INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

# *Análise Complexa e Equações Diferenciais*

## 2º Semestre 2011/2012

### 1º Teste - Versão A

LEIC-A, LEGM, LEMat, MEAmbi, MEBiol, MEC, MEQ, MEMec, LEAN, MEAer

31 de Março de 2012, 9h,

**Duração: 1h 30m**

## INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular.
- Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
- Numere as páginas do seu caderno de respostas e indique, na tabela seguinte, **todas** as páginas da resposta a cada questão.

| Pergunta | Páginas | Cotação | Classificação |
|---|---|---|---|
| 1) a) | | 0,5 | |
| 1) b) | | 1,0 | |
| 1) c) | | 0,5 | |
| 2) a) | | 1,0 | |
| 2) b) | | 1,0 | |
| 3) a) | | 1,0 | |
| 3) b) | | 1,0 | |
| 3) c) | | 1,0 | |
| 4) a) | | 1,0 | |
| 4) b) | | 1,0 | |
| 5) | | 1,0 | |
| Total | | 10 | |

**Nome:** ______________________________________________

**Nº:** ____________________________ **Sala:** _____________

**Curso:** __________________________ **Rúbrica (DOCENTE):**

1. Considere a função $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x$.

[0,5 val.] a) Mostre que $u$ é harmónica.

**Resolução:** Dado que se trata de um polinómio nas variaveis reais $x$ e $y$ a função $u(x, y)$ é de classe $C^2$ em $\mathbb{R}^2$. Além disso

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (6x + 4) + (-6x - 4) = 0, \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

logo $u$ é harmónica em $\mathbb{R}^2$.

[1,0 val.] b) Calcule uma função inteira $f$ tal que $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ e $f(-1) = 0$.

**Resolução:** Para que $f = u + iv$ seja inteira é necessário que sejam satisfeitas as equações de Cauchy-Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x\right) = 3x^2 - 3y^2 + 4x + 1 \\ \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x\right) = 6xy + 4y \end{cases}$$

$$\begin{cases} v(x, y) = 3x^2 y - y^3 + 4xy + y + C(x) \\ 6xy + 4y + C'(x) = 6xy + 4y \end{cases}$$

Da segunda equação conclui-se que $C'(x) = 0$ pelo que $C(x)$ é constante. Como $f(-1) = 0$, tem-se $v(-1, 0) = 0 \Leftrightarrow C(x) = 0$ e portanto

$$f(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + 2x^2 - 2y^2 + x + i(3x^2 y - y^3 + 4xy + y).$$

[0,5 val.] c) Determine $f'$.

**Resolução:** Como $f$ é inteira então é diferenciável em todos os pontos de $\mathbb{C}$ e

$$f'(x + iy) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = (3x^2 - 3y^2 + 4x + 1) + i(6xy + 4y)$$

[1,0 val.] 2. a) Calcule, indicando o resultado em coordenadas cartesianas, o valor do integral

$$\oint_{|z-i|=1/2} \frac{2^{z+1}}{z - i}\, dz,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido inverso e a potência $2^{z+1}$ corresponde ao valor principal do logaritmo.

**Resolução:** Como o valor principal do logarítmo de $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ é dado por:

$$\log z = \log z + i(\arg z), \;\; \arg z \in ]-\pi, \pi],$$

temos que

$$2^{z+1} = e^{\log(2+0i)(z+1)} = 2e^{(\log 2)z}.$$

Como a função $2e^{(\log 2)z}$ é inteira, pela fórmula integral de Cauchy ( e atendendo a que nos é pedido o valor do integral no sentido inverso) temos imediatamente que:

$$\begin{aligned} \oint_{|z-i|=1/2} \frac{2^{z+1}}{z - i}\, dz &= (-2\pi i) 2e^{(\log 2)i} \\ &= (-4\pi i)\left(\cos(\log 2) + i \operatorname{sen}(\log 2)\right) = 4\pi\left(\operatorname{sen}(\log 2) - \cos(\log 2) i\right). \end{aligned}$$

[1,0 val.] b) Determine, justificando, o valor de $\int_\gamma 2^{z+1}\,dz$ onde $\gamma$ é uma curva seccionalmente regular com ponto inicial $z_0 = 1$ e ponto final $z_1 = 2+i$.

**Resolução:** Como a função é holomorfa numa região simplesmente conexa que contêm o caminho em questão pelo T. Fundamental do Cálculo o integral pedido depende apenas dos pontos iniciais e final da curva e o seu valor é igual a $F(2+i) - F(1)$, onde $F$ designa uma primitiva de $f(z) = 2^{z+1} = 2e^{(\log 2)z}$. É imediato que $\frac{1}{\log 2}2e^{(\log 2)z}$ é uma primitiva pelo que

$$\int_1^{2+i} 2^{z+1}\,dz = \frac{2^2}{\log 2}[2e^{(\log 2)i} - 1].$$

[1,0 val.] 3. a) Determine o desenvolvimento em série de Laurent da função definida por

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-1)},$$

válido para $0 < |z-2| < 1$.

**Resolução:** Temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z-2)(z-1)} &= \frac{1}{z-2}\left(\frac{1}{z-1}\right) = \frac{1}{z-2}\left(\frac{1}{1+(z-2)}\right) \\
&= \frac{1}{z-2}\left(\frac{1}{1-(-(z-2))}\right) = \frac{1}{z-2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n(z-2)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^{n-1},
\end{aligned}$$

onde usámos a soma de uma série geométrica com primeiro termo igual a $1$ e razão $z-2$. Como uma série geométrica converge se e só se o módulo da sua razão é inferior a $1$, o desenvolvimento é naturalmente válido para $0 < |z-2| < 1$.

[1,0 val.] b) Considere a função definida por

$$g(z) = \frac{1}{z} + \frac{\operatorname{sen}(z^2)}{z} + \frac{1}{(z^2 - 9/4)^2}.$$

Classifique as singularidades de $g$ e calcule os respectivos resíduos.

Temos que

$$g(z) = \frac{1}{z} + \frac{\operatorname{sen}(z^2)}{z} + \frac{1}{(z^2 - 9/4)^2} = g_1(z) + g_2(z) + g_3(z).$$

As singularidades de $g$ são $z = 0$ (singularidade de $g_1$ e $g_2$) e $z = \pm\frac{3}{2}$ (singularidade de $g_3$). Naturalmente que, como singularidade de $g_1, z = 0$ é um pólo simples. Como singularidade de $g_2$, temos:

$$\frac{\operatorname{sen}(z^2)}{z} = \frac{1}{z}\left(z^2 - \frac{z^6}{3!} + \dots\right),$$

logo $z = 0$ é uma singularidade removível. Em conclusão, como singularidade de $g$, $z = 0$ é um pólo simples com resíduo igual a $1 + 0 = 1$.

Da igualdade $\frac{1}{(z^2-9/4)^2} = \frac{1}{(z-3/2)^2(z+3/2)^2}$, é imediato que

$$\lim_{z\to 3/2}(z-3/2)^2 g_3(z) = \lim_{z\to 3/2}\frac{1}{(z+3/2)^2} = \frac{1}{9},$$

pelo que $z = 3/2$ é um pólo duplo de $g_3$ e portanto de $g$. De igual forma se verifica que $z = -3/2$ é um pólo duplo de $g$.
O resíduo de $g$ em $z = 3/2$ é portanto dado por

$$\lim_{z\to 3/2}\frac{d}{dz}\left((z-3/2)^2 g_3(z)\right) = \lim_{z\to 3/2}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z+3/2)^2}\right) = -\frac{2}{3^3}$$

e o resíduo de $g$ em $z = -3/2$ é dado por:

$$\lim_{z\to -3/2}\frac{d}{dz}\left((z+3/2)^2 g_3(z)\right) = \lim_{z\to -3/2}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(z-3/2)^2}\right) = \frac{2}{3^3}.$$

[1,0 val.] c) Calcule

$$\oint_{|z+3|=3,5}(f(z)+g(z))\,dz,$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido anti-horário.
**Resolução:** Como $f+g$ é analítica em $C$ excepto num número finito de singularidades isoladas, pelo Teorema dos Resíduos, o integral em questão (atendendo ao sentido indicado) é igual a $2\pi i$ a multiplicar pela soma dos resíduos nas singularidades de $f+g$ que estão no interior da circunferência de raio $3,5$ centrada em $z_0 = -3$. Relativamente às singularidades de $g$, $z = 0$ e $z = -3/2$ estão claramente no interior da curva e $z = 3/2$ está no exterior da curva. Quanto às singularidades de $f$, estão ambas no exterior da curva. De facto, a distância de $z = 1$ a $z = -3$ é $4$ e claramente $4 > 3,5$. Para $z = 2$ temos $5 > 3,5$.
Em conclusão,

$$\oint_{|z+3|=3,5}(f(z)+g(z))\,dz = 2\pi i\left(\text{Res}\,(f,0) + \text{Res}\,(f,-3/2)\right) = 2\pi i\left(1+\frac{2}{3^3}\right).$$

[1,0 val.] 4. a) Aplicando o teorema dos resíduos calcule

$$\oint_{|z|=1}\frac{1}{(z+2)(z+\frac{1}{2})}\,dz$$

onde a curva é percorrida uma vez no sentido directo.
**Resolução:** As singularidades de $f(z) = \frac{1}{(z+2)(z+\frac{1}{2})}$ são $-2$ e $-\frac{1}{2}$. Dado que $|-2| = 2 > 1$ e $|-\frac{1}{2}| = \frac{1}{2} < 1$, apenas a singularidade $-\frac{1}{2}$ pertence ao interior da curva $|z| = 1$. Dado que

$$\lim_{z\to -\frac{1}{2}}(z+\tfrac{1}{2})f(z) = \lim_{z\to -\frac{1}{2}}\frac{1}{z+2} = \frac{2}{3},$$

concluimos que $-\frac{1}{2}$ é um pólo simples de $f$ com resíduo

$$\text{Res}\left(f,-\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}.$$

Logo, aplicando o teorema dos resíduos e atendendo à orientação da curva,

$$\oint_{|z|=1} f(z)\,dz = 2\pi i\,\text{Res}\left(f,-\frac{1}{2}\right) = \frac{4\pi i}{3}.$$

[1,0 val.] b) Calcule o integral real

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\cos\theta}\, d\theta$$

(Sugestão: Use o resultado da alínea anterior)

**Resolução:** Relacionemos o integral real dado com um integral de uma função complexa sobre o caminho $z(\theta) = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi]$, e usemos o resultado da alínea anterior:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5+4\cos\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+2(e^{i\theta}+e^{-i\theta})}\, d\theta = \oint_{|z|=1} \frac{1}{5+2(z+\frac{1}{z})} \frac{dz}{iz}$$

$$= \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{2z^2+5z+2}\, dz = \frac{1}{2i} \oint_{|z|=1} \frac{1}{(z+2)(z+\frac{1}{2})}\, dz = \frac{1}{2i}\frac{4\pi i}{3} = \frac{2\pi}{3}\,.$$

[1,0 val.] 5. Mostre que uma função diferenciável em $0$ que satisfaça $|f^{(n+1)}(0)| > n|f^{(n)}(0)|$, para todo $n$ suficientemente grande, não pode ser holomorfa em nenhum disco $D_R = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < R\}$ com $R > 1$.

**Resolução:** Suponhamos, por absurdo, que $f$ é holomorfa num disco $D_R = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < R\}$ com $R > 1$. Então existem as derivadas de todas as ordens $f^{(n)}(0)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ e, pelo teorema de Taylor, $f$ admite o desenvolvimento em série de potências

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

onde $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, a qual é convergente, qualquer que seja $z \in D_R$. Por outro lado, de acordo com a hipótese, $|f^{(n+1)}(0)| > n|f^{(n)}(0)|$, para $n$ suficientemente grande, e portanto, para $n$ suficientemente grande temos $f^{(n)}(0) \neq 0$, e além disso,

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \left|\frac{\frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!}}{\frac{f^{(n)}(0)}{n!}}\right| |z| \geq \frac{n}{n+1}|z| \to |z|, \text{ quando } n \to \infty\,.$$

Em particular, se $1 < |z| < R$, para $n$ suficientemente grande temos $|a_{n+1}z^{n+1}| > |a_n z^n|$, e portanto a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ é divergente devido ao seu termo geral não tender para zero, o que contradiz a afirmação de que a série é convergente se $z \in D_R$.