



# Análise Complexa e Equações Diferenciais

## 2º Semestre 2011/2012

### 2º Teste - Versão A

LEIC-A, LEGM, LEMAT, MEAMBI, MEBIOL, MEC, MEQ, MEMEC, LEAN, MEAER

26 de Maio de 2012, 9h,

**Duração: 1h 30m**

### INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular.
- Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
- Numere as páginas do seu caderno de respostas e indique, na tabela seguinte, **todas** as páginas da resposta a cada questão.

Pergunta	Páginas	Cotação	Classificação
1) a)		1,0	
1) b)		1,5	
2) a)		1,0	
2) b)		1,0	
2) c)		1,0	
3)		1,5	
4) a)		1,0	
4) b)		1,0	
5)		1,0	
Total		10	

Nome: \_\_\_\_\_

Nº: \_\_\_\_\_

Sala: \_\_\_\_\_

Curso: \_\_\_\_\_

Rúbrica (DOCENTE):

[1,0 val.] 1. (a) Determine a solução geral da equação

$$y \frac{dy}{dt} = \sin(t) + y^2 \sin(t).$$

[1,5 val.] (b) Mostre que

$$\frac{e^{2t}}{\sin y} + 2 \cotg(y) + \frac{dy}{dt} = 0$$

admite o factor integrante  $\mu(t, y) = e^{-2t} \sin y$  e obtenha a solução da equação com condição inicial  $y(0) = \frac{\pi}{2}$ .

[1,0 val.] 2. (a) Determine a solução geral do sistema

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) \quad \text{com} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

[1,0 val.] (b) Calcule  $e^{\mathbf{A}t}$ .

[1,0 val.] (c) Resolva o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \mathbf{x}'(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) & \text{com} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{cases}$$

[1,5 val.] 3. Calcule a solução do seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} y'' - y' = 1 + 2 \cos t \\ y(0) = 1, y'(0) = 0. \end{cases}$$

[1,0 val.] 4. (a) Determine a solução do problema, para  $x \in [0, 1]$ ,  $t > 0$  de

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0 & t > 0, \\ u(x, 0) = 5 + 2 \cos(9\pi x), & 0 < x < 1. \end{cases}$$

[1,0 val.] (b) Calcule a série de Fourier da função  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por  $f(x) = 1 - 2H(x)$ , onde  $H(x)$  é a função de Heaviside. Qual é a soma daquela série para cada  $x \in [-\pi, \pi]$ ?

[1,0 val.] 5. Seja  $f : \mathbb{R}^2_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , contínua e tal que

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq C(1 + t^2)|y_1 - y_2|, \quad \forall t \in \mathbb{R}, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$$

onde  $C$  designa uma constante positiva. Justifique que para qualquer  $(t_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ , o problema de Cauchy

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad y(t_0) = y_0$$

admite uma solução única nalguma vizinhança de  $t_0$ . Supondo ainda que  $f(t, 0) = 0$ , mostre que o intervalo máximo de existência da solução não é limitado superiormente.