Espaço-tempo de Minkowski: a Física como Geometria

Uma das descobertas fundamentais da Física do século XX deve-se ao matemático alemão Hermann Minkowski, que em 1908 compreendeu que a recém-descoberta Teoria da Relatividade podia ser reformulada como uma nova geometria num espaço-tempo a quatro dimensões.

Figura 1. Hermann Minkowski (1864-1909)

A Teoria da Relatividade tem como axioma central o facto experimental de que a velocidade da luz é a mesma para todos os observadores, independentemente do seu movimento. Uma consequência imediata deste facto é que relógios com diferentes velocidades medem intervalos de tempo diferentes entre os mesmos acontecimentos. Minkowski descobriu que este fenómeno é inteiramente análogo ao facto de curvas diferentes unindo os mesmos dois pontos não terem necessariamente o mesmo comprimento.

O espaço-tempo de Minkowski é o conjunto de todos os acontecimentos, idealizados como pontos do espaço num dado instante de tempo. Escolhido um referencial (isto é, um sistema de eixos ortogonais), podemos identificar o espaço-tempo de Minkowski com $\mathbb{R}^4$, uma vez que cada acontecimento é univocamente determinado pelas coordenadas Cartesianas (x,y,z) do ponto em que ocorreu e pelo instante t em que ocorreu (registado por um observador em repouso no referencial), ou seja, pelo vector (x,y,z,t) .

Fisicamente, faz sentido que as quatro coordenadas de um acontecimento sejam medidas nas mesmas unidades. Isso pode ser feito utilizando a velocidade da luz como factor de conversão (por exemplo medindo o tempo em anos e as distâncias em anos-luz). Deste modo a velocidade da luz passa a ser exactamente 1 (sem unidades), e qualquer outra velocidade é um número adimensional, indicando a fracção da velocidade da luz que representa.

Nestas unidades, a descoberta de Minkowski pode ser resumida da seguinte forma: um relógio que se mova com velocidade constante entre dois acontecimentos (x_1,y_1,z_1,t_1) e (x_2,y_2,z_2,t_2) mede um intervalo de tempo s dado por

$$s^2=-(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2-(z_2-z_1)^2+(t_2-t_1)^2 \quad .$$

Esta fórmula é muito parecida com a fórmula para a distância Euclidiana entre os dois pontos, dada pelo Teorema de Pitágoras, excepto pelos sinais negativos. Estes sinais e o facto de que $s^2 \geq 0$ têm como consequência

$$\left(\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\right)^2+\left(\frac{y_2-y_1}{t_2-t_1}\right)^2+\left(\frac{z_2-z_1}{t_2-t_1}\right)^2 \leq 1 \quad ,$$

ou seja: a velocidade do relógio tem que ser inferior à velocidade da luz.

Uma vez que é difícil visualizar um espaço a quatro dimensões, consideraremos aqui situações em que apenas uma dimensão espacial é relevante, de modo que o espaço-tempo pode ser identificado com $\mathbb{R}^2$. Se estivermos a analisar uma viagem da Terra à Lua, por exemplo, podemos representar por (x,t) um acontecimento que ocorre a uma distância x da Terra no instante t. Deste modo, a história da Terra é representada pela recta $x=0$, ao passo que a história da Lua é representada pela recta $x=L$, onde L é a distância da Terra à Lua.

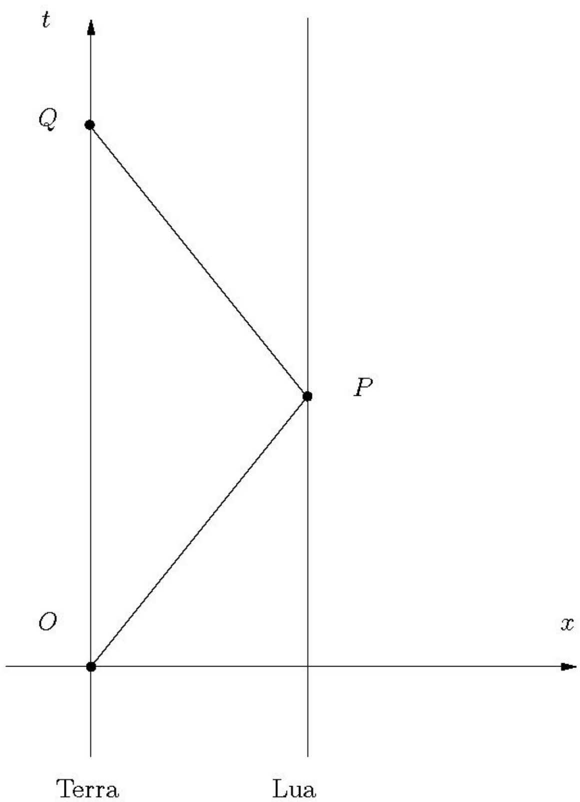

Figura 1. Paradoxo dos gémeos

Consideremos agora a história de uma nave espacial que se move entre a Terra e a Lua com velocidade constante v. Se decidirmos que a partida se dá no instante $t=0$, correspondendo ao acontecimento $O=(0,0)$, vemos que a história da nave na viagem de ida será um segmento da recta $x=vt$. Portanto o acontecimento P em que a nave chega à Lua é a intersecção das rectas $x=vt$ e $x=L$, ou seja, $P=\left(L,\frac{L}{v}\right)$. Um astronauta a bordo da nave espacial mede então para a viagem de ida uma duração

$$s=\sqrt{-L^2+\frac{L^2}{v^2}}=\frac{L}{v}\sqrt{1-v^2} \quad .$$

Analogamente, a história da nave na viagem de regresso será representada por um segmento da recta $x=2\mathrm{L}-vt$, e portanto o acontecimento Q em que a nave regressa à Terra é a intersecção dessa recta com a recta $x=0$, ou seja, $Q=\left(0,\frac{2\mathrm{L}}{v}\right)$. É fácil ver que a duração medida pelo astronauta para a viagem de regresso é igual à da viagem de ida, o que resulta numa duração total

$$s_{astronauta}=\frac{2\mathrm{L}}{v}\sqrt{1-v^2} .$$

Por outro lado, um relógio na Terra mede entre os acontecimentos O e Q um intervalo de tempo

$$s_{Terra}=\frac{2\mathrm{L}}{v} ,$$

ou seja, o astronauta mede uma duração menor para a viagem! Este efeito, conhecido como o paradoxo dos gémeos, é de facto real e já foi medido experimentalmente. Para velocidades habituais é muito pequeno (por exemplo, a máxima velocidade atingida pelas naves Apollo, que de facto viajaram à Lua, foi de 11 quilómetros por segundo; como a velocidade da luz é de 300.000 quilómetros por segundo, isto corresponde a $v\approx 0{,}00004$, pelo que $\sqrt{1-v^2}\approx 0{,}9999999992$). Uma vez que a nossa experiência quotidiana é a de um mundo em que os objectos se movem a velocidades muito inferiores à da luz, o paradoxo dos gémeos parece-nos surpreendente. Do ponto de vista da geometria do espaço-tempo de Minkowski, no entanto, trata-se da afirmação perfeitamente razoável de que a soma dos comprimentos de dois lados de um triângulo não é em geral igual ao comprimento do outro lado. Note-se no entanto que a desigualdade triangular na geometria de Minkowski é inversa da habitual desigualdade triangular da geometria Euclidiana: o comprimento de um dos lados do triângulo (tempo medido na Terra) é maior que a soma dos comprimentos dos outros dois (tempo medido pelo astronauta).

Apesar da Teoria da Relatividade ser sobretudo relevante em situações que envolvem velocidades comparáveis à velocidade da luz, a geometria de Minkowski é aplicável em qualquer situação. Um exemplo prático é o chamado efeito de Doppler, que consiste na diminuição da frequência da luz quando medida por um observador que se afasta. Para calcular esta diminuição de frequência, imaginamos uma fonte luminosa na origem $x=0$ que emite sinais luminosos com um certo período T , os quais são posteriormente detectados por um observador que se afasta com velocidade v . Uma vez que a velocidade da luz é igual a 1, as histórias de dois sinais luminosos consecutivos são as rectas $x=t-t_0$ e $x=t-t_0-T$, ao passo que a história do observador que se afasta é a recta $x=vt$. Deste modo, os acontecimentos correspondentes à detecção dos sinais, ou seja, as intersecções das duas primeiras rectas com a terceira, são os pontos

$$\left(\frac{vt_0}{1-v},\frac{t_0}{1-v}\right) \quad \text{e} \quad \left(\frac{v\left(t_0+T\right)}{1-v},\frac{t_0+T}{1-v}\right) .$$

Portanto o observador mede um intervalo de tempo

$$s=\sqrt{-\left(\frac{vT}{1-v}\right)^2+\left(\frac{T}{1-v}\right)^2}=\frac{T}{1-v}\sqrt{1-v^2}=T\sqrt{\frac{1+v}{1-v}}$$

entre as detecções. Por outras palavras, se a radiação luminosa é emitida com período T então é detectada com período

$$T' = T\sqrt{\frac{1+v}{1-v}}\ .$$

Este desvio de frequência pode ser medido facilmente, sendo usado pela Polícia para controlar a velocidade dos automóveis e pelos astrónomos para medirem a velocidade das estrelas distantes.

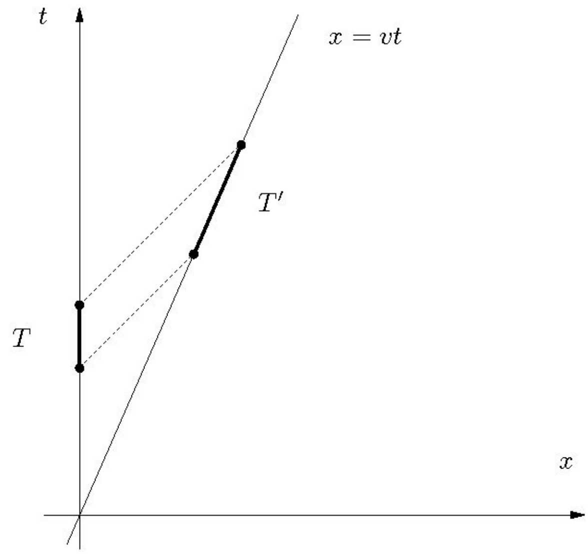

Figura 3. Efeito de Doppler

Quando os astrónomos começaram a medir os espectros das galáxias distantes, descobriram que quase todas se estavam a afastar, com uma velocidade proporcional à sua distância. Para explicar esta expansão do Universo, bem como noutras situações em que a força da gravidade desempenhe um papel relevante (e.g. buracos negros), é necessário recorrer a geometrias curvas, mais complicadas que a geometria de Minkowski. Mas isso já é outra história...