1)\,, \qquad \phi'(1,0) = [1 \qquad -1]\,.$

ii) A derivadas de ϕ de segunda ordem em $(0,0)$ e $(1,0)$ são iguais sendo

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(0,0) = -5 \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}(0,0) = 1 \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}(0,0) = 1$$

Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função composta de g e f, $\quad h = g \circ f\,.$

a) Determine as matrizes jacobianas de f nos pontos $(1,0)$ e $(0,0)$.

b) Determine a matrizes jacobianas de h nos pontos $(1,0)$ e $(0,0)$.

c) Verifique que $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0,0) = 2\,, \quad \dfrac{\partial^2 h}{\partial x\partial y}(0,0) = -2\,, \quad \dfrac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0,0) = 2.$
Pode usar estes valores no que se segue mesmo sem os ter verificado.

d) Justifique que apenas um dos pontos $(0,0)$ e $(1,0)$ pode ser ponto de extremo local de h.

e) Caso um dos pontos $(0,0)$ ou $(1,0)$ seja extremo local de h, indique a natureza do extremo.

III

Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função que se anula no eixo Ox e é tal que $\dfrac{|\varphi(x,y)|}{\sqrt{|y|}}$ é limitada.

a) Mostre que $\dfrac{\partial(x\varphi)}{\partial x}(0,0) = 0$ e $\dfrac{\partial(x\varphi)}{\partial y}(0,0) = 0$.

b) Prove que $x\varphi(x,y)$ é diferenciável em $(0,0)$.