

COMO AS COISAS RODAM

JOSÉ NATÁRIO

1. GRUPO DAS ROTAÇÕES

Recorde que as rotações em torno da origem são aplicações lineares representadas pelas matrizes do conjunto

$$SO(3) = \{S \in \mathcal{M}_{3 \times 3} : S^t S = I \text{ e } \det S = 1\}.$$

Exercício 1.1. *Suponha que $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ preserva a distância Euclidiana e fixa a origem. Mostre que:*

- (1) f leva segmentos de recta em segmentos de recta;
- (2) $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$ para $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$;
- (3) f leva o ponto médio de um segmento no ponto médio da sua imagem;
- (4) $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$;
- (5) $\langle f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ para $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$;
- (6) $f(\mathbf{x}) = S\mathbf{x}$ para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, onde $S \in \mathcal{M}_{3 \times 3}$ é ortogonal (ou seja $S^t S = I$);
- (7) Se f preserva orientações então $\det S = 1$.

Uma vez que $\mathcal{M}_{3 \times 3} \simeq \mathbb{R}^9$, podemos pensar em $SO(3)$ como um subconjunto de \mathbb{R}^9 . Na verdade, é possível mostrar que $SO(3)$ é uma variedade diferenciável de dimensão 3, compacta (i.e. limitada e fechada).

Exercício 1.2. *Seja $\mathcal{S}_{3 \times 3} \subset \mathcal{M}_{3 \times 3}$ o conjunto das matrizes simétricas. Mostre que:*

- (1) $\mathcal{S}_{3 \times 3}$ é um subespaço linear de $\mathcal{M}_{3 \times 3}$ com dimensão 6 (logo $\mathcal{S}_{3 \times 3} \simeq \mathbb{R}^6$).
- (2) As matrizes ortogonais formam o conjunto de nível $O(3) = F^{-1}(I)$ da aplicação diferenciável $F : \mathcal{M}_{3 \times 3} \rightarrow \mathcal{S}_{3 \times 3}$ dada por $F(M) = M^t M$.
- (3) $DF(S)(V) = \left. \frac{d}{dt} F(M(t)) \right|_{t=0}$, onde $M : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_{3 \times 3}$ é uma curva diferenciável satisfazendo $M(0) = S$ e $\dot{M}(0) = V$.
- (4) DF tem característica máxima em cada ponto $S \in O(3)$.
- (5) $SO(3)$ é uma variedade diferenciável de dimensão 3 em $\mathcal{M}_{3 \times 3}$.
- (6) $SO(3)$ é uma variedade compacta.

Exercício 1.3. *Recorde que um grupo (G, \cdot) é um conjunto G munido de uma operação binária \cdot que é associativa, possui elemento neutro e para a qual todos os elementos possuem inverso. Mostre que $SO(3)$ com a operação produto de matrizes é um grupo não comutativo.*

Portanto $SO(3)$ é uma variedade com estrutura de grupo (**grupo de Lie**).

É habitual designar por $\mathfrak{so}(3)$ o espaço tangente a $SO(3)$ na matriz identidade, $\mathfrak{so}(3) = T_I SO(3)$, que é pois um espaço vectorial de dimensão 3. Se $S : \mathbb{R} \rightarrow SO(3)$ é uma curva diferenciável satisfazendo $S(0) = I$ e $\dot{S}(0) = A$ temos então

$$S^t(t)S(t) = I \Rightarrow \dot{S}^t(t)S(t) + S^t(t)\dot{S}(t) = 0 \Rightarrow A^t + A = 0,$$

o que mostra que todos os elementos de $\mathfrak{so}(3)$ são matrizes anti-simétricas. Como estas matrizes formam um subespaço linear $\mathcal{M}_{3 \times 3}$ com dimensão 3, concluímos que

$$\mathfrak{so}(3) = \{A \in \mathcal{M}_{3 \times 3} : A^t = -A\}.$$

Se $A \in \mathfrak{so}(3)$ é uma matriz anti-simétrica então $\exp(A) \in SO(3)$, já que

$$(\exp(A))^t = \exp(A^t) = \exp(-A) = (\exp A)^{-1}$$

e

$$\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{tr}(A)) = \exp(0) = 1.$$

Exercício 1.4. *Demonstre a fórmula $\det(\exp(M)) = \exp(\operatorname{tr}(M))$ para matrizes $M \in \mathcal{M}_{n \times n}$ diagonalizáveis.*

Desta forma temos uma aplicação analítica $\exp : \mathfrak{so}(3) \rightarrow SO(3)$. É possível mostrar que esta aplicação é sobrejectiva, ou seja, qualquer rotação é da forma $\exp(A)$ para algum $A \in \mathfrak{so}(3)$.

Exercício 1.5. *Mostre que:*

(1) *Qualquer rotação em torno do eixo dos zz está na imagem de $\exp : \mathfrak{so}(3) \rightarrow SO(3)$, já que*

$$\exp \begin{pmatrix} 0 & -t & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) *Qualquer rotação $S \in SO(3)$ é da forma*

$$S = T^t Z T,$$

onde $T, Z \in SO(3)$ e Z é uma rotação em torno do eixo dos zz .

(3) *A aplicação $\exp : \mathfrak{so}(3) \rightarrow SO(3)$ é sobrejectiva.*

Recorde que a fórmula $\exp(A)\exp(B) = \exp(A+B)$ só é verdade se A e B comutam. Para $A, B \in \mathfrak{so}(3)$ tem-se no entanto $\exp(A)\exp(B) = \exp(C)$ para alguma matriz $C \in \mathfrak{so}(3)$.

Exercício 1.6. *Admitindo que C é dada por uma série de potências de A e B , mostre que*

$$C = A + B + \frac{1}{2}[A, B] + \dots,$$

onde $[A, B] = AB - BA$.

Na verdade, todos os termos da série acima (dita a **série de Baker-Campbell-Hausdorff**) são obtidos aplicando sucessivamente a operação $[\cdot, \cdot]$ a A e B . Desta forma, essencialmente toda a informação acerca do grupo das rotações está codificada na operação $[\cdot, \cdot]$ em $\mathfrak{so}(3)$.

Exercício 1.7. *Mostre que $(\mathfrak{so}(3), [\cdot, \cdot])$ é uma álgebra de Lie, isto é, que a operação $[\cdot, \cdot]$ é bilinear, anti-simétrica e satisfaz a identidade de Jacobi:*

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0 \text{ para } A, B, C \in \mathfrak{so}(3).$$

Exercício 1.8. *Mostre que existe um isomorfismo linear $\Omega : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que*

$$A\mathbf{x} = \Omega(A) \times \mathbf{x}$$

para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ e $A \in \mathfrak{so}(3)$, onde \times designa o produto externo. Mostre ainda que

$$\Omega([A, B]) = \Omega(A) \times \Omega(B)$$

para $A, B \in \mathfrak{so}(3)$. Portanto (\mathbb{R}^3, \times) é uma álgebra de Lie isomorfa a $(\mathfrak{so}(3), [\cdot, \cdot])$.

2. COISAS CLÁSSICAS

Começamos por estudar o movimento de rotação livre de um corpo rígido em torno do seu centro de massa. Um **corpo rígido** é um sólido idealizado que se assume ser completamente indeformável, ou seja, tal que dois quaisquer dos seus pontos se mantêm sempre à mesma distância. Matematicamente, podemos representá-lo por um conjunto aberto limitado $C \subset \mathbb{R}^3$ (dito a **configuração de referência**) e uma função integrável $\rho : C \rightarrow \mathbb{R}^+$ (dita a **função densidade**). Por simplicidade, vamos assumir que o centro de massa se encontra na origem, ou seja, que

$$\int_C \mathbf{x}\rho(\mathbf{x})d^3x = 0.$$

Todas as possíveis posições do corpo rígido podem obtidas a partir da posição de referência S aplicando-lhe uma rotação em torno da origem. Desta forma, o movimento do ponto rígido é representado por uma curva (que supomos diferenciável) $S : \mathbb{R} \rightarrow SO(3)$, onde $S(t)$ representa a

rotação que é necessária aplicar à posição de referência para obter a posição do corpo rígido no instante t . Por outras palavras, cada ponto $\mathbf{x} \in C$ do ponto rígido descreve uma curva diferenciável $\mathbf{y} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\mathbf{y}(t) = S(t)\mathbf{x}$.

Da identidade

$$S^t(t)S(t) = I \Rightarrow \dot{S}^t(t)S(t) + S^t(t)\dot{S}(t) = 0 \Leftrightarrow (S^t(t)\dot{S}(t))^t = -S^t(t)\dot{S}(t)$$

vemos que $\dot{S}(t) = S(t)A(t)$ onde $A(t) \in \mathfrak{so}(3)$. Desta forma obtemos uma curva diferenciável $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{so}(3)$ que descreve a velocidade angular do corpo rígido. Mais precisamente, para cada ponto $\mathbf{x} \in S$ temos

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \dot{S}(t)\mathbf{x} = S(t)A(t)\mathbf{x} = S(t)(\boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{x}),$$

onde $\boldsymbol{\Omega}(t) = \boldsymbol{\Omega}(A(t))$. Definindo $\boldsymbol{\omega}(t) = S(t)\boldsymbol{\Omega}(t)$, vemos então que

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = (S(t)\boldsymbol{\Omega}(t)) \times (S(t)\mathbf{x}) = \boldsymbol{\omega}(t) \times \mathbf{y}(t),$$

ou seja, $\boldsymbol{\omega}(t)$ é a velocidade angular instantânea do corpo rígido. Portanto o vector $\boldsymbol{\Omega}(t)$ associado a $A(t)$ pelo isomorfismo $\boldsymbol{\Omega} : \mathfrak{so}(3) \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a velocidade angular instantânea **vista no referencial do corpo rígido** (Figura 1).

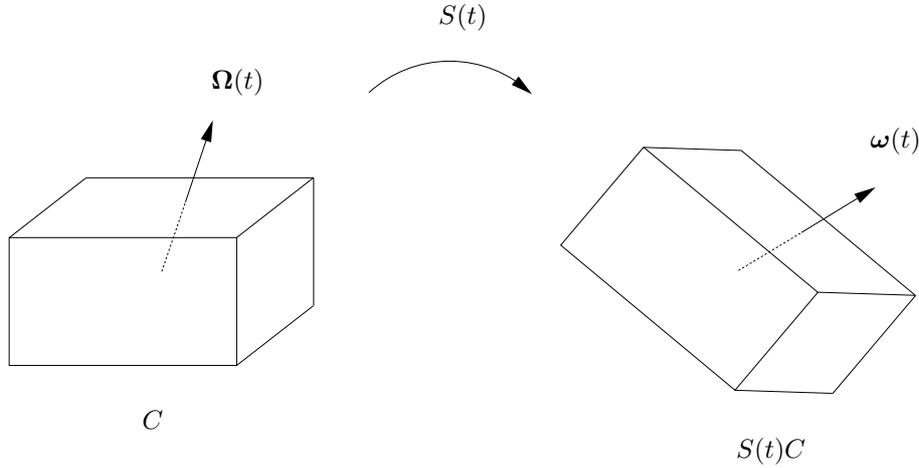


FIGURA 1. Arco de geodésica num poliedro.

Uma quantidade fundamental para a descrição do movimento de rotação do corpo rígido é o seu **momento angular total**

$$\mathbf{p}(t) = \int_C \left((S(t)\mathbf{x}) \times (\dot{S}(t)\mathbf{x}) \right) \rho(\mathbf{x}) d^3x.$$

Este vector pode escrever-se ainda como

$$\mathbf{p}(t) = \int_C \left((S(t)\mathbf{x}) \times (S(t)A(t)\mathbf{x}) \right) \rho(\mathbf{x}) d^3x = S(t) \int_C \left(\mathbf{x} \times (\boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{x}) \right) \rho(\mathbf{x}) d^3x.$$

Definindo o operador linear $I : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, dito o **tensor de inércia do corpo rígido**, pela fórmula

$$I(\mathbf{v}) = \int_C \left(\mathbf{x} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{x}) \right) \rho(\mathbf{x}) d^3x,$$

temos então $\mathbf{p}(t) = S(t)I\boldsymbol{\Omega}(t)$. Note-se que o vector $\mathbf{P}(t) = I\boldsymbol{\Omega}(t)$ é simplesmente o momento angular visto no referencial do corpo rígido, ou seja, $\mathbf{p}(t) = S(t)\mathbf{P}(t)$.

Exercício 2.1. *Mostre que:*

(1) Na base canónica de \mathbb{R}^3 o tensor de inércia admite a representação matricial

$$I = \begin{pmatrix} \int_C \rho(y^2 + z^2) & -\int_C \rho xy & -\int_C \rho xz \\ -\int_C \rho xy & \int_C \rho(x^2 + z^2) & -\int_C \rho yz \\ -\int_C \rho xz & -\int_C \rho yz & \int_C \rho(x^2 + y^2) \end{pmatrix}$$

(portanto o operador de inércia é simétrico).

- (2) Existe uma base ortonormada $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de \mathbb{R}^3 na qual I admite a representação matricial $I = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ (os eixos $\mathbb{R}\mathbf{e}_1, \mathbb{R}\mathbf{e}_2, \mathbb{R}\mathbf{e}_3$ dizem-se os **eixos principais de inércia** e os valores próprios I_1, I_2, I_3 os **momentos principais de inércia** do corpo rígido).
- (3) $I_1 < I_2 + I_3$ (e permutações cíclicas de I_1, I_2, I_3 , i.e. os momentos principais de inércia satisfazem as mesmas desigualdades que os comprimentos dos lados de um triângulo).
- (4) Cada uma das condições de simetria seguintes garante que o eixo dos zz é um eixo principal de inércia:
- (a) Simetria em relação ao eixo dos zz :
 $(x, y, z) \in C$ sse $(-x, -y, z) \in C$ e $\rho(x, y, z) = \rho(-x, -y, z)$.
- (b) Simetria em relação ao plano $z = 0$:
 $(x, y, z) \in C$ sse $(x, y, -z) \in C$ e $\rho(x, y, z) = \rho(x, y, -z)$.

Exercício 2.2. Determine os eixos principais de inércia e os correspondentes momentos principais de inércia dos seguintes sólidos homogêneos, em função da sua massa total M :

- (1) Um paralelepípedo de lados $2a, 2b, 2c \in \mathbb{R}^+$;
 (2) Um elipsóide de semieixos $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.

Se o corpo rígido roda livremente em torno do seu centro de massa (por exemplo quando atirado ao ar), o seu vector momento angular total é constante, $\dot{\mathbf{p}}(t) = 0$. Portanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(S(t)\mathbf{P}(t)) = 0 &\Leftrightarrow \dot{S}(t)\mathbf{P}(t) + S(t)\dot{\mathbf{P}}(t) = 0 \Leftrightarrow S(t)A(t)\mathbf{P}(t) + S(t)\dot{\mathbf{P}}(t) = 0 \\ &\Leftrightarrow S(t) \left(\dot{\mathbf{P}}(t) + A(t)\mathbf{P}(t) \right) = 0 \Leftrightarrow \dot{\mathbf{P}}(t) + \boldsymbol{\Omega}(t) \times \mathbf{P}(t) = 0, \end{aligned}$$

ou seja, vale a **equação de Euler**

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t) \times \boldsymbol{\Omega}(t).$$

Esta equação diz-se **completamente integrável**, uma vez que possui dois **primeiros integrais**, isto é, duas quantidades conservadas. Uma delas é obviamente

$$\mathbf{P}^2(t) = \mathbf{p}^2,$$

cujas conservação se segue trivialmente da equação de Euler:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{P}^2(t)) = 2 \langle \dot{\mathbf{P}}(t), \mathbf{P}(t) \rangle = 2 \langle \mathbf{P}(t) \times \boldsymbol{\Omega}(t), \mathbf{P}(t) \rangle = 0.$$

A outra quantidade conservada é

$$K(t) = \frac{1}{2} \langle \mathbf{P}(t), \boldsymbol{\Omega}(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle \mathbf{P}(t), I^{-1}\mathbf{P}(t) \rangle,$$

já que

$$\frac{d}{dt}K(t) = \langle \dot{\mathbf{P}}(t), I^{-1}\mathbf{P}(t) \rangle = \langle \mathbf{P}(t) \times \boldsymbol{\Omega}(t), \boldsymbol{\Omega}(t) \rangle = 0.$$

Exercício 2.3. Mostre que

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_C \langle \dot{S}(t)\mathbf{x}, \dot{S}(t)\mathbf{x} \rangle \rho(\mathbf{x}) d^3x.$$

Na base $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ dos eixos principais de inércia estas quantidades conservadas escrevem-se

$$P^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2$$

e

$$K = \frac{P_1^2}{2I_1} + \frac{P_2^2}{2I_2} + \frac{P_3^2}{2I_3}.$$

Portanto no caso genérico $I_1 < I_2 < I_3$ o vector $\mathbf{P}(t)$ move-se ao longo de uma curva resultantes da intersecção da esfera definida pela primeira equação com o elipsóide definido com a segunda equação (Figura 2). As trajectórias possíveis são então seis pontos de equilíbrio (soluções constantes), quatro estáveis e dois instáveis, quatro órbitas heteroclínicas unindo dois dos pontos de equilíbrio instáveis, e órbitas periódicas.

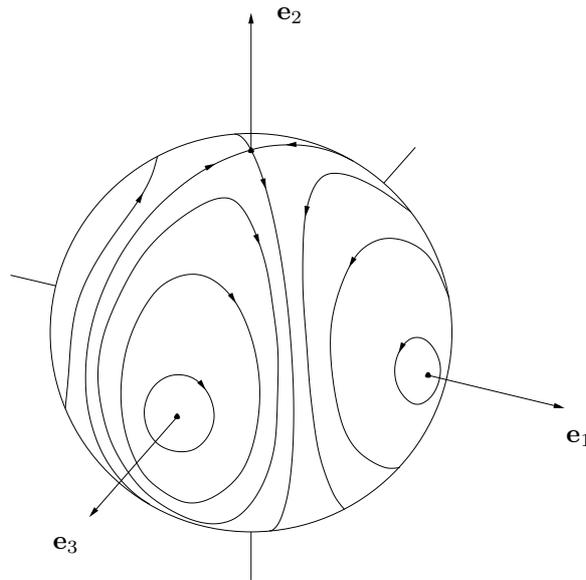


FIGURA 2. Soluções da equação de Euler.

Para interpretar estas soluções, começamos por notar que os pontos de equilíbrio correspondem a rotações uniformes em torno dos eixos principais de inércia, que mantêm fixa a sua orientação no espaço. De facto, se $\mathbf{P}(t)$ é constante então $\boldsymbol{\Omega}(t) = I^{-1}\mathbf{P}(t)$ também o é, e conseqüentemente $A(t)$. Deste modo, vemos de $\dot{S}(t) = S(t)A$ que $S(t) = S(0)\exp(At)$ é uma rotação uniforme. Uma vez que $\mathbf{P}(t)$ representa o vector **constante** \mathbf{p} tal como é visto no referencial do corpo rígido, vemos então que as rotações em torno de \mathbf{e}_1 e \mathbf{e}_3 são estáveis (para rotações inicialmente próximas das rotações uniformes em torno destes eixos, eles mantêm-se próximos de uma direcção fixa no espaço), ao passo que a rotação em torno de \mathbf{e}_2 é instável. Este fenómeno que pode ser facilmente observado atirando um corpo rígido (por exemplo uma colher) ao ar.

Exercício 2.4. *Mostre que:*

- (1) Se $I_1 = I_2 = I_3$ então o corpo rígido roda em torno de um eixo fixo no espaço com velocidade angular constante.
- (2) Se $I_1 = I_2 \neq I_3$ então existem infinitos eixos principais de inércia, mas apenas as rotações em torno de \mathbf{e}_3 são estáveis.

Exercício 2.5. *Muitos asteróides têm formas irregulares, e portanto satisfazem $I_1 < I_2 < I_3$. Apesar do seu movimento de rotação em torno do centro de massa ser descrito com grande precisão pela equação de Euler, as pequenas interacções com o Sol e os planetas tendem a reduzir a sua energia cinética $K(t)$, conservando no entanto o seu momento angular total $\mathbf{p}(t)$. Para que estado de rotação tendem os asteróides?*

3. COISAS QUÂNTICAS

Verifica-se experimentalmente que o momento angular total \mathbf{p} de objectos muito pequenos, como por exemplo átomos, só pode assumir certos valores discretos: qualquer medição de uma componente do momento angular resulta num múltiplo da quantidade fundamental \hbar , dita a **constante de Planck** (Figura 3). Isto passa completamente despercebido no estudo do movimento de objectos macroscópicos, cujo momento angular é tipicamente da ordem de $10^{34}\hbar$.

Matematicamente, pode modelar-se este fenómeno assumindo que as componentes p_1 , p_2 e p_3 do momento angular total são na realidade **matrizes Hermitianas** $n \times n$ (para algum $n \in \mathbb{N}$), cujos valores próprios (reais) são os possíveis resultados da sua medição. O **estado** do sistema é descrito não pelas matrizes (que admitem diversos valores próprios) mas sim por um **vector unitário** $\psi \in \mathbb{C}^n$. Este vector **não determina** o resultado de uma medição de p_3 (digamos),

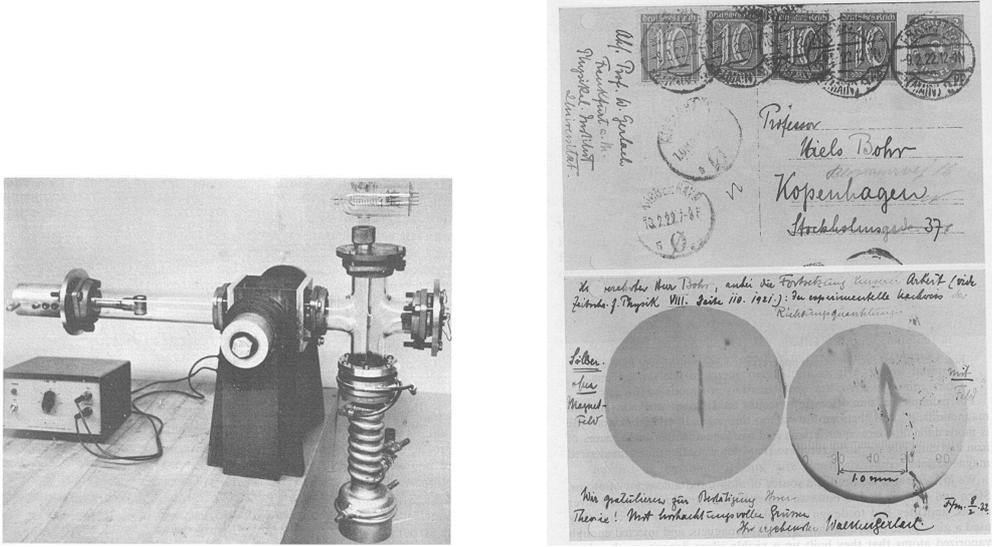


FIGURA 3. Experiência de Stern-Gerlach: átomos de prata são deflectidos num campo magnético não uniforme em apenas duas direcções, indicando que a componente do momento angular segundo o campo assume apenas dois valores. O resultado da experiência foi enviado por Walther Gerlach a Niels Bohr num postal.

mas apenas as probabilidades dos diversos resultados possíveis, de acordo com a seguinte regra: se $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ são os valores próprios de p_3 , e ψ_1, \dots, ψ_n são os vectores próprios normalizados associados (definidos a menos de uma fase), então

$$\psi = a_1\psi_1 + \dots + a_n\psi_n$$

onde

$$a_i = \langle \psi, \psi_i \rangle.$$

A probabilidade do resultado da medição ser λ_i quando o sistema se encontra no estado ψ é então $|a_i|^2$. Note-se que pelo Teorema de Pitágoras

$$|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2 = 1,$$

como seria de esperar. Após a medição o sistema deixa de estar no estado ψ e passa a estar no estado ψ_i , onde λ_i foi o resultado da medição. Portanto após a medição qualquer nova medição resultará novamente no valor λ_i com probabilidade 1.

Para objectos microscópicos os momentos angulares são da ordem de \hbar . É portanto conveniente escolher unidades nas quais $\hbar = 1$. Nestas unidades, exige-se às componentes p_1 , p_2 e p_3 do momento angular que satisfaçam as seguintes identidades:

$$[p_1, p_2] = ip_3; \quad [p_2, p_3] = ip_1; \quad [p_3, p_1] = ip_2.$$

Exercício 3.1. Verifique que:

(1) As curvas diferenciáveis $S_1, S_2, S_3 : \mathbb{R} \rightarrow SO(3)$ dadas por

$$S_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}; \quad S_2(t) = \begin{pmatrix} \cos t & 0 & \sin t \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin t & 0 & \cos t \end{pmatrix}; \quad S_3(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

representam rotações de um ângulo t em torno dos eixos dos xx , dos yy e dos zz .

(2) As matrizes $A_1 = \dot{S}_1(0)$, $A_2 = \dot{S}_2(0)$ e $A_3 = \dot{S}_3(0)$ formam uma base de $\mathfrak{so}(3)$ e satisfazem

$$[A_1, A_2] = A_3; \quad [A_2, A_3] = A_1; \quad [A_3, A_1] = A_2.$$

(3) $\Omega(A_1) = \mathbf{e}_1$, $\Omega(A_2) = \mathbf{e}_2$ e $\Omega(A_3) = \mathbf{e}_3$ (o que confirma as identidades acima).

Exercício 3.2. *Mostre que:*

- (1) O comutador de duas matrizes Hermitianas é uma matriz anti-Hermitiana.
- (2) A aplicação $\mathcal{I} : \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ dada por $\mathcal{I}(M) = iM$ transforma matrizes Hermitianas em matrizes anti-Hermitianas (e vice-versa).
- (3) As matrizes Hermitianas $p_1 = iA_1$, $p_2 = iA_2$ e $p_3 = iA_3$ satisfazem as identidades acima, onde A_1 , A_2 e A_3 são as matrizes anti-Hermitianas definidas no Exercício 3.1.

Exercício 3.3. *Mostre que duas matrizes Hermitianas comutam se e só se possuem os mesmos vectores próprios.*

Portanto p_1 , p_2 e p_3 não possuem os mesmos vectores próprios. Isso significa que se o estado do sistema for um vector próprio de p_3 (por exemplo), de forma que o valor de p_3 está bem definido (é possível prever qual o resultado de uma medição de p_3), os valores de p_1 e p_2 não estarão em geral bem definidos, ou seja, não é possível prever qual o resultado de uma medição de p_1 ou de p_2 .

Dadas matrizes p_1 , p_2 e p_3 como acima, define-se a matriz

$$\mathbf{p}^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2.$$

Exercício 3.4. *Mostre que:*

- (1) Se $M, N, O \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ então $[MN, O] = M[N, O] + [M, O]N$.
- (2) $[\mathbf{p}^2, p_1] = [\mathbf{p}^2, p_2] = [\mathbf{p}^2, p_3] = 0$.

Portanto \mathbf{p}^2 e p_3 (por exemplo) têm os mesmos vectores próprios. Pode mostrar-se que os valores próprios de \mathbf{p}^2 são da forma $\frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right)$ para $n \in \mathbb{N}_0$, e que os vectores deste espaço próprio de \mathbf{p}^2 são vectores próprios de p_3 com valores próprios $m = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + 1, \dots, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}$. Diz-se que os vectores unitários do espaço próprio de \mathbf{p}^2 com valor próprio $\frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right)$ representam os estados de uma partícula de **spin** $\frac{n}{2}$. Para uma tal partícula, a componente p_3 (e analogamente as componentes p_1 e p_2) só podem assumir $n + 1$ valores distintos.

Exercício 3.5. *Mostre que as matrizes (não Hermitianas) $p_+ = p_1 + ip_2$ e $p_- = p_1 - ip_2$ satisfazem:*

- (1) $[\mathbf{p}^2, p_+] = [\mathbf{p}^2, p_-] = 0$ (portanto p_+ e p_- preservam os espaços próprios de \mathbf{p}^2).
- (2) $[p_3, p_+] = p_+$.
- (3) $[p_3, p_-] = -p_-$.
- (4) $p_+^* = p_-$ (onde $*$ designa a matriz transconjugada).
- (5) $p_- p_+ = \mathbf{p}^2 - p_3^2 - p_3$.
- (6) $p_+ p_- = \mathbf{p}^2 - p_3^2 + p_3$.

Exercício 3.6. *Suponha agora que ψ é um vector próprio unitário de \mathbf{p}^2 e de p_3 com valores próprios λ e m , respectivamente. Mostre que:*

- (1) $p_3 p_+ \psi = (m + 1)\psi$.
- (2) $p_3 p_- \psi = (m - 1)\psi$.
- (3) $\|p_+ \psi\|^2 = \lambda - m^2 - m$.
- (4) $\|p_- \psi\|^2 = \lambda - m^2 + m$.

Exercício 3.7. *Mostre que se um espaço próprio de \mathbf{p}^2 tem dimensão finita $n + 1$ ($n \in \mathbb{N}_0$) e é irreduzível (ou seja, não possui nenhum subespaço que seja espaço próprio simultâneo de p_1 , p_2 e p_3) então correspondente ao valor próprio $\lambda = \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right)$ de \mathbf{p}^2 . Mostre ainda que os valores próprios de p_3 nesse subespaço são $m = -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} + 1, \dots, \frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2}$.*

Matematicamente, este exercício faz a classificação das **representações irreduzíveis** de $\mathfrak{so}(3)$.

Exercício 3.8. *Considere as matrizes p_1 , p_2 e p_3 definidas no Exercício 3.2. Verifique que:*

- (1) Os valores próprios destas matrizes são -1 , 0 e 1 .
- (2) $\mathbf{p}^2 = 2I$ (portanto estas matrizes representam uma partícula de spin 1).

Exercício 3.9. *Considere as matrizes*

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}; \quad p_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & 0 \end{pmatrix}; \quad p_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Mostre que:

- (1) Os valores próprios destas matrizes são $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$.
- (2) $\mathbf{p}^2 = \frac{3}{4}I$ (portanto estas matrizes representam uma partícula de spin $\frac{1}{2}$).
- (3) Os vectores próprios normalizados de p_1 são $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ e $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Os átomos de prata na experiência de Stern-Gerlach possuem spin $\frac{1}{2}$, uma vez que as componentes do seu momento angular assumem apenas dois valores. Esta experiência pode ser usada para medir a componente do momento angular dos átomos numa dada direcção, como se representada esquematicamente na Figura 4. Chamaremos ao aparelho de medição um **analisador de Stern-Gerlach**.

Os estados dos átomos de prata são modelados por vectores unitários de \mathbb{C}^2 . Assumindo que o campo magnético está orientado ao longo do eixo dos zz , os átomos que saem pela abertura superior são representados pelo vector próprio $(1, 0)$ de p_3 , correspondendo ao valor próprio $\frac{1}{2}$. Se estes átomos passarem novamente por um analisador de Stern-Gerlach orientado ao longo do eixo dos zz sairão todos pela abertura superior, como seria de esperar (Figura 5).

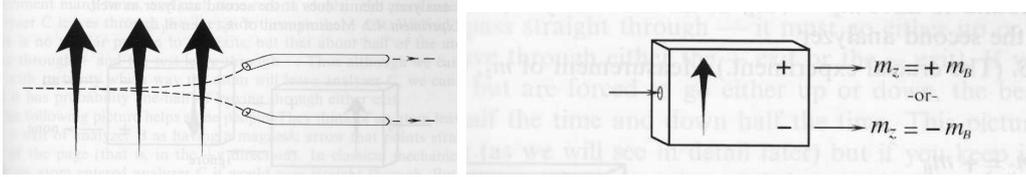


FIGURA 4. Representação esquemática da experiência de Stern-Gerlach.

Se no entanto fizermos estes átomos passarem por um analisador de Stern-Gerlach orientado ao longo do eixo dos xx , eles sairão por cada uma das duas aberturas com probabilidade $\frac{1}{2}$, uma vez que o estado $(1, 0)$ é dado em termos dos vectores próprios de p_1 por

$$(1, 0) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

Os átomos que saem pela abertura correspondente a $p_1 = \frac{1}{2}$, por exemplo, estarão agora no estado $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$. Portanto se os fizermos passar novamente por um analisador de Stern-Gerlach orientado ao longo do eixo dos zz (Figura 5), sairão por **ambas** as aberturas com probabilidade $\frac{1}{2}$, apesar de que antes da medição de p_1 sairiam todos pela abertura superior! Este “paradoxo” ilustra a estranheza do mundo quântico.

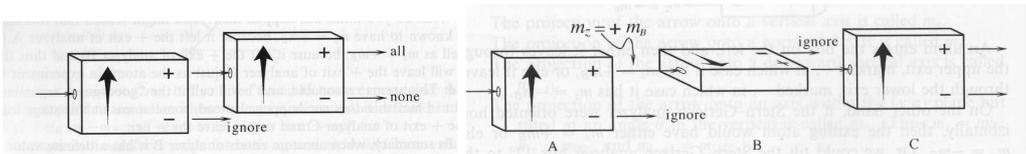


FIGURA 5. O “paradoxo” das medições em direcções sucessivamente diferentes (neste caso $zz - xx - zz$): as probabilidades de obter spin positivo ou spin negativo na medição C (ao longo do eixo zz) são ambas iguais a $\frac{1}{2}$, embora após a medição A a probabilidade de obter spin positivo ao longo de zz fosse igual a 1.

REFERÊNCIAS

- [1] Herbert Goldstein, Charles Poole Jr. e John Safko, *Classical Mechanics*, Addison Wesley (2001)
- [2] Keith Hannabuss, *An Introduction to Quantum Theory*, Oxford University Press (1997)
- [3] Daniel F. Styer, *The Strange World of Quantum Mechanics*, Cambridge University Press (2000)