

A Linguagem Secreta do Universo

José Natário

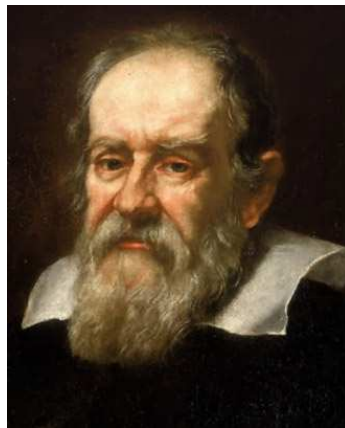
(Instituto Superior Técnico)

Fundação Calouste Gulbenkian

Outubro de 2012

Galileu Galilei (1564–1642)

“A Filosofia [Ciência] está escrita neste grande livro, o Universo, que está permanentemente aberto e ao alcance do nosso olhar. Mas o livro não pode ser compreendido sem antes aprendermos a linguagem e os caracteres em que está escrito. A linguagem é a Matemática, e os caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem as quais é humanamente impossível compreender uma única palavra.”





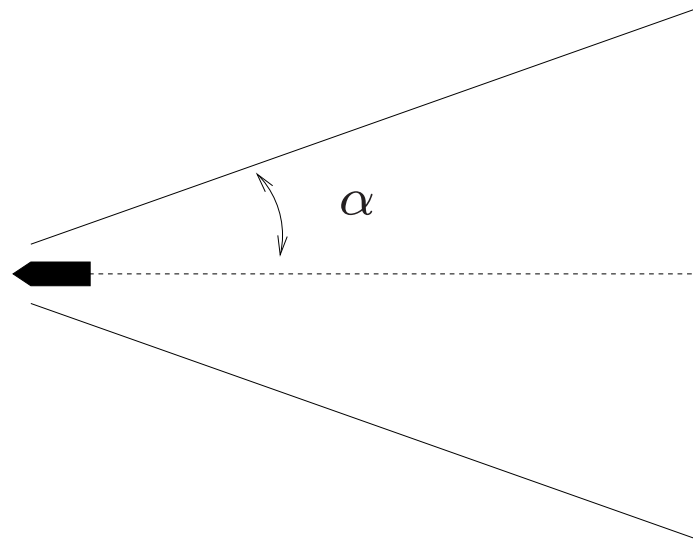
Manneken Pis (Bruxelas).



© 2011 William Lowan



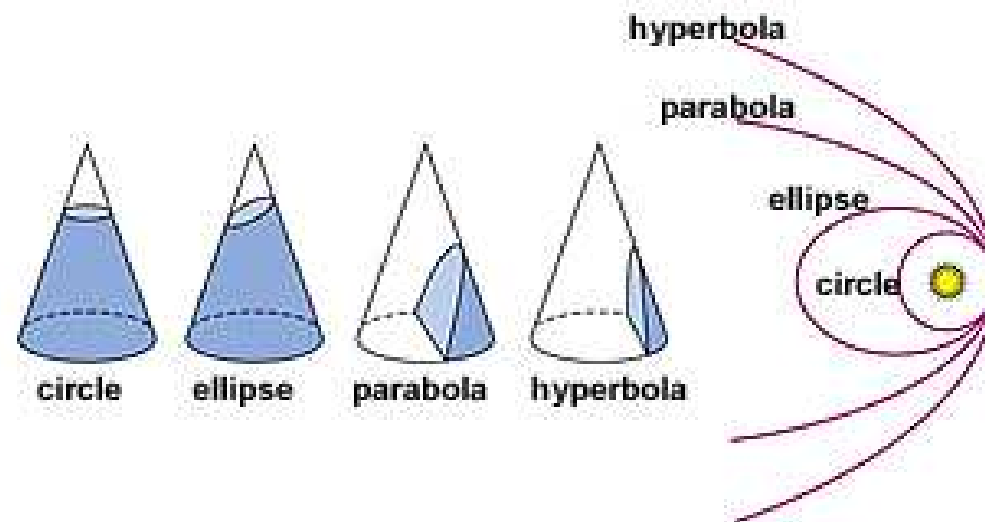
Teorema de Kelvin (1824–1907)



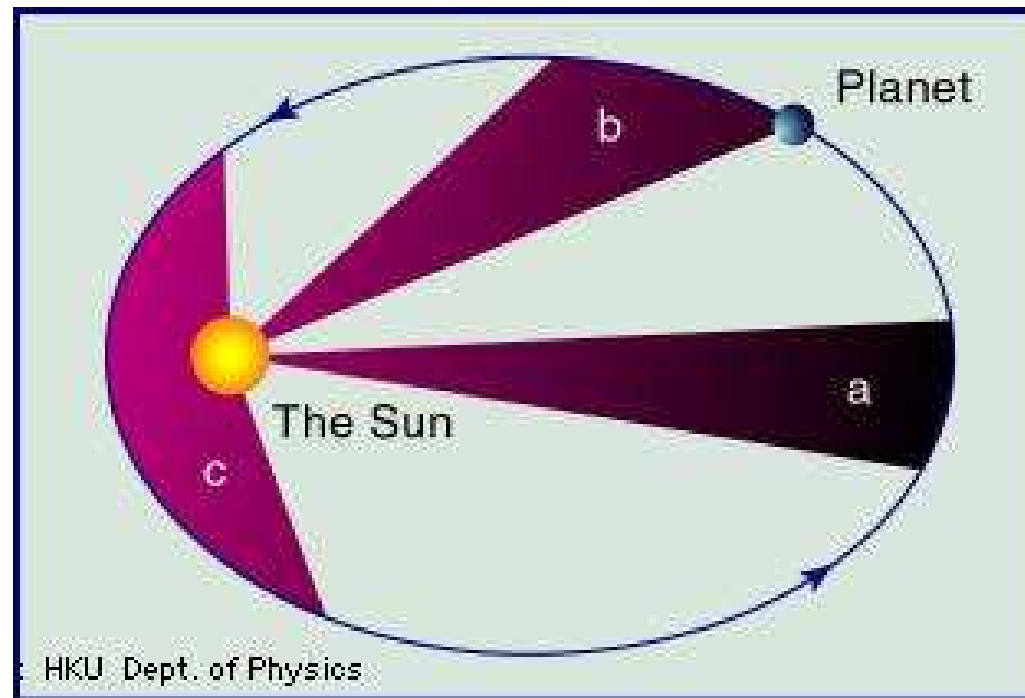
$$\sin \alpha = \frac{1}{3} \text{ (portanto } \alpha \simeq 19,5^\circ \text{).}$$

Leis de Kepler (1571–1630)

1. As órbitas dos corpos celestes são secções cónicas com o Sol num dos focos.

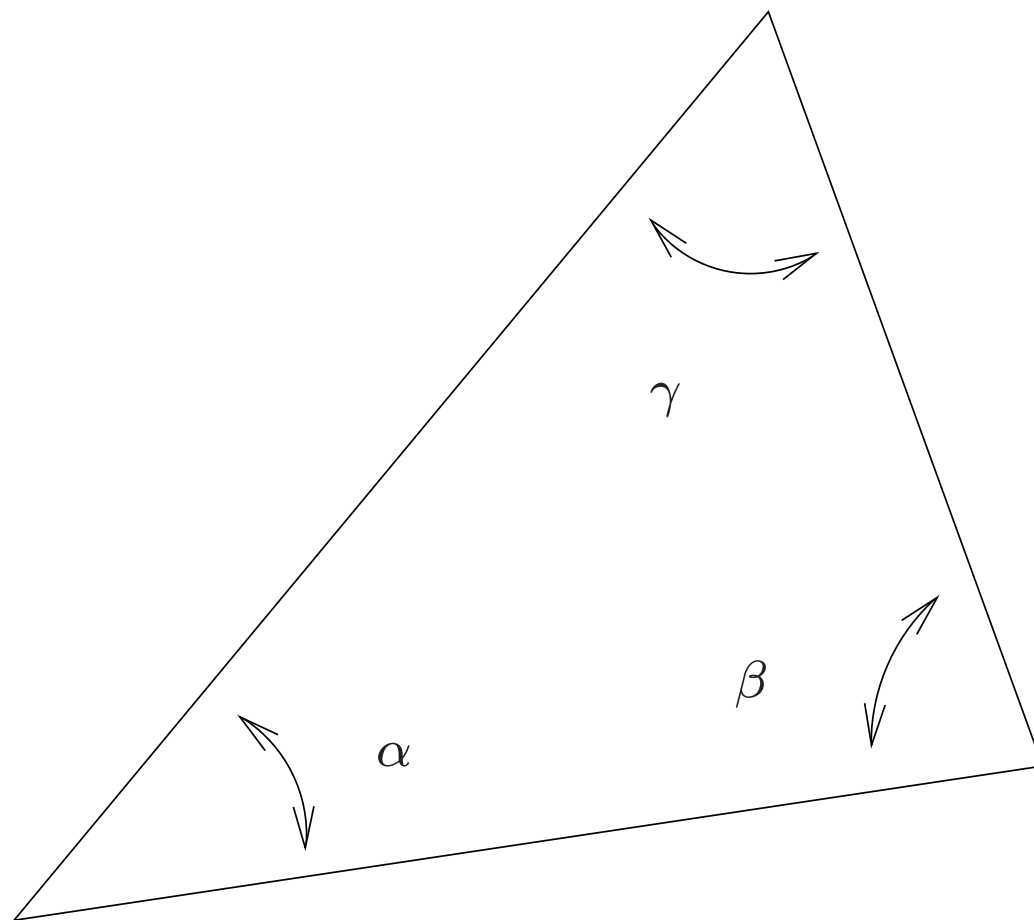


2. O segmento de recta que une o corpo ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.



Geometria de Euclides (séc IV–III a.C.)

- Duas rectas distintas intersectam-se no máximo uma vez.
- Existem rectas que não se intersectam (paralelas).
- Os ângulos internos de um triângulo somam 180° .

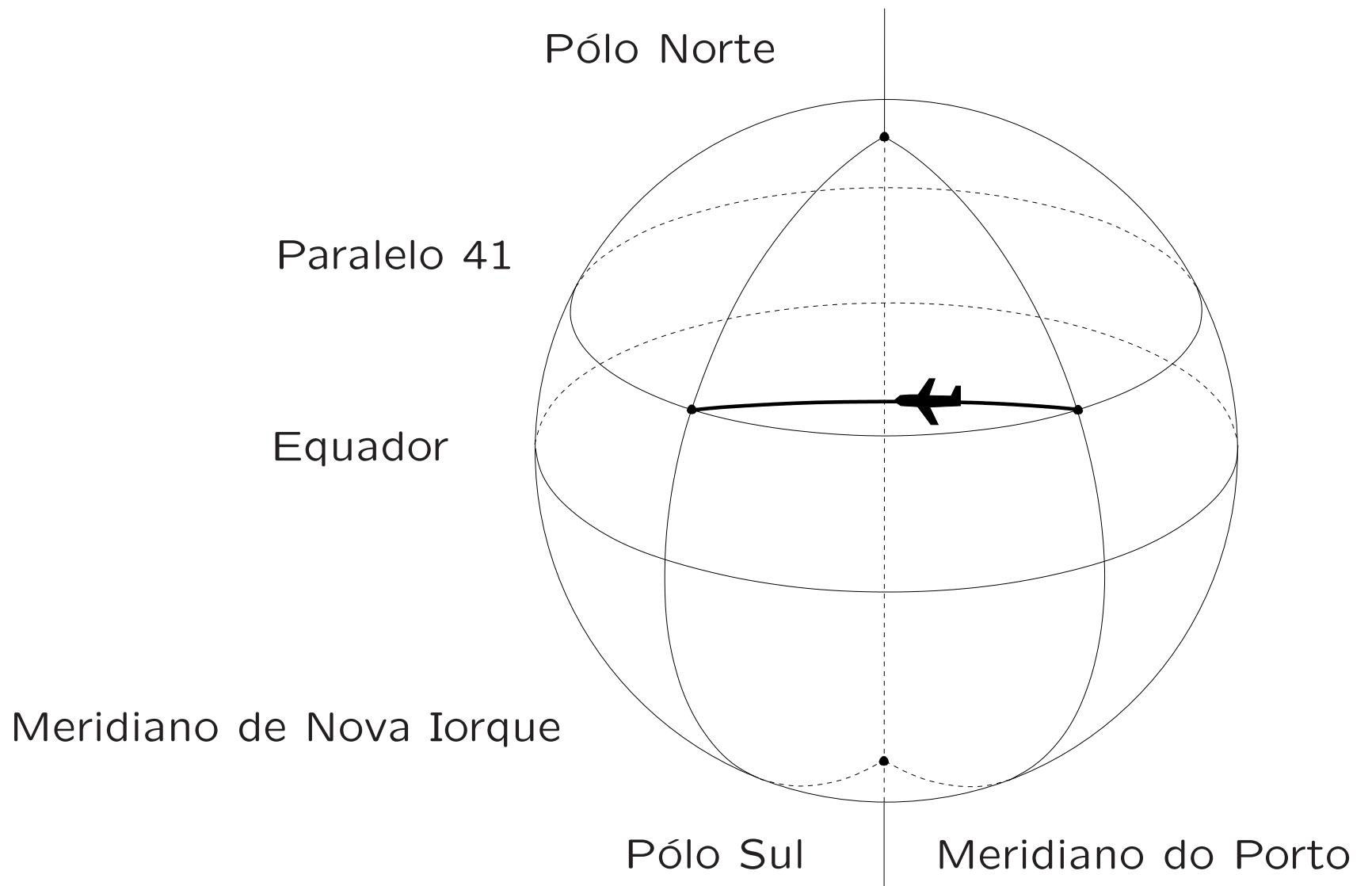


$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

Geometria de Riemann (1826–1866)

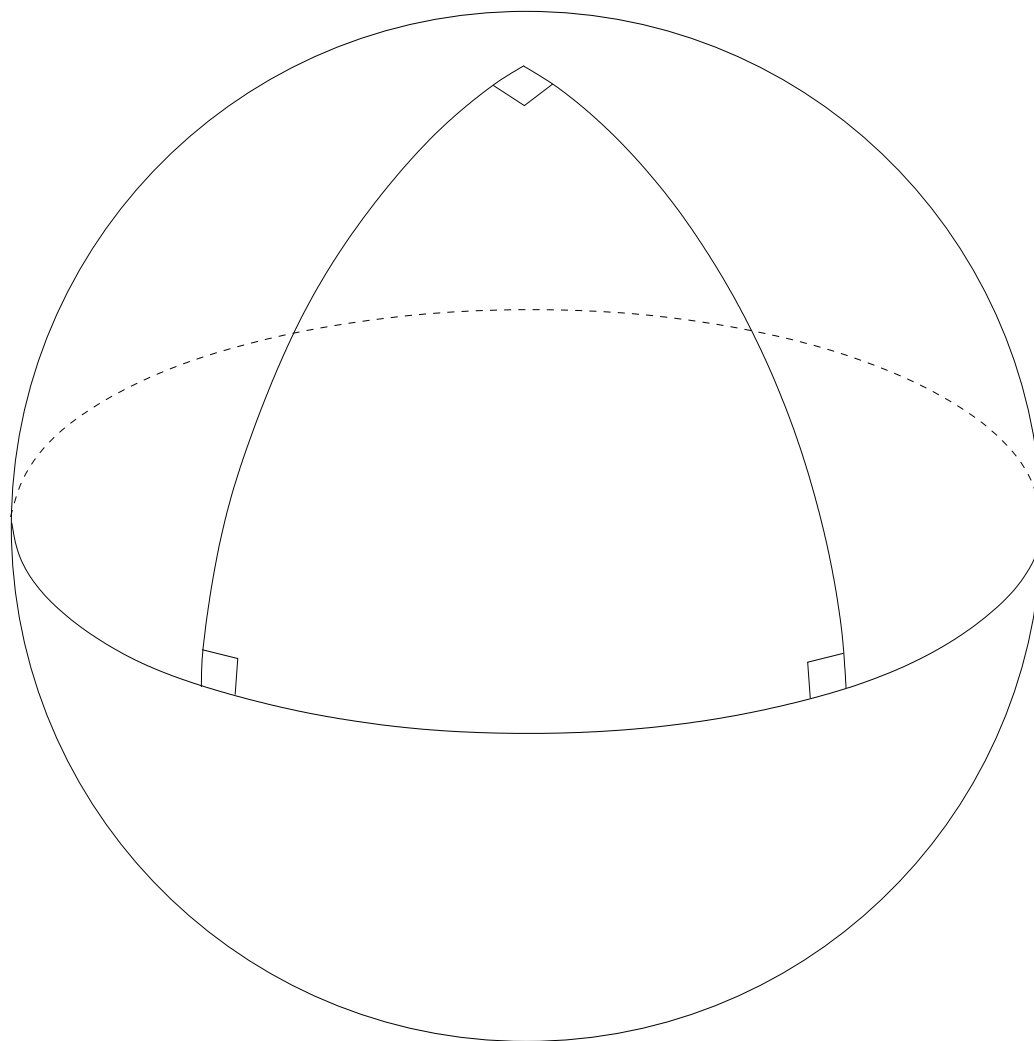
É a geometria das superfícies (espaços) curvos. Em vez de rectas temos **geodésicas** (curvas de comprimento mínimo).

Na esfera, por exemplo, as geodésicas são os círculos máximos, como o equador ou os meridianos. É por isso que para ir do Porto para Nova Iorque, o avião não voa para oeste.



Geometria da esfera

- Duas geodésicas distintas intersectam-se sempre em dois pontos (não existem paralelas).
- Os ângulos internos de um triângulo somam mais de 180° .

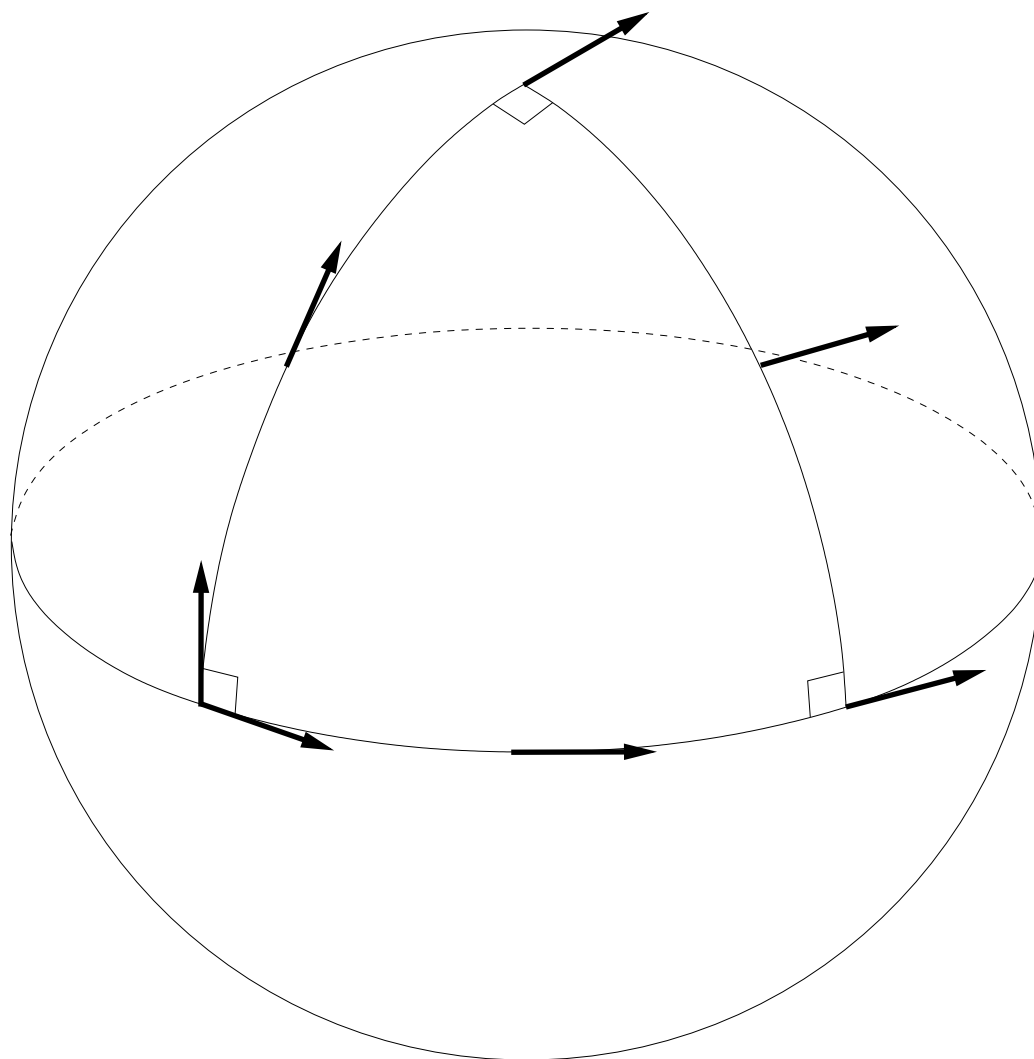


- Curvatura média = $\frac{\hat{\text{Ângulo em excesso}}}{\text{Área do triângulo}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{4\pi R^2}{8}} = \frac{1}{R^2}.$

- Na esfera, todos os triângulos possuem mesma curvatura média (superfície de curvatura constante). Em geral, a curvatura de uma superfície num ponto é o limite da curvatura média de triângulos cada vez mais pequenos.

Transporte paralelo

Um vector tangente que é transportado paralelamente ao longo de uma curva fechada regressa ao ponto inicial rodado de um ângulo igual ao excesso.

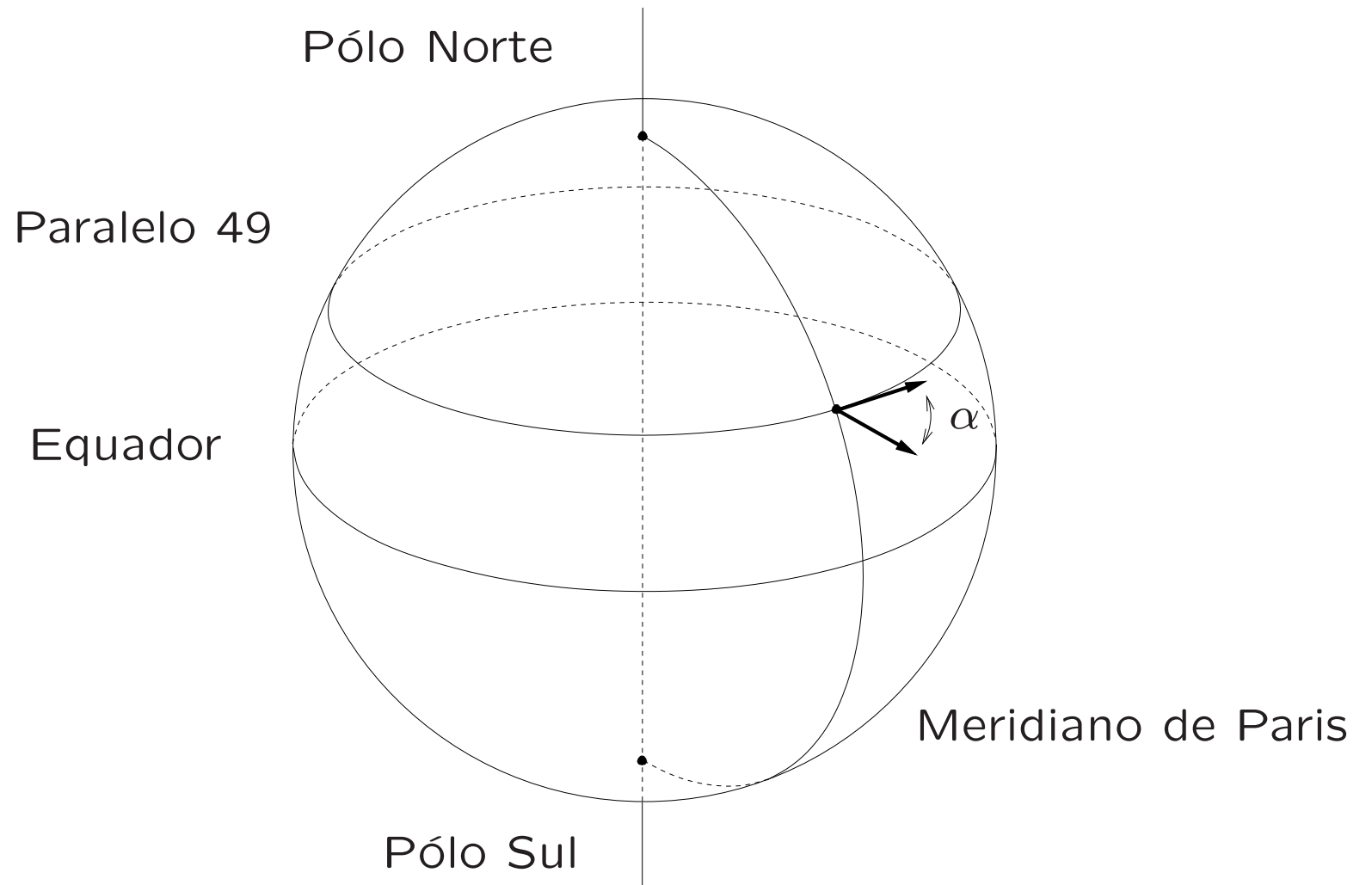


É o que acontece com o pêndulo de Foucault:





Pêndulo de Foucault do Panteão de Paris.



À latitude λ , o pêndulo de Foucault roda

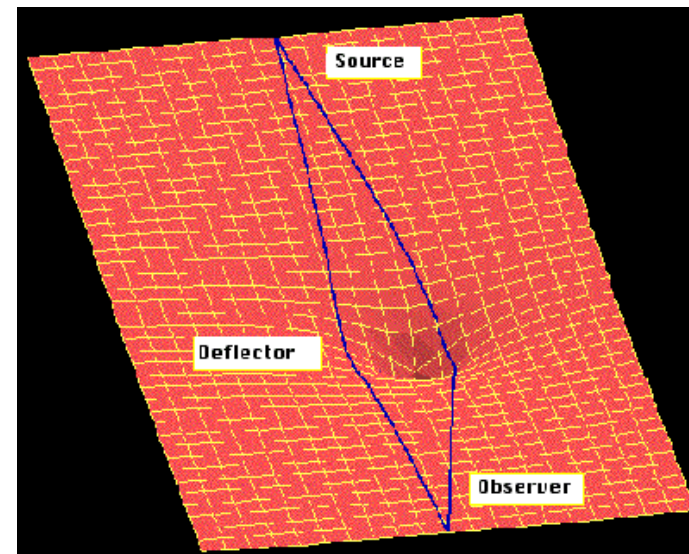
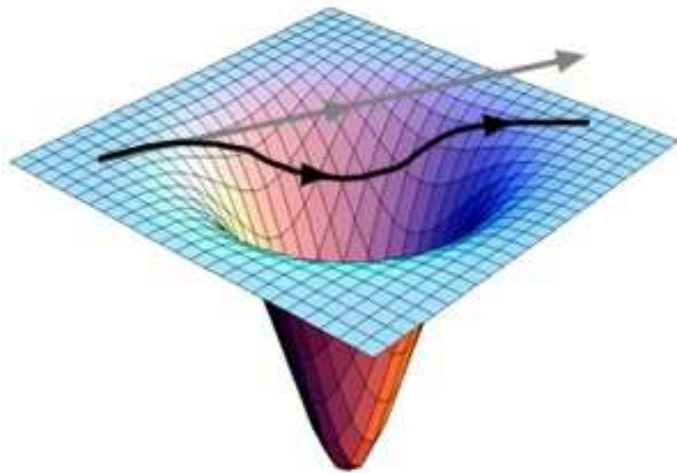
$$\alpha = 2\pi - \overbrace{2\pi R(R - R \sin \lambda)}^{\text{excesso}} \underbrace{\frac{1}{R^2}}_{\text{curvatura}} = 2\pi \sin \lambda$$

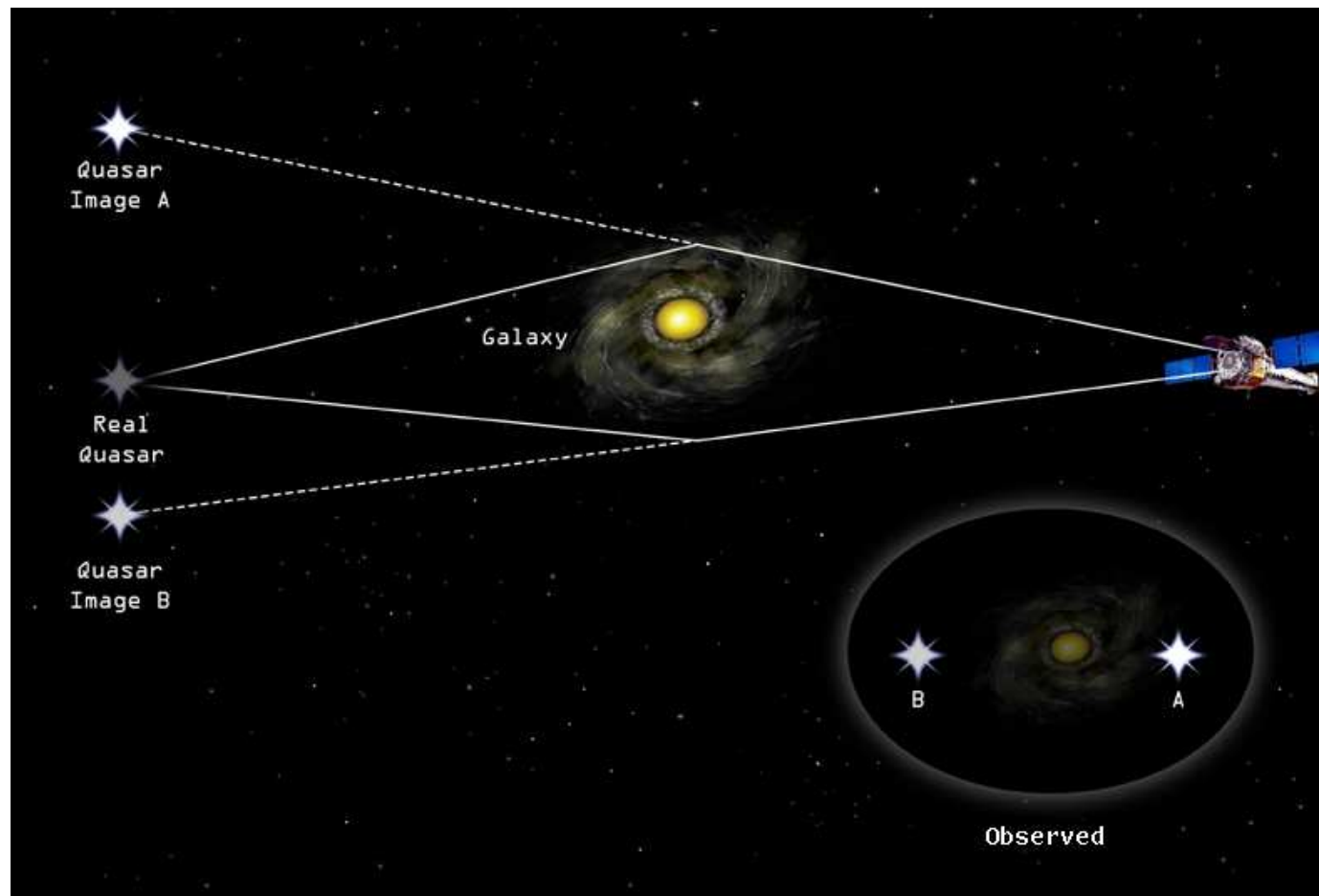
radianos por dia.

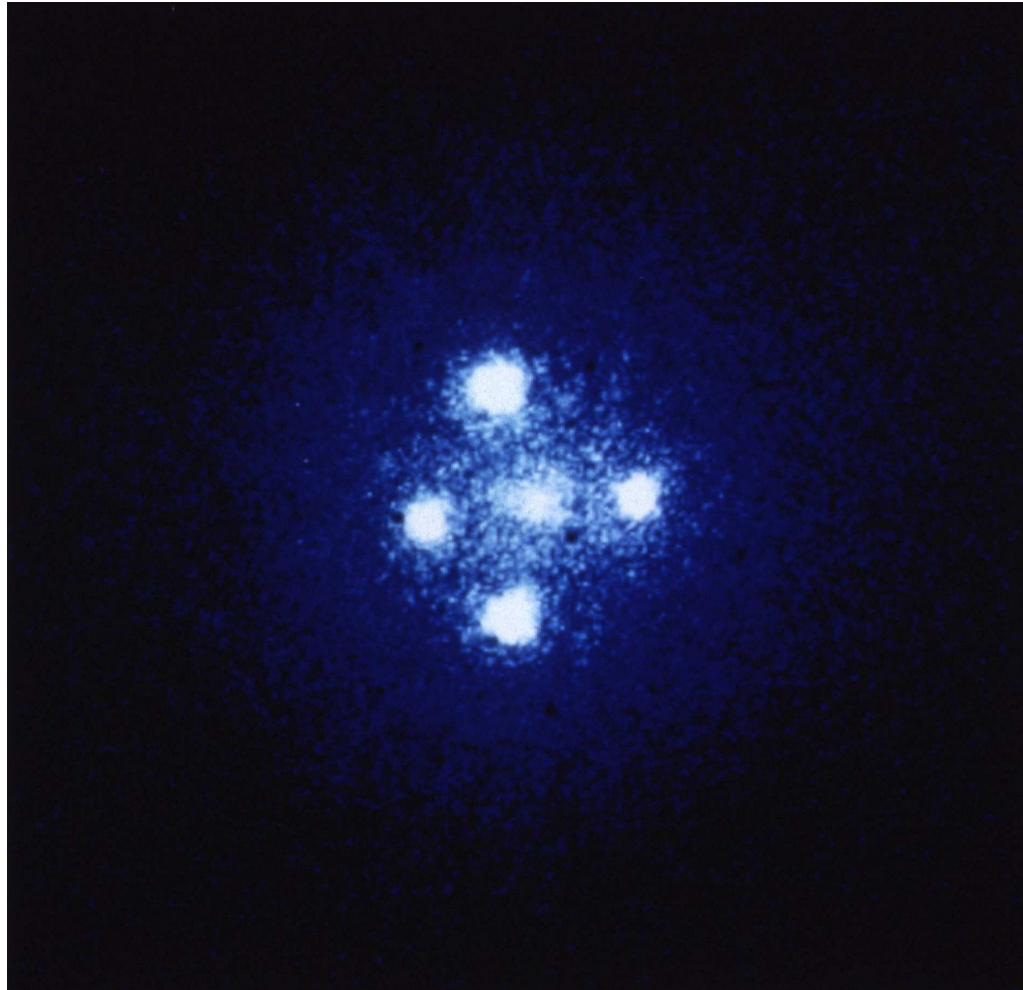
Einstein (1879–1955)

O espaço(-tempo) é curvo e os raios luminosos seguem geodésicas.

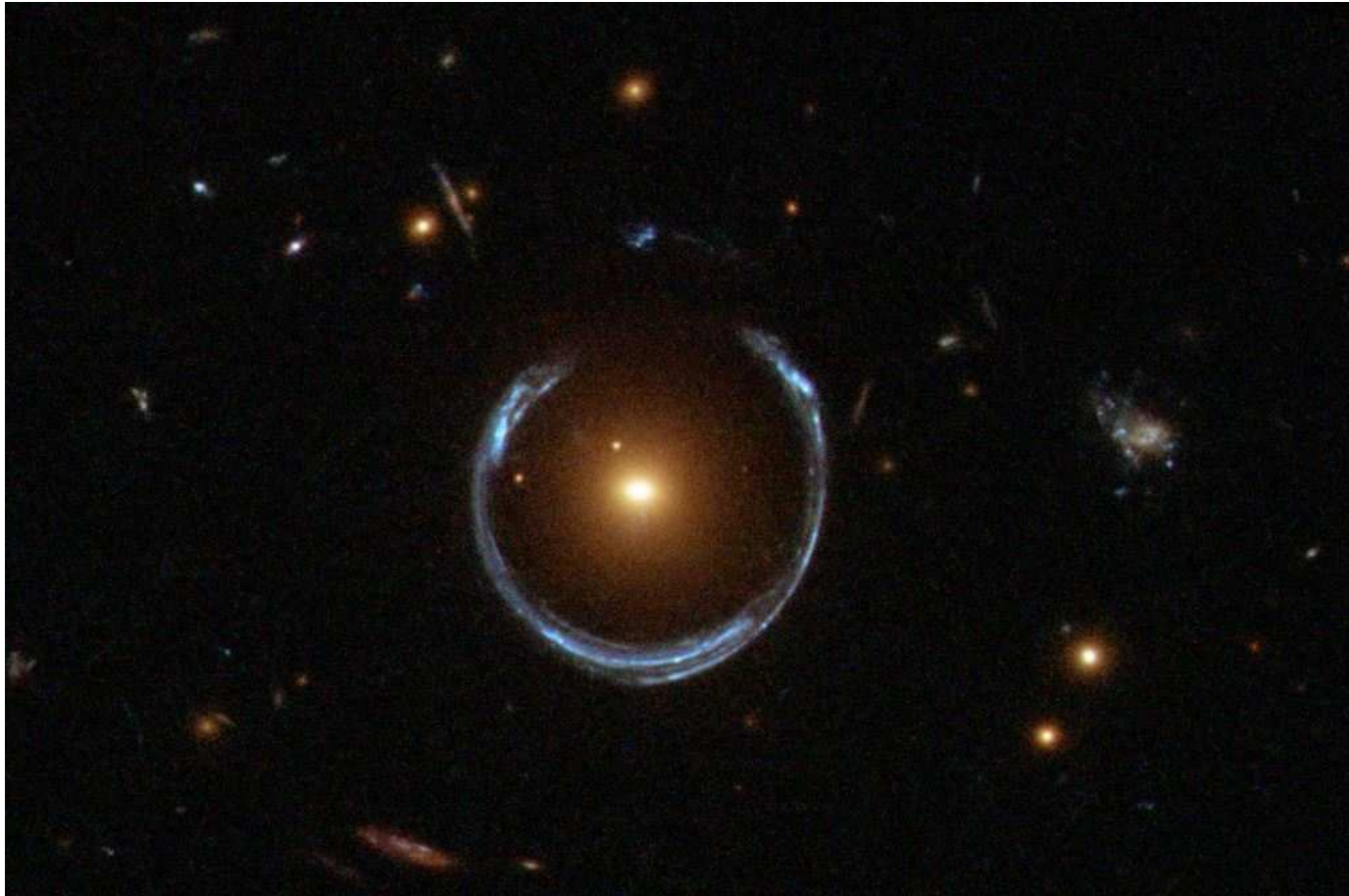
Uma consequência é o efeito de lente gravitacional, que origina imagens múltiplas de objectos astronômicos.







Cruz de Einstein.



Anel de Einstein.

Wir untersuchen ferner den Gang der Lichtstrahlen im statischen Gravitationsfeld. Gemäß der speziellen Relativitätstheorie ist die Lichtgeschwindigkeit durch die Gleichung

$$-dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2 + dx_4^2 = 0$$

gegeben, also gemäß der allgemeinen Relativitätstheorie durch die Gleichung

$$(73) \quad ds^2 = g_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu = 0.$$

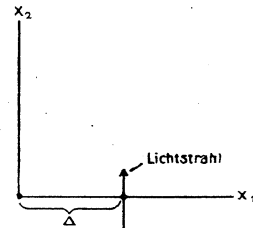
Ist die Richtung, d. h. das Verhältnis $dx_1:dx_2:dx_3$ gegeben, so liefert die Gleichung (73) die Größen

$$\frac{dx_1}{dx_4}, \quad \frac{dx_2}{dx_4}, \quad \frac{dx_3}{dx_4}$$

und somit die Geschwindigkeit

$$\sqrt{\left(\frac{dx_1}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dx_4}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx_4}\right)^2} = \gamma,$$

im Sinne der Euklidischen Geometrie definiert. Man erkennt leicht, daß die Lichtstrahlen gekrümmt verlaufen müssen mit Bezug auf das Koordinatensystem, falls die $g_{\mu\nu}$ nicht konstant sind. Ist n eine Richtung senkrecht zur Lichtfortpflanzung, so ergibt das Huggenssche Prinzip, daß der Lichtstrahl [in der Ebene (γ, n) betrachtet] die Krümmung $-\partial\gamma/\partial n$ besitzt.



Wir untersuchen die Krümmung, welche ein Lichtstrahl erleidet, der im Abstand Δ an einer Masse M vorbeigeht. Wählt man das Koordinatensystem gemäß der vorstehenden Skizze, so ist die gesamte Biegung B des Lichtstrahles (positiv gerechnet, wenn sie nach dem Ursprung hin konkav ist) in genügender Näherung gegeben durch

$$B = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} dx_2,$$

822 A. Einstein. Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie.

während (73) und (70) ergeben

$$\gamma = \sqrt{-\frac{g_{44}}{g_{22}}} = 1 + \frac{\alpha}{2r} \left(1 + \frac{x_2^2}{r^2}\right).$$

Die Ausrechnung ergibt

$$(74) \quad B = \frac{2\alpha}{\Delta} = \frac{2M}{4\pi\Delta}.$$

Ein an der Sonne vorbeigehender Lichtstrahl erfährt demnach eine Biegung von $1,7''$, ein am Planeten Jupiter vorbeigehender eine solche von etwa $0,02''$.

Berechnet man das Gravitationsfeld um eine Größenordnung genauer, und ebenso mit entsprechender Genauigkeit die Bahnbewegung eines materiellen Punktes von relativ unendlich kleiner Masse, so erhält man gegenüber den Kepler-Newtonschen Gesetzen der Planetenbewegung eine Abweichung von folgender Art. Die Bahnellipse eines Planeten erfährt in Richtung der Bahnbewegung eine langsame Drehung vom Betrage

$$(75) \quad \varepsilon = 24\pi^2 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)}$$

pro Umlauf. In dieser Formel bedeutet a die große Halbachse, c die Lichtgeschwindigkeit in üblichem Maße, e die Exzentrizität, T die Umlaufszeit in Sekunden.¹⁾

Die Rechnung ergibt für den Planeten Merkur eine Drehung der Bahn um $43''$ pro Jahrhundert, genau entsprechend der Konstatierung der Astronomen (Leverrier); diese fanden nämlich einen durch Störungen der übrigen Planeten nicht erklärbaren Rest der Perihelbewegung dieses Planeten von der angegebenen Größe.

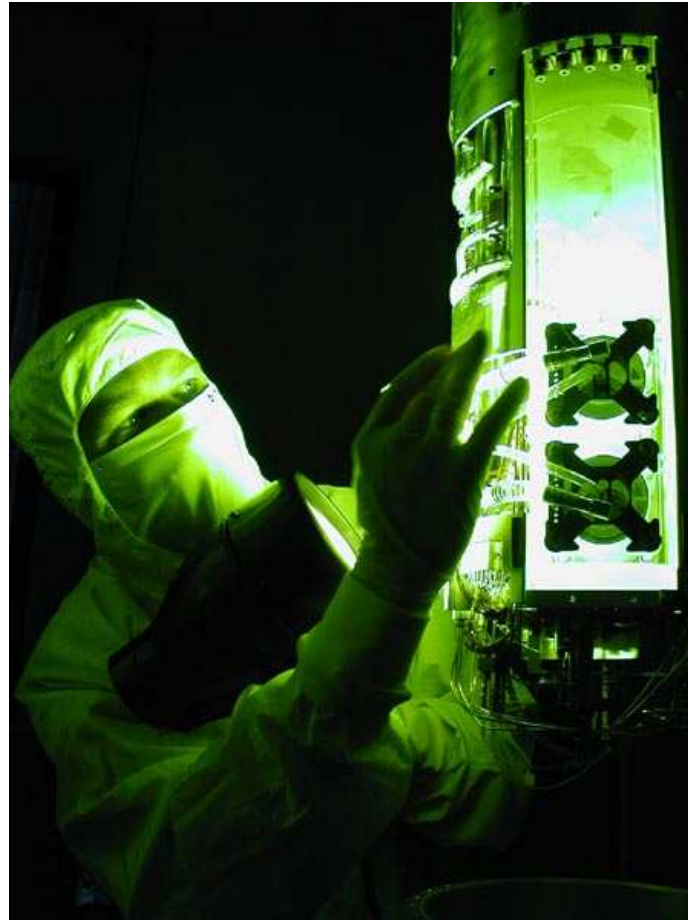
1) Bezüglich der Rechnung verweise ich auf die Originalabhandlungen A. Einstein, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 47. p. 831. 1915. — K. Schwarzschild, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wiss. 7. p. 189. 1916.

(Eingegangen 20. März 1916.)

Gravity Probe B (lançada em 2004)



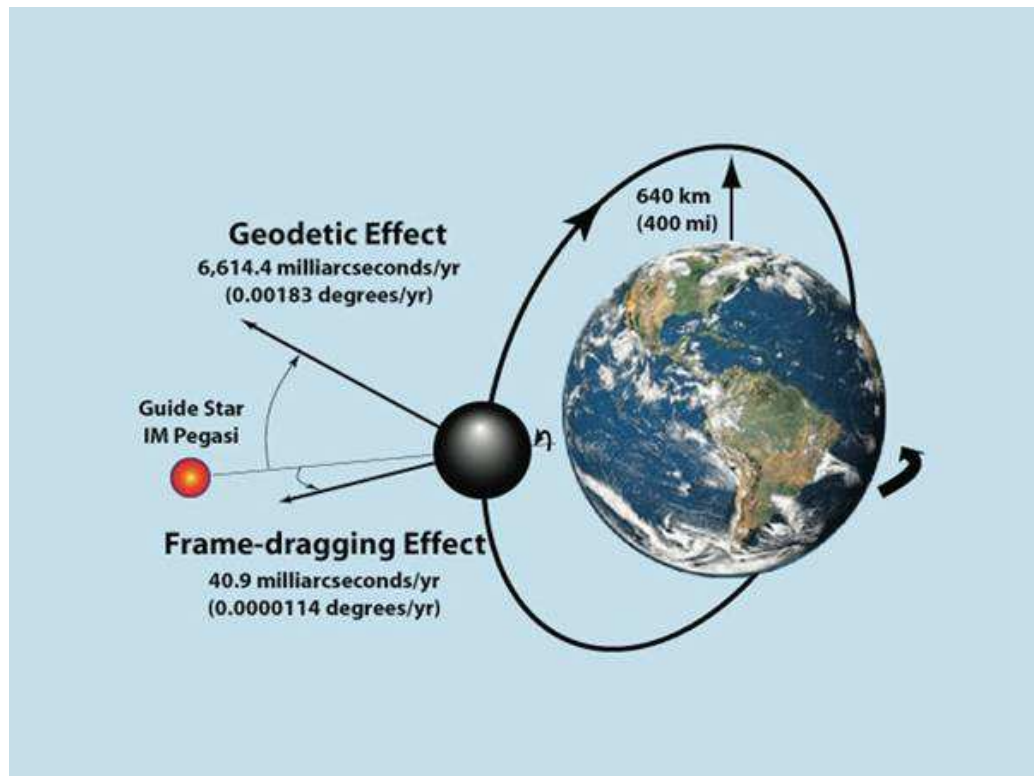
As esferas mais esféricas do mundo...



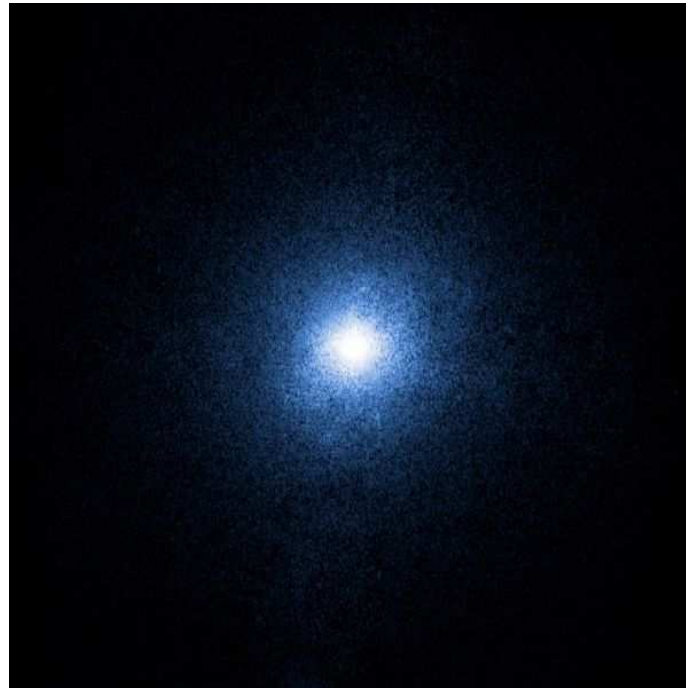
...arrefecidas abaixo de -271°C ...



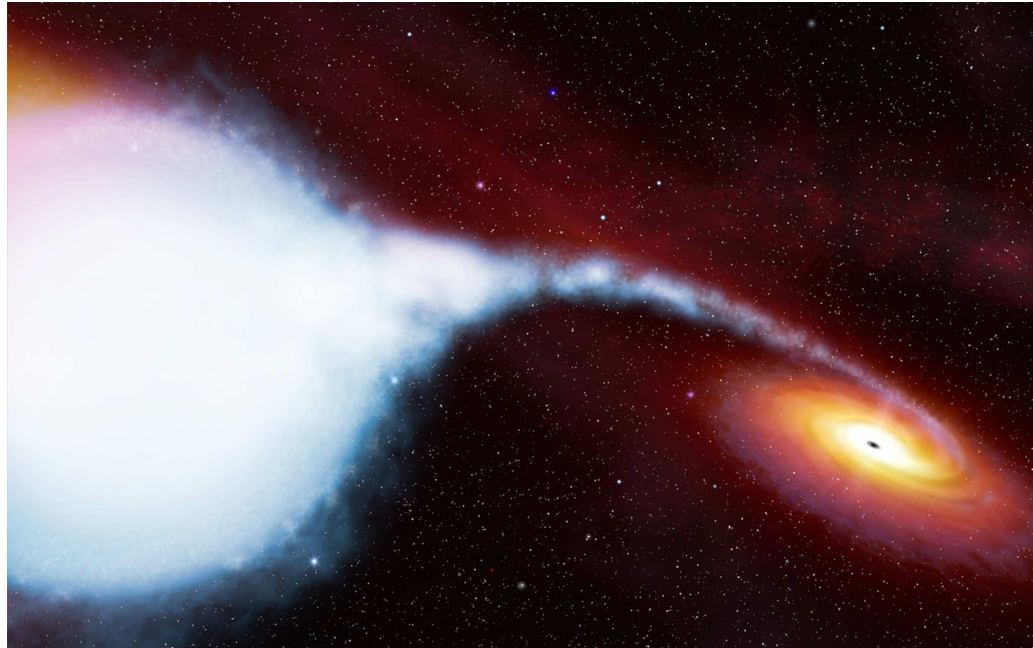
...foram colocadas a rodar em órbita.



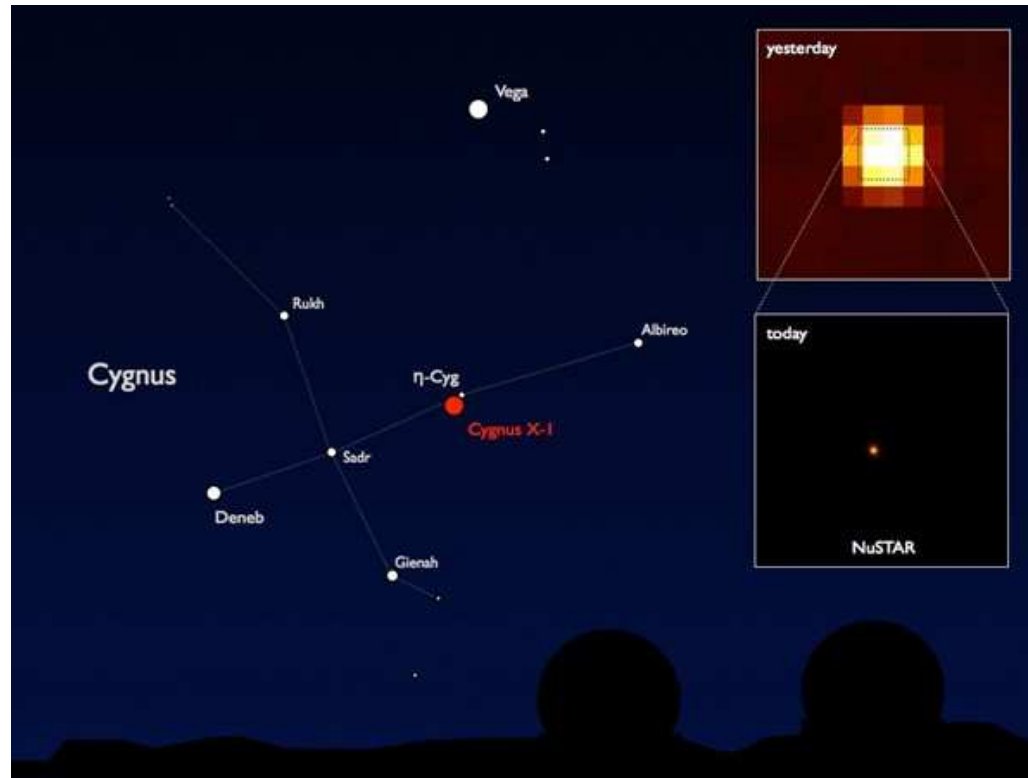
Buracos negros



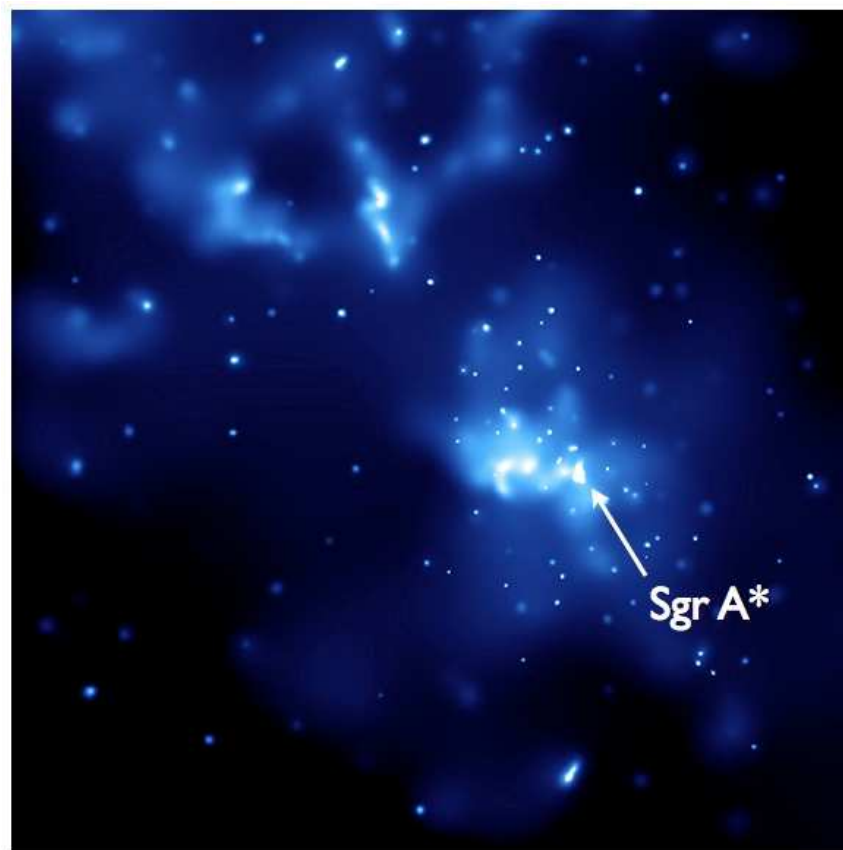
Cygnus X-1 (imagem de raios-X do telescópio Chandra).



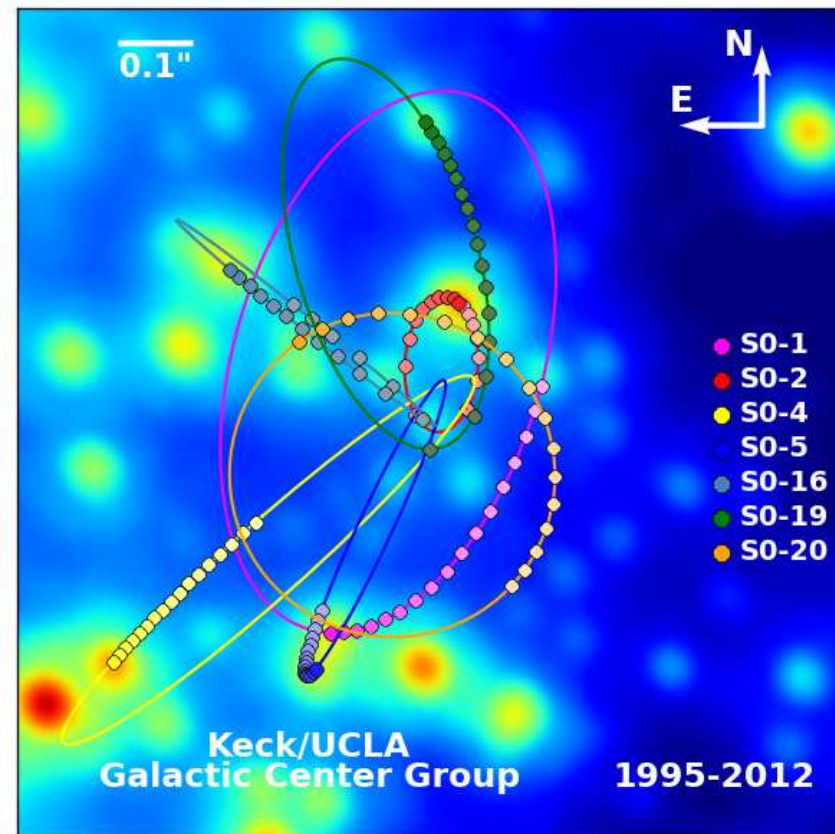
Representação artística de Cygnus X-1.



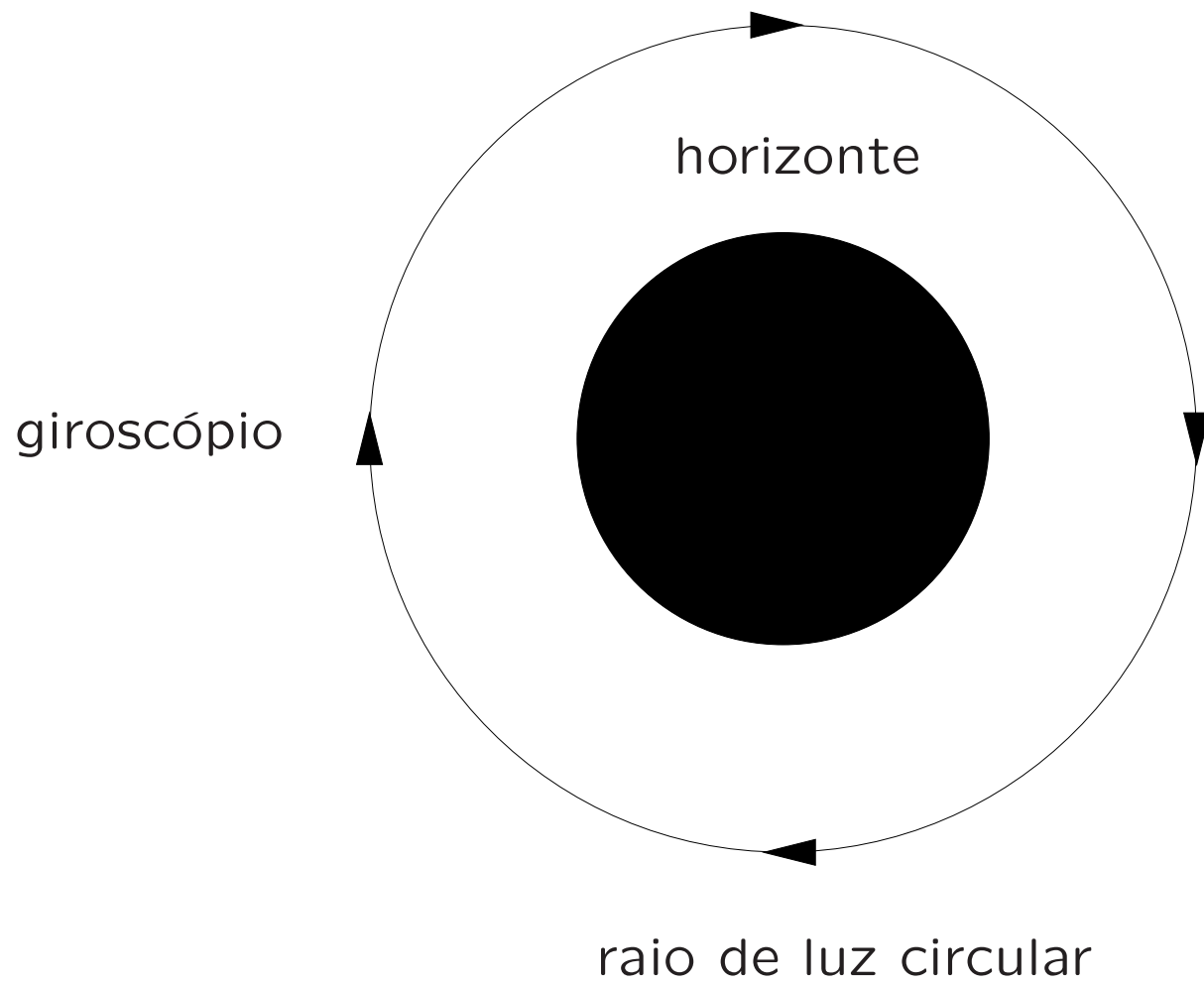
Posição no céu de Cygnus X-1.

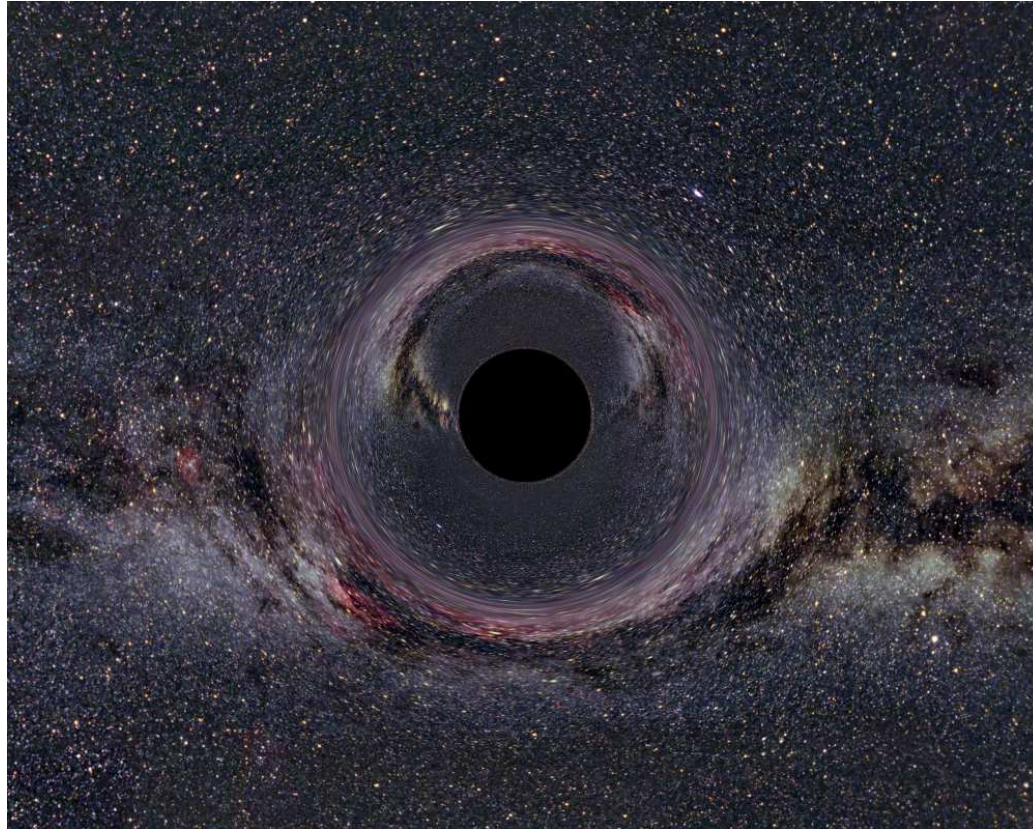


Sagittarius A* (imagem de raios-X do telescópio Chandra).

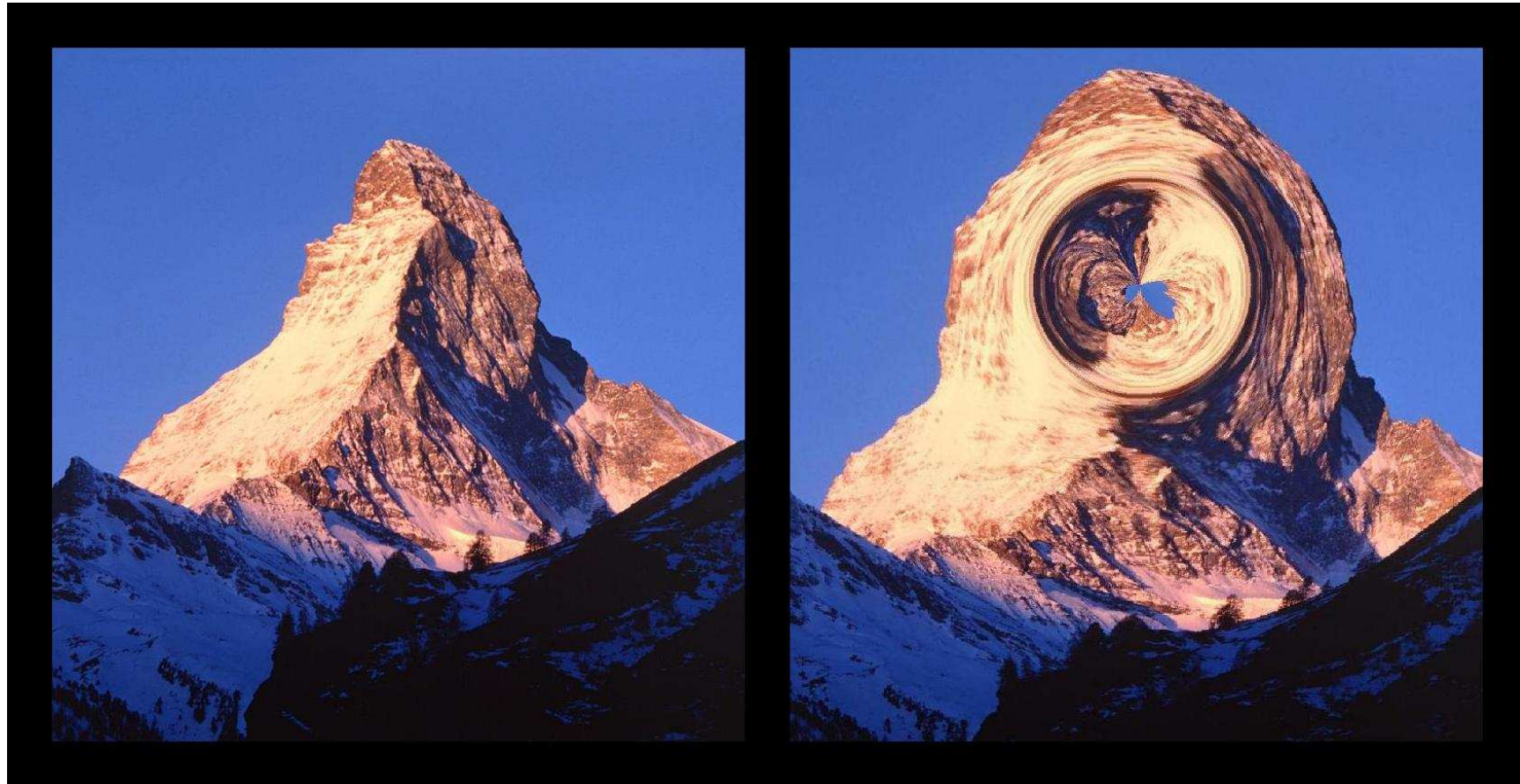


Órbitas estelares em torno de Sagittarius A* (1995-2012).





Buraco negro a 600 quilómetros...



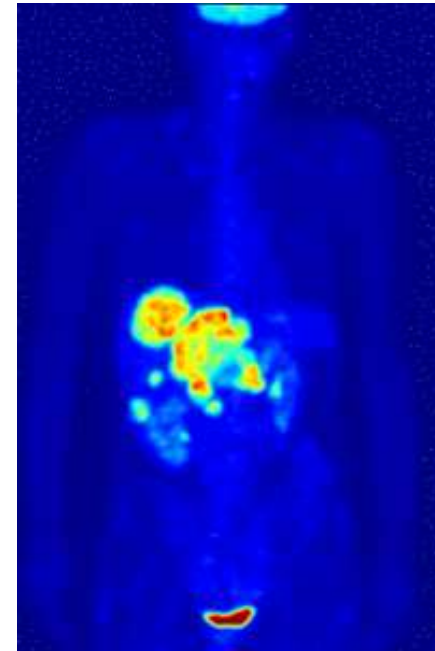
...e a 600 metros.

Teorias de Gauge

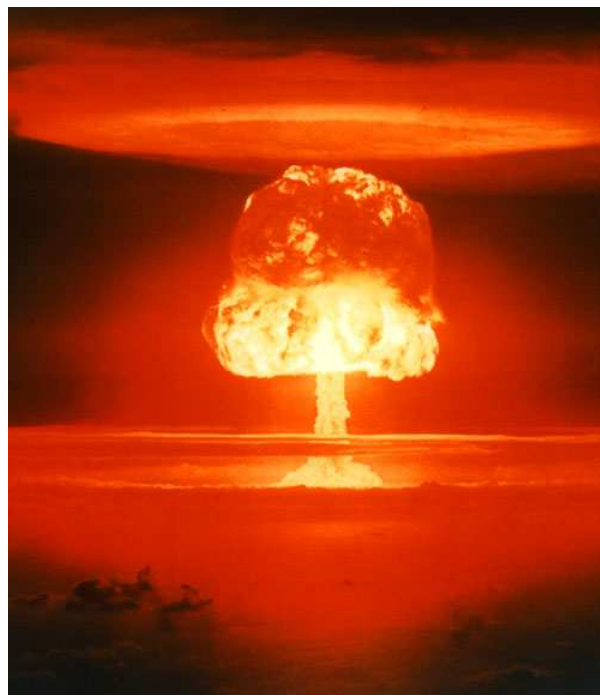
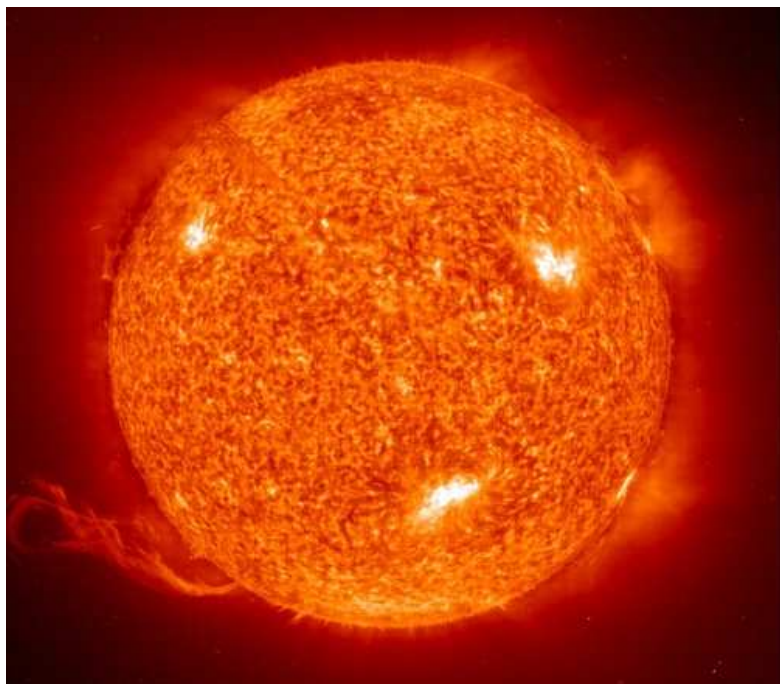
- Em cada ponto do espaço(-tempo) existe um **espaço interno**, i.e. um espaço vectorial complexo equipado com um produto interno hermitiano.
- As **forças fundamentais** são dadas pela curvatura do transporte paralelo de vectores internos.



Força electromagnética – espaço interno de dimensão 1.



Força nuclear fraca – espaço interno de dimensão 2.



Força nuclear forte – espaço interno de dimensão 3.

Galileu Galilei (1564–1642)

“A Filosofia [Ciência] está escrita neste grande livro, o Universo, que está permanentemente aberto e ao alcance do nosso olhar. Mas o livro não pode ser compreendido sem antes aprendermos a linguagem e os caracteres em que está escrito. A linguagem é a Matemática, e os caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem as quais é humanamente impossível compreender uma única palavra.”

