

TEOREMA DE PENROSE: O TEOREMA QUE VALEU UM PRÉMIO NOBEL

JOSÉ NATÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O Prémio Nobel da Física de 2020 foi atribuído (em parte) ao matemático britânico Sir Roger Penrose “pela descoberta de que a formação de buracos negros é uma previsão robusta da Teoria da Relatividade Geral”. De acordo com o comité Nobel, Penrose “usou métodos matemáticos engenhosos na sua prova de que os buracos negros são uma consequência direta da Teoria da Relatividade Geral de Einstein”. Neste artigo vamos explicar o enunciado do Teorema de Penrose, e tentar dar uma ideia dos métodos de geometria e topologia usados na sua demonstração.

2. RELATIVIDADE RESTRITA

A Teoria da Relatividade Restrita, proposta por Einstein em 1905, tem como axioma fundamental a invariância da velocidade da luz. É habitual utilizar unidades em que esta velocidade é igual a 1 (por exemplo, medindo o tempo em anos e as distâncias em anos-luz). Desta forma, fixado um referencial inercial, com tempo t e coordenada Cartesianas (x, y, z) , um movimento à velocidade da luz satisfaz

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 1.$$

Em 1908, o matemático alemão Hermann Minkowski observou que se representarmos este movimento no chamado *espaço-tempo de Minkowski*, ou seja, \mathbb{R}^4 com coordenadas (t, x, y, z) , obtemos uma curva cujo vetor tangente está no núcleo da forma bilinear

$$\eta = -dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz,$$

dita a *métrica de Minkowski*. A observação fundamental de Minkowski é que esta métrica é independente da escolha de referencial inercial, e portanto caracteriza completamente a estrutura física da Relatividade Restrita.

A geometria de Minkowski é substancialmente diferente da geometria Euclidiana, em virtude do carácter indefinido de η , que permite classificar qualquer vetor $v \in \mathbb{R}^4$ em três classes distintas: do *tipo espaço* (se $\eta(v, v) > 0$), do *tipo tempo* (se $\eta(v, v) < 0$) e do *tipo luz*, ou *nulo* (se $\eta(v, v) = 0$). Os vetores desta última classe formam o chamado *cone de luz*, que determina todos os possíveis movimentos à velocidade da luz. Os vetores do tipo tempo são tangentes a curvas que representam movimentos a velocidades inferiores à da luz, e portanto possíveis trajetórias de partículas materiais. Note-se que estas curvas se mantêm, em cada ponto, no interior do cone de luz nesse ponto (ver Figura 1, na qual se suprimiu uma dimensão espacial).

Os pontos do espaço-tempo de Minkowski designam-se por *acontecimentos*, uma vez que cada um deles representa um dado local num dado instante. De acordo com a Teoria da Relatividade, nenhuma influência se pode propagar mais depressa do que a luz. Deste modo, cada acontecimento pode apenas influenciar os acontecimentos que se encontram no seu *futuro causal*, ou seja, a região limitada pela metade futura do seu cone de luz. O futuro causal de um conjunto S é definido como a união $J^+(S)$ dos futuros causais dos seus pontos. Na Figura 2 encontra-se representado o futuro causal de uma superfície esférica S (onde se suprimiu uma dimensão espacial). Esta figura ilustra três propriedades da fronteira $\partial J^+(S)$ do futuro causal que são cruciais para a demonstração do Teorema de Penrose:

- (i) $\partial J^+(S)$ é gerada por subconjuntos de retas ortogonais a S cujo vetor tangente é do tipo luz (representando portanto raios de luz).

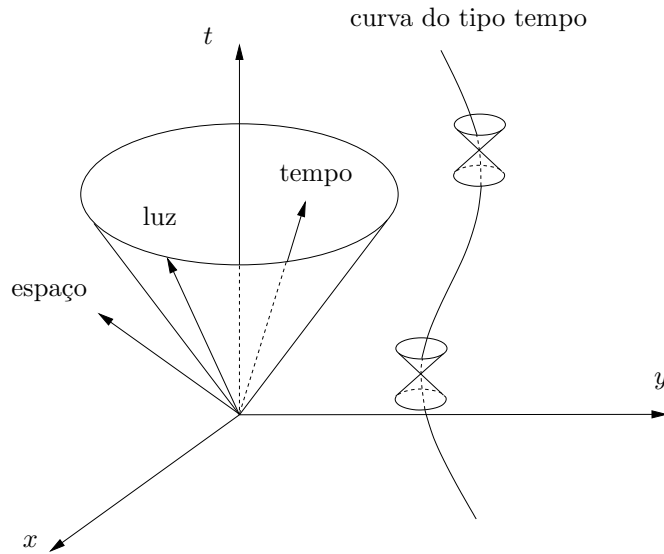


FIGURA 1. Vetores do tipo espaço, tempo e luz, cone de luz futuro, e curva do tipo tempo no espaço-tempo de Minkowski.

- (ii) Se existe um *ponto conjugado* a S , isto é, um ponto no qual geradores arbitrariamente próximos se intersectam, então os geradores deixam de estar em $\partial J^+(S)$ para lá deste ponto.
- (iii) $\partial J^+(S)$ é uma variedade topológica, e a projeção natural de $\partial J^+(S)$ numa hipersuperfície de t constante é uma aplicação contínua e aberta.

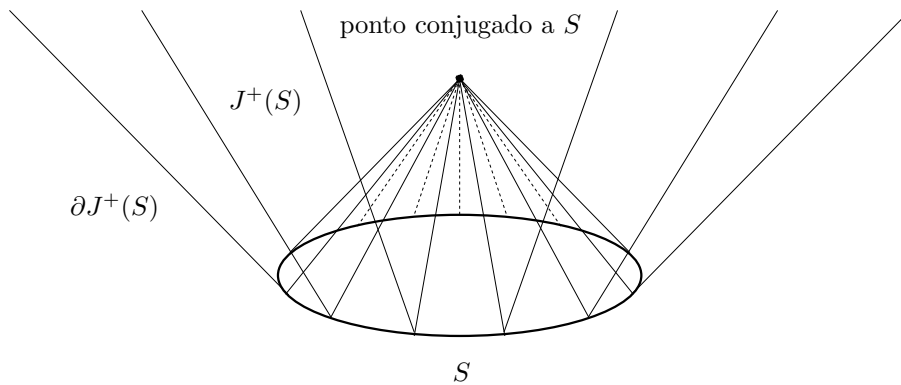


FIGURA 2. Fronteira do futuro de uma superfície esférica S , formada por semi-retas e segmentos de reta do tipo luz ortogonais a S .

3. RELATIVIDADE GERAL

O espaço-tempo de Minkowski é plano, no sentido em que as suas geodésicas (curvas que são pontos críticos do comprimento determinado pela métrica de Minkowski) são linhas retas; geodésicas do tipo tempo representam movimentos de partículas livres, e geodésicas do tipo luz representam raios de luz. Para modelar a gravidade no contexto da Teoria da Relatividade, Einstein compreendeu que seria necessário considerar espaço-tempos curvos (M, g) , com M uma variedade diferenciável conexa de dimensão 4 e g uma *métrica Lorentziana*, ou seja, um tensor-2 simétrico que se reduz a η numa base apropriada de cada espaço tangente $T_p M$ (portanto as métricas Lorentzianas estão para a métrica de Minkowski assim como as métricas Riemannianas estão para a métrica Euclidiana). Desta forma, os vetores tangentes podem ainda ser classificados

como sendo do tipo espaço, tempo ou luz; geodésicas do tipo tempo representam movimentos de partículas em queda livre, e geodésicas do tipo luz representam raios de luz. Para completar a Teoria da Relatividade Geral, Einstein propôs em 1915 uma equação para a métrica (*equação de Einstein*):

$$Ric - \frac{1}{2}(\text{tr } Ric)g = T,$$

onde Ric é a curvatura de Ricci de g e T é um tensor que representa a distribuição de matéria e energia no espaço-tempo (*tensor energia-momento*). Uma vez que a densidade de energia dos modelos de matéria usuais é positiva, este tensor tipicamente satisfaz a chamada *condição de energia nula*:

$$T(v, v) \geq 0 \Rightarrow Ric(v, v) \geq 0$$

para qualquer vetor v do tipo luz.

Em geral, assume-se que o espaço-tempo (M, g) possui uma *orientação temporal*, isto é, uma escolha consistente, em cada ponto, de qual das metades do cone de luz deve ser considerada a metade futura. Desta forma, a noção de futuro causal de um conjunto continua a fazer sentido, e as propriedades (i) e (ii) atrás continuam a verificar-se (substituindo “retas” por “geodésicas”). A propriedade (iii) também se continua a verificar para uma classe importante de espaço-tempos, ditos *globalmente hiperbólicos*, nos quais as hipersuperfícies análogas às hipersuperfícies de t constante se designam por *hipersuperfícies de Cauchy*.

4. BURACOS NEGROS

A primeira solução da equação de Einstein a ser descoberta, logo em 1916, foi a chamada *solução de Schwarzschild*. Trata-se de uma solução de vácuo (ou seja, com $T = 0$) e esfericamente simétrica, pelo que representa o campo gravitacional no *exterior* de um objeto com essa simetria. Se usarmos como coordenada temporal o chamado *tempo de Painlevé*, e como coordenadas espaciais as habituais coordenadas esféricas (r, θ, φ) , a sua expressão é

$$g = -dt \otimes dt + \left(dr + \sqrt{\frac{2m}{r}} dt \right) \otimes \left(dr + \sqrt{\frac{2m}{r}} dt \right) + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi,$$

onde $m \geq 0$ é a massa do objeto em unidades geometrizadas (repare-se que para $m = 0$ se recupera a métrica de Minkowski em coordenadas esféricas). Esta métrica pode ser compreendida geometricamente representando os cones de luz nas superfícies “radiais” $(\theta, \varphi) = (\theta_0, \varphi_0)$ (Figura 3). Estes são tangentes aos raios de luz radiais, isto é, curvas da forma $c(t) = (t, r(t), \theta_0, \varphi_0)$ cujo vetor tangente é do tipo luz:

$$g\left(\frac{dc}{dt}, \frac{dc}{dt}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{dr}{dt} = \pm 1 - \sqrt{\frac{2m}{r}}.$$

Para $r \gg 2m$, os cones de luz são indistinguíveis dos cones de luz do espaço-tempo de Minkowski, com declives ± 1 , correspondentes a raios de luz que se afastam ou aproximam de $r = 0$. À medida que r diminui, no entanto, os cones inclinam-se na direcção de $r = 0$. No chamado *raio de Schwarzschild*, $r = 2m$, os cones de luz estão tão inclinados que os raios de luz que se deviam estar a afastar de $r = 0$ na verdade não o conseguem fazer, mantendo-se a pairar em $r = 2m$. Para $r < 2m$ a situação é ainda mais dramática: os raios de luz que se deviam estar a afastar de $r = 0$ na verdade estão a aproximar-se.

Logo, qualquer partícula que entre na região $r < 2m$ não só não consegue voltar a sair, como é forçada a mover-se na direcção de $r = 0$. Concluimos que observadores no exterior não poderão nunca ver nenhum acontecimento que ocorra na região $r \leq 2m$; esta região diz-se então um *buraco negro*. A superfície $r = 2m$, que delimita esta região, chama-se o *horizonte de acontecimentos* (porque não é possível ver para além dela). Uma superfície esférica com raio $r < 2m$ diz-se uma *superfície aprisionada*, porque a área de qualquer subconjunto desta superfície diminui ao longo dos raios de luz que se afastam ortogonalmente da superfície (em ambas as direcções). Finalmente, a linha $r = 0$ diz-se a *singularidade*. Trata-se de facto de uma singularidade matemática, para além da qual não é possível continuar o espaço-tempo de Schwarzschild, uma vez que a curvatura explode quando $r \rightarrow 0$.

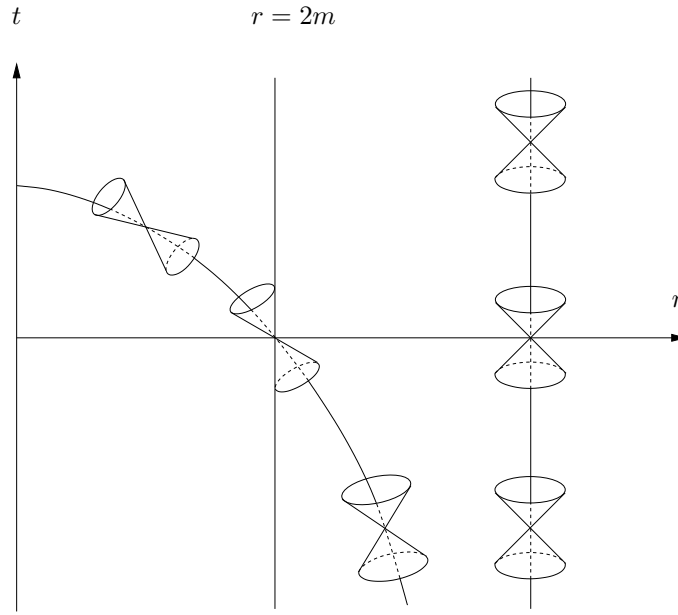


FIGURA 3. Espaço-tempo de Schwarzschild: buraco negro ($r \leq 2m$), horizonte de acontecimentos ($r = 2m$) e singularidade ($r = 0$).

5. TEOREMA DE PENROSE

Os objetos astronómicos vulgares possuem raios muito superiores ao seu raio de Schwarzschild (por exemplo, o raio de Schwarzschild da Terra é de cerca de 9 milímetros). Uma vez que a solução de Schwarzschild descreve apenas o *exterior* de um objeto esfericamente simétrico, um buraco negro só se pode formar quando um destes objetos se contrai até atravessar o seu próprio horizonte de acontecimentos (*colapso gravitacional*). Esta situação pode ser modelada imaginando que o objeto em colapso ocupa a região abaixo da curva do tipo tempo representada na Figura 3, de modo que apenas a região acima desta curva é descrita pela métrica de Schwarzschild.

Apesar de existirem modelos explícitos representando tais colapsos esfericamente simétricos, não era inicialmente claro se a singularidade em $r = 0$ seria uma característica típica dos colapsos gravitacionais ou apenas um artefacto da simetria (uma vez que toda a matéria se encontra a cair na direção do centro, não é surpreendente que aí se forme uma singularidade). Foi esta a questão que o Teorema de Penrose esclareceu.

Teorema 5.1 (Penrose [5]). *Se o espaço-tempo (M, g)*

- (i) *é globalmente hiperbólico com hipersuperfície de Cauchy não compacta C ,*
- (ii) *satisfaz a condição de energia nula,*
- (iii) *e contém uma superfície compacta aprisionada S ,*

então (M, g) admite pelo menos uma geodésica do tipo luz incompleta.

Note-se que aquilo que o Teorema de Penrose de facto prova é incompletude geodésica (por este motivo, muitos autores preferem chamar-lhe um “teorema de incompletude”, por oposição à designação tradicional de “teorema de singularidade”). A ideia da demonstração (cujos detalhes podem ser vistos por exemplo em [1, 2, 3, 4, 6]) é supor que todas as geodésicas do tipo luz são completas. Uma vez que $Ric(v, v) \geq 0$ para qualquer vetor nulo v , e S é uma superfície compacta aprisionada, é possível mostrar (por argumentos análogos aos argumentos usuais em Geometria Riemanniana) que qualquer geodésica nula ortogonal a S possui um ponto conjugado a S a uma distância afim inferior a um certo valor fixo. Uma vez que as geodésicas nulas deixam de estar em $\partial J^+(S)$ quando passam pelo ponto conjugado, $\partial J^+(S)$ é necessariamente compacto. Como a projeção natural $\pi : \partial J^+(S) \rightarrow C$ é contínua e aberta, a sua imagem é compacta (logo fechada) e aberta, e portanto coincide com C (que é conexa porque M é conexo). Concluímos que C

é necessariamente compacta, contrariando uma das hipóteses do teorema. Logo, nem todas as geodésicas do tipo luz podem ser completas.

A existência de superfícies compactas aprisionadas não depende da simetria exata do espaço-tempo, e verifica-se certamente para pequenas perturbações dos colapsos gravitacionais esfericamente simétricos que são conhecidos de forma explícita. Desta forma, estes espaço-tempos serão também geodesicamente incompletos. É esperado que esta incompletude seja devida à existência de singularidades na curvatura; a existência de buracos negros como consequência inevitável da Teoria da Relatividade Geral seguir-se-ia então da chamada Conjetura da Censura Cósmica, que prevê que estas singularidades estejam sempre ocultas por um horizonte de acontecimentos. Apesar desta conjectura permanecer ainda em aberto, o Teorema de Penrose convenceu a maior parte dos físicos da existência matemática dos buracos negros, ao ponto de, pela primeira vez na História, se ter atribuído um Prémio Nobel da Física pela demonstração de um teorema matemático!

REFERÊNCIAS

- [1] L. Godinho and J. Natário, *An introduction to Riemannian geometry: With applications to mechanics and relativity*, Springer, 2014.
- [2] S. Hawking and G. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, 1995.
- [3] J. Natário, *Mathematical Relativity*, <https://arxiv.org/abs/2003.02855>.
- [4] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry*, Academic Press, 1983.
- [5] R. Penrose, *Gravitational collapse and space-time singularities*, Phys. Rev. Lett. **14** (1965), 57–59.
- [6] R. Wald, *General relativity*, University of Chicago Press, 1984.

CENTRO DE ANÁLISE MATEMÁTICA, GEOMETRIA E SISTEMAS DINÂMICOS, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO, 1049-001 LISBOA, PORTUGAL