Análise Complexa e Equações Diferenciais

2º Semestre 2011/2012

2º Teste - Versão A

LEIC-A, LEGM, LEMAT, MEAMBI, MEBIOL, MEC, MEQ, MEMEC, LEAN, MEAER

26 de Maio de 2012, 9h,
Duração: 1h 30m

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular.
- Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
- Numere as páginas do seu caderno de respostas e indique, na tabela seguinte, **todas** as páginas da resposta a cada questão.

Pergunta	Páginas	Cotação	Classificação
1) a)		1,5	
1) b)		1,0	
2) a)		1,0	
2) b)		1,0	
2) c)		1,0	
3)		1,5	
4) a)		1,0	
4) b)		1,0	
5)		1,0	
Total		10	

Nome: ______________________________

Nº: ____________________ **Sala:** __________

Curso: ____________________ **Rúbrica (DOCENTE):**

[1,0 val.] 1. (a) Determine a solução geral da equação

$$y\frac{dy}{dt} = \operatorname{sen}(t) + y^2 \operatorname{sen}(t).$$

Resolução: A equação pode ser escrita na forma

$$\frac{y}{1+y^2}\frac{dy}{dt} = \operatorname{sen}(t),$$

e é portanto separável. Temos então que

$$\frac{y}{1+y^2}\frac{dy}{dt} = \operatorname{sen}(t) \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\log(1+y^2)}{2}\right) = \operatorname{sen}(t)$$

e a solução geral é dada implícitamente por

$$\log(1+y^2) = -2\cos(t) + C,$$

onde C designa uma constante real. Resolvendo em ordem a y temos então que a solução geral é

$$y = y(t) = \pm\sqrt{Ke^{-2\cos(t)} - 1},$$

onde $K \in \mathbb{R}^+$.

[1,5 val.] (b) Mostre que

$$\frac{e^{2t}}{\operatorname{sen} y} + 2\operatorname{cotg}(y) + \frac{dy}{dt} = 0$$

admite o factor integrante $\mu(t,y) = e^{-2t}\operatorname{sen} y$ e obtenha a solução da equação com condição inicial $y(0) = \frac{\pi}{2}$.

Resolução: Multiplicando a equação por $e^{-2t}\operatorname{sen} y$ ficamos com

$$1 + 2e^{-2t}\cos(y) + e^{-2t}\operatorname{sen}(y)\frac{dy}{dt} = 0.$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(1 + 2e^{-2t}\cos(y)\right) = -2e^{-2t}\operatorname{sen}(y) = \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-2t}\operatorname{sen}(y)\right),$$

a equação fica exacta por multiplicação pela função $\mu(t,y) = e^{-2t}\operatorname{sen} y$, verificamos que esta função é um factor integrante para a equação. Sabemos então que a solução geral da equação é dada implícitamente por $\phi(t,y) = C$, onde $C \in \mathbb{R}$ e $\phi(t,y)$ verifica:

$$\frac{\partial}{\partial t}\phi(t,y) = 1 + 2e^{-2t}\cos(y), \tag{1}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi(t,y) = e^{-2t}\operatorname{sen}(y). \tag{2}$$

Integrando a equação (1) em ordem a t obtemos

$$\phi(t,y) = t - e^{2t}\cos(y) + h(y) \tag{3}$$

e derivando em ordem a y e comparando com (2) concluímos que $h'(y) = 0$. A solução geral da equação é então dada implícitamente por

$$t - e^{-2t}\cos(y) = C,$$

e a condição inicial determina o valor $C = 0$ pelo que a solução com a condição inicial indicada é

$$y(t) = \operatorname{arcos}\left(\frac{te^{2t}}{2}\right).$$

[1,0 val.] 2. (a) Determine a solução geral do sistema

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) \qquad \text{com} \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Resolução: O conjunto das soluções do sistema é um espaço vectorial de dimensão 2 logo é suficiente encontrar duas soluções linearmente independentes. Para isso encontramos os valores próprios da matriz $\mathbf{A}$,

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = 3 \text{ ou } \lambda = 4$$

e os respectivos vectores próprios

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{v} = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x \text{ para } x \in \mathbb{R},$$

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{w} = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \;\Leftrightarrow\; \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} y \text{ para } y \in \mathbb{R}.$$

A solução geral do sistema é assim dada por

$$\mathbf{x}(t) = C_1\, e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2\, e^{4t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde C_1 e C_2 são constantes reais.

[1,0 val.] (b) Calcule $e^{\mathbf{A}t}$.

Resolução: Resulta da alínea (a) que uma matriz fundamental de soluções do sistema $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t)$ é dada por

$$\boldsymbol{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & 2e^{4t} \\ e^{3t} & e^{4t} \end{bmatrix}.$$

Então temos

$$e^{\mathbf{A}t} = \boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{\Phi}(0)^{-1} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 2e^{4t} \\ e^{3t} & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 2e^{4t} \\ e^{3t} & e^{4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{4t} - e^{3t} & 2e^{3t} - 2e^{4t} \\ e^{4t} - e^{3t} & 2e^{3t} - e^{4t} \end{bmatrix}.$$

[1,0 val.] (c) Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \qquad \text{com} \qquad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

Resolução: Usando fórmula de variação das constantes temos

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{b}(s)ds = \begin{bmatrix} 2e^{4t} - e^{3t} \\ e^{4t} - e^{3t} \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} 4e^{4(t-s)} \\ 2e^{4(t-s)} \end{bmatrix} ds$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{4t} - e^{3t} \\ e^{4t} - e^{3t} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -e^{4t} \\ -\frac{1}{2}e^{4t} \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 3e^{4t} - e^{3t} - 1 \\ \frac{3}{2}e^{4t} - e^{3t} - \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

[1,5 val.] 3. Calcule a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' - y' = 1 + 2\cos t \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Resolução: A EDO linear homogénea correspondente, $y'' - y' = 0$ a qual, em virtude do polinómio característico ser $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda - 1)$ escrevemos como

$$D(D-1)y = 0,$$

tem, por conseguinte, a solução geral

$$y_H(t) = c_1 e^t + c_2.$$

Calculemos em seguida, uma solução particular, $y_P(t)$, da EDO não-homogénea dada

$$y'' - y' = 1 + 2\cos t, \tag{4}$$

a qual se escreve como

$$D(D-1)y = 1 + 2\cos t\,. \tag{5}$$

Como $D(D^2+1)(1+2\cos t) = 0$ ($D(D^2+1)$ é um aniquildor de $1+2\cos t$ as soluções de (5) satisfazem

$$D^2(D^2+1)(D-1)y = 0$$

cuja solução geral é

$$y(t) = y_H(t) = c_3 t + c_4 \cos t + c_5 \operatorname{sen} t\,.$$

Procuremos então uma solução particular na forma $y_P(t) = c_3 t + c_4 \cos t + c_5 \operatorname{sen} t$ calculando os coeficientes c_3, c_4, c_5 por substituiçao de y_P em (4):

$$\begin{aligned} &(c_3 t + c_4 \cos t + c_5 \operatorname{sen} t)'' - (c_3 t + c_4 \cos t + c_5 \operatorname{sen} t)' = 1 + 2\cos t \\ \Leftrightarrow \quad &(-c_4 \cos t - c_5 \operatorname{sen} t) - (c_3 - c_4 \operatorname{sen} t + c_5 \cos t) = 1 + 2\cos t \\ \Leftrightarrow \quad &\begin{cases} -c_3 &= 1 \\ -c_4 - c_5 &= 2 \\ -c_5 + c_4 &= 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_3 &= -1 \\ c_4 &= -1 \\ c_5 &= -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Concluimos que uma solução particular de (4) é $y_P(t) = -t - \cos t - \operatorname{sen} t$ e que, como a solução geral de (4) se pode escrever como $y = y_H + y_P$, esta poderá ser escrita na forma

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 - t - \cos t - \operatorname{sen} t.$$

Os coeficientes c_1, c_2 dependem das condições iniciais. Como

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 - 1 &= 1 \\ y'(0) &= c_1 - 1 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

concluimos que $c_1 = 2,\ c_2 = 0$, e a solução do problema dado será

$$y(t) = 2e^t - t - \cos t - \operatorname{sen} t.$$

[1,0 val.] 4. (a) Determine a solução do problema, para $x \in [0,1]$, $t > 0$ de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x}(1,t) = 0 & t > 0\,, \\ u(x,0) = 5 + 2\cos(9\pi x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Resolução: Procuremos funções de (x,t) do tipo $X(x)T(t)$ que satisfaçam a EDP e as condições na fronteira. Substituindo na EDP:

$$\frac{\partial}{\partial t}(XT) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}(XT) \quad \Leftrightarrow \quad XT' = 2X''T\,.$$

Logo, para X e T não nulos

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{2T} = \sigma, \quad \sigma \text{ constante real}$$

dado que o primeiro membro é independente de t e o segundo é independente de x. Desta forma desacoplamos as equações para $X(x)$ e $T(t)$:

$$X''(x) - \sigma X(x) = 0 \tag{6}$$

$$T'(t) - 2\sigma T(t) = 0 \tag{7}$$

Por outro lado, as condições fronteira em $x = 0,1$ implicam que

$$X'(0) = X'(1) = 0 \tag{8}$$

Consoante o sinal da constante σ a equação (6) tem as soluções

$$X(x) = \begin{cases} ae^{\sqrt{\sigma}x} + be^{-\sqrt{\sigma}x} & \text{se } \sigma > 0 \\ a + bx & \text{se } \sigma = 0 \\ a\cos(\sqrt{|\sigma|}x) + b\,\mathrm{sen}(\sqrt{|\sigma|}x) & \text{se } \sigma < 0 \end{cases}$$

Aplicando as condições fronteira (8):
Caso $\sigma > 0$:

$$\begin{cases} a\sqrt{\sigma} - b\sqrt{\sigma} = 0 \\ a\sqrt{\sigma}e^{\sqrt{\sigma}} - b\sqrt{\sigma}e^{-\sqrt{\sigma}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ a(e^{\sqrt{\sigma}} - e^{-\sqrt{\sigma}}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X(x) \equiv 0$$

Caso $\sigma = 0$:

$$b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X(x) = a \text{ (constante arbitrária)}.$$

Caso $\sigma < 0$:

$$\begin{cases} b\sqrt{|\sigma|} = 0 \\ -a\sqrt{|\sigma|}\,\mathrm{sen}(\sqrt{|\sigma|}) + b\sqrt{|\sigma|}\cos(\sqrt{|\sigma|}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a\,\mathrm{sen}(\sqrt{|\sigma|}) = 0 \end{cases}$$

e, neste último caso, ou $a = b = 0$, dando novamente a solução $X(x) \equiv 0$, ou $b = 0$ com $\sigma = -(n\pi)^2$, $n = 1, 2, \ldots$, e neste caso obtemos as soluções não identicamente nulas $X(x) = a\cos(n\pi x)$, $n = 1, 2, \ldots$. Resolvendo (7) com estes valores de σ, obtemos $T(t) = ce^{-2n^2\pi^2 t}$. Então, para $n = 0, 1, 2, , \ldots$ as funções $X(x)T(t) = e^{-2n^2\pi^2 t}\cos(n\pi x)$ são soluções da EDP satisfazendo as condições fronteira em $x = 0, 1$. Mas combinações lineares arbitrárias destas funções são também soluções da EDP satisfazendo as mesmas condições fronteira em $x = 0, 1$. Vamos assim procurar a solução $u(x,t)$ do problema dado escrevendo formalmente

$$u(x,t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-2n^2\pi^2 t}\cos(n\pi x)$$

Os coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots$ são determinados pela condição inicial. Assim, como

$$u(x,0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi x) = 5 + 2\cos(9\pi x)$$

concluimos que $a_0 = 10$, $a_9 = 2$ e $a_n = 0$ se $n \neq 0, 9$. O resultado final será então

$$u(x,t) = 5 + 2e^{-162\pi^2 t}\cos(9\pi x)\,.$$

[1,0 val.] (b) Calcule a série de Fourier da função $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1-2H(x)$ onde $H(x)$ é a função de Heaviside. Qual é a soma daquela séria para cada $x \in [-\pi, \pi]$?

Resolução: Como, para cada $x \in [-\pi, \pi]$,

$$f(x) = 1 - 2H(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x < 0 \\ -1, & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

então $f(-x) = -f(x)$ para $0 < x < \pi$ e, portanto a série de Fourier de $f(x)$ será uma série de senos com $L = \pi$ a qual é dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nx)$$

onde os coeficientes (com $L = \pi$) são dados por

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (-\operatorname{sen}(nx))\, dx = \frac{2}{n\pi}(\cos(n\pi) - 1),$$

ou seja, é a série de senos

$$\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - 1}{n} \operatorname{sen}(nx) = -\frac{4}{\pi} \left(\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}(3x)}{3} + \frac{\operatorname{sen}(5x)}{5} + \dots \right).$$

Continuando a designar por $f(x)$ a extensão 2π-periódica de $f(x)$ a $\mathbb{R}$, o teorema de Fourier permite concluir que a soma daquela série é dada em $[-\pi, \pi]$ por

$$\frac{f(x-) + f(x+)}{2} = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in]-\pi, 0[\\ -1, & \text{se} \quad x \in]0, \pi[\\ 0, & \text{se} \quad x = -\pi,\ 0,\ \pi \end{cases}$$

[1,0 val.] 5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, contínua e tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq C(1 + t^2)|y_1 - y_2|, \quad \forall t \in \mathbb{R}, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

onde C designa uma constante positiva. Justifique que para qualquer $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, o problema de Cauchy

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \qquad y(t_0) = y_0$$

admite uma solução única nalguma vizinhança de t_0. Supondo ainda que $f(t, 0) = 0$, mostre que o intervalo máximo de existência da solução não é limitado superiormente.

Resolução: Considerando um compacto $K \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ que contém no seu interior o ponto (t_0, y_0), é claro que f restringida a K é Lipschitziana na variável y visto que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq C_K |y_1 - y_2|,\ \forall (t, y_1),\ (t, y_2) \in K,$$

onde $C_K = C \max\{1 + t^2,\ (t, y) \in K\}$. Como por hipótese f também é contínua nas variáveis t, y, pelo Teorema de Picard podemos garantir existência e unicidade de solução do problema de Cauchy nalguma vizinhança de t_0. Como as condições que garantem existência e unicidade são válidas em $\mathbb{R}^2$, concluímos que o intervalo máximo de existência só é limitado superiormente caso a solução "expluda"em tempo finito, isto é, caso exista $T > t_0$ tal que $\lim_{t \to T} |y(t)| = +\infty$. Vamos ver que tal não é possível, por comparação de soluções.

Como $|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq C(1+t^2)|y_1 - y_2|, \quad \forall t \in \mathbb{R}, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ e $f(t,0) = 0$, temos que
$$|f(t,y)| \leq (1+t^2)|y|, \ \forall (t,y) \in \mathbb{R}^2.$$
Por hipótese $y_0 = y(t_0) \in \mathbb{R}^+$, pelo que, atendendo à continuidade da solução do problema de Cauchy,
$$-C(1+t^2)y \leq f(t,y) \leq C(1+t^2)y, \tag{9}$$
para $t \in [t_0, t_0 + \alpha[$ onde $\alpha > 0$.

Comparando com as soluções dos problemas de Cauchy:
$$\frac{du}{dt} = C(1+t^2)u, \quad u(t_0) = y_0, \tag{10}$$
e
$$\frac{dv}{dt} = -C(1+t^2)v \quad v(t_0) = y_0, \tag{11}$$
que têm como soluções respectivamente
$$u(t) = y_0 e^{C\left(t - t_0 + \frac{t^3 - t_0^3}{3}\right)},$$
e
$$u(t) = y_0 e^{C\left(t_0 - t + \frac{t_0^3 - t^3}{3}\right)},$$
concluímos que
$$v(t) \leq y(t) \leq u(t),$$
enquanto $y(t) > 0$. Se a partir de algum $t_1 > t_0$ se tem $y(t) < 0$, substituindo y por $-y$ em (9), e novamente por comparação, concluímos que $y(t)$ se mantêm limitada por duas exponenciais e portanto em qualquer caso a solução não "explode"em tempo finito.