INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Análise Complexa e Equações Diferenciais

$2^{\underline{o}}$ Semestre 2011/2012

Testes de Recuperação/Exame

Versão A

23 de Junho de 2012

LEIC-A, LEGM, LEMat, MEAmbi, MEBiol, MEC, MEQ, MEMec, LEAN, MEAer

INSTRUÇÕES

- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta, incluindo máquinas de calcular.
- Apresente todos os cálculos e justificações relevantes.
- Numere todas as páginas do caderno de respostas e indique na coluna correspondente as páginas onde as questões estão respondidas.

  A classificação do seu Teste/Exame será feita de acordo com a coluna que preencher.
- **Duração do teste: 1 hora e 30 minutos**.
  Duração do exame: 3 horas.

Pergunta	pág. 1ºTESTE	pág. 2º TESTE	pág. EXAME	cotação	classificação
1				3,5	
2				1,5	
3				2,5	
4				1,5	
5				1,0	
6				3,0	
7				2,5	
8				1,5	
9				2,5	
10				1,0	
Total				10+10	

Nome: ______________________________

Nº: ____________________ **Sala:** ____________________

Curso: ____________________ **Rúbrica (DOCENTE):**

1^{o} Teste / Exame (1^{a} parte)

1. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por
$$u(x, y) = x^2 - y^2 + h(x),$$
onde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$.

[0,5 val.] (a) Mostre que u é harmónica se e só se h é linear, isto é se $h(x) = ax + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$.

[1,0 val.] (b) Considerando $h(x) = 2x$ calcule uma função inteira f tal que $u = \operatorname{Re} f$ e $f(-2) = 0$.

[1,0 val.] (c) Calcule
$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-i)^2}\, dz$$
onde C é a circunferência de raio 2 centrada na origem percorrida no sentido positivo.

[1,0 val.] (d) Considere o caminho $\gamma(t) = 4 - 3e^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Calcule $\displaystyle\int_\gamma \log(z)\, dz$.

[1,5 val.] 2. Determine a série de Laurent de
$$f(z) = \frac{1}{z(z-2i)}$$
válida na região $|z - i| > 1$.

3. Considere a função complexa de variável complexa g definida no seu domínio por
$$g(z) = \operatorname{sen}\left(\frac{2}{z+i}\right) + \frac{1 - e^{2z}}{z^2} + \frac{2i}{1+z^2}$$

[1,5 val.] (a) Determine e classifique todas as singularidades de g, calculando os respectivos resíduos.

[1,0 val.] (b) Calcule o integral $\oint_C g(z)dz$ onde C é o triângulo de vértices em 1, $-1+i$ e $-1-i$, percorrido uma vez no sentido positivo.

[1,5 val.] 4. Use o teorema dos resíduos para calcular o integral real
$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 + \operatorname{sen}^2\theta} \,.$$

[1,0 val.] 5. Considere uma função inteira F definida por
$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$
Mostre que
$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(e^{i\theta})e^{-i\theta n} d\theta, \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots.$$

$2^{\underline{o}}$ Teste / Exame ($2^{\underline{a}}$ parte)

[1,5 val.] 6. (a) Determine a solução geral da equação diferencial

$$y' = -\frac{y}{t} + 2e^{-t^2}.$$

[1,5 val.] (b) Considere o problema de valor inicial

$$x + 2t + (x+t)\,\frac{dx}{dt} = 0, \qquad x(0) = 1.$$

Determine a solução do problema na forma explícita e indique o seu intervalo máximo de existência.

7. Considere

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad\qquad \mathbf{h}(t) = e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

[1,0 val.] (a) Calcule a solução geral de $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

[1,5 val.] (b) Calcule a solução do problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{h}(t), \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

[1,5 val.] 8. Resolva o seguinte problema de valor inicial

$$y'' + 4y = e^t + \cos(2t), \qquad y(0) = y'(0) = 0\,.$$

[1,0 val.] 9. (a) Calcule a série de Fourier de senos da função $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x$. Qual é a soma da série para cada $x \in [0,\pi]$? Sugestão: para calcular os coeficientes da série pode ser útil considerar um integral de uma função complexa.

[1,0 val.] (b) Determine a solução do problema, para $x \in [0,\pi],\ t > 0$:

$$u_t = 4u_{xx} + u, \quad \begin{cases} u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & t > 0, \\ \\ u(x,0) = f(x). \end{cases}$$

[1,0 val.] 10. Sendo $y_0 \in \mathbb{R}^+$, considere o problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{y^2}{1 + \operatorname{sen}^2(t+y)} \\ \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

Mostre que o problema tem solução única, $y(t)$, tal que $y(t) > 0$ em todo o seu intervalo máximo de existência e calcule $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$.