Análise Matemática I - LEEC, LEIC (Alameda)

1º Exame (Grupos I, II, III, IV, V e VI)
2º Teste (Grupos IV, V e VI)

duração: **9 de Janeiro de 2006, 9:00**
teste - 1:45, exame - 3:00

Apresente todos os cálculos e justificações relevantes

(5 vals.) **I.** Suponha que

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} \,:\, (x^2-1)(x-3) \leq 0\right\}, \qquad B = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

e que C é o conjunto das somas parciais da série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n}$.

1. a) Mostre que $A = \,]-\infty, -1] \cup [1, 3]$.
   b) Indique, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$,

   $\inf A, \quad \max A, \quad \inf B, \quad \min A \cap (R_0^+ \setminus \mathbb{Q}) \quad \sup A \setminus B, \quad \sup B \cap \mathbb{Q},$

   c) Determine caso existam, o ínfimo, mínimo, supremo e máximo de C. Justifique sucintamente.
2. Diga, justificando, quais das seguintes proposições são verdadeiras. Para as que forem falsas forneça um contraexemplo:
   i) Toda a sucessão monótona de termos em A é convergente em $\mathbb{R}$.
   ii) Toda a sucessão crescente de termos em A é convergente para um elemento de A.
   iii) Uma sucessão de termo geral a_n em A que verifica $a_n a_{n+1} < 0$ e $|a_n| \leq 3$, para todo $n \in \mathbb{N}_1$, tem, pelo menos, dois sublimites s_1 e s_2, tais que $s_1 < 0$ e $s_2 > 0$.

(3 vals.) **II.** Determine, se existirem, os limites em $\overline{\mathbb{R}}$ das sucessões de termos gerais

a) $\dfrac{2^n - n^{10}}{2^{n+1} + n^5}$ b) $\sqrt[n]{(n+1)^2 - n^2}$ c) $\left(\dfrac{n^2+2n}{n^2}\right)^n$.

(2 vals.) **III.** Considere a sucessão definida por recorrência por:

$$x_1 = 1/2, \qquad x_{n+1} = \frac{4x_n}{\pi} \operatorname{arctg} x_n, \; n \in \mathbb{N}_1.$$

a) Mostre que $0 < x_n < 1, \; \forall n \in \mathbb{N}_1$.
b) Mostre que x_n é decrescente.
c) Justifique que x_n é convergente e calcule o seu limite.

Para o 2º Teste, responda apenas às questões desta página.

(4.5 vals.) **IV.** 1. Estude quanto à natureza (convergência simples, absoluta e divergência) cada uma das séries seguintes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{arctg} n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + n}{2n^3 - n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 - 3}{n^2 + 5n + 10}\right)^n$

2. Determine a natureza da seguinte série de potências para cada $x \in \mathbb{R}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n(\sqrt{n} + 1)}$$

3. Determine os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x^{-\log x}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (\log x)^{\frac{1}{x}}$.

(4 vals.) **V.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(x^2 - 6x + 8\right) & \text{se } x \geq 2 \\ 2 + \dfrac{1}{3 - x} & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

a) Determine $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f(x)$ e $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Determine, justificando, o domínio de diferenciabilidade de f e determine a função f'.

c) Estabeleça os intervalos de monotonia de f e calcule os seus máximos e mínimos locais, se os houver.

d) Determine o contradomínio de f. Justifique a sua resposta.

(1.5 vals.) **VI.** 1. Seja g uma função diferenciável com derivada contínua em $\mathbb{R}$ e seja $\varphi : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(x) = g\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \text{para } x \geq 1.$$

Mostre que $\lim_{x\to+\infty} \varphi'(x)$ existe e é nulo.

2. Seja h uma função diferenciável em $\mathbb{R}$, tal que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h(x)$ existe em $\mathbb{R}$ e h' é uma função decrescente. Mostre que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} h'(x)$ existe e é nulo.