

# A LINGUAGEM SECRETA DO UNIVERSO

JOSÉ NATÁRIO

## 1. A PROFECIA DE GALILEU

Uma das mais notáveis profecias de sempre deve-se a Galileu Galilei (Figura 1), que há mais de quatro séculos escreveu no seu livro *Il Saggiatore*:

*“A Filosofia [Ciência] está escrita neste grande livro, o Universo, que está permanentemente aberto e ao alcance do nosso olhar. Mas o livro não pode ser compreendido sem antes aprendermos a linguagem e os caracteres em que está escrito. A linguagem é a Matemática, e os caracteres são triângulos, círculos e outras figuras geométricas, sem as quais é humanamente impossível compreender uma única palavra.”*

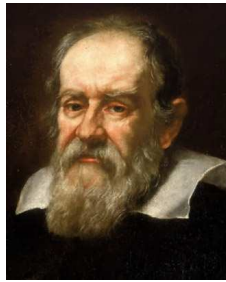


FIGURA 1. Galileu Galilei (1564–1642).

Em que pensaria Galileu enquanto escrevia estas linhas? Uma das ideias que estaria certamente na sua mente seria o facto, descoberto por ele próprio, de que os objectos em queda livre (por exemplo, a água numa fonte) descrevem uma curva com uma forma matemática precisa, conhecida como uma parábola (Figura 2).



FIGURA 2. Manneken Pis (Bruxelas).

Existem muitos outros exemplos de formas geométricas que surgem naturalmente nos fenómenos do dia-a-dia. Por exemplo, o rasto que um objecto flutuante produz ao mover-se à superfície da água faz sempre o mesmo ângulo com a direcção do movimento ( $\arcsen \frac{1}{3}$ , ou seja, cerca de  $19,5^\circ$ ). Este facto é conhecido como o Teorema de Kelvin (Figura 3).



FIGURA 3. Teorema de Kelvin (1824–1907).

O Teorema de Kelvin não era ainda conhecido no tempo de Galileu, mas este tinha muitas outras razões para suspeitar que a linguagem secreta do Universo pudesse ser a Matemática (em especial a Geometria). Por exemplo, séculos de observações astronómicas tinham culminado na formulação das Leis de Kepler (Figura 4), que são eminentemente geométricas. Recordemos que estas leis afirmam que:

- (1) As órbitas dos corpos celestes (planetas, asteróides e cometas) são secções cónicas, com o Sol num dos focos.
- (2) O segmento de recta que une o corpo celeste ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.
- (3) No caso da órbita ser uma elipse, o quadrado do período é proporcional ao cubo do eixo maior da elipse.

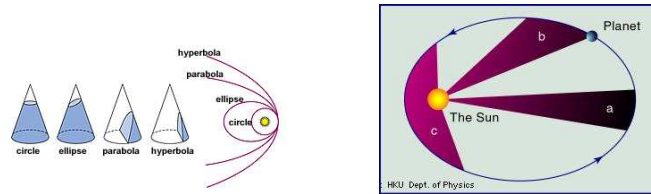


FIGURA 4. Leis de Kepler (1571–1630).

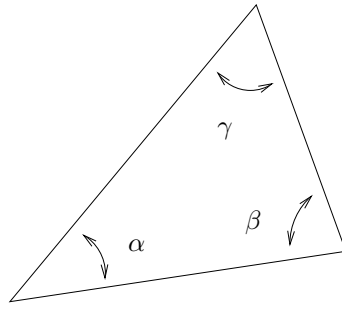
## 2. O QUE É A GEOMETRIA? CURVATURA

O que Galileu entendia por Geometria era aquilo que ainda hoje é ensinado à maior parte das pessoas na sua educação básica: a geometria do plano, sistematizada por Euclides (séc. IV–III a.C.) nos seus *Elementos*. Algures nestes 13 volumes podem ser encontradas, entre outras, as seguintes afirmações:

- (1) Duas rectas distintas intersectam-se no máximo uma vez.
- (2) Existem rectas que não se intersectam (paralelas).
- (3) Os ângulos internos de um triângulo somam  $180^\circ$  (Figura 5).

Existem muitas situações, no entanto, em a geometria relevante não é a Euclidiana, mas sim a geometria dos espaços curvos, sistematizada por Riemann (1826–1866). Nesta geometria, o conceito de recta é substituído pelo de *geodésica* (curva de comprimento mínimo). Na esfera, por exemplo, as geodésicas são os círculos máximos, isto é, círculos que resultam da intersecção da esfera com planos que contêm o seu centro. Exemplos de círculos máximos são o equador ou os meridianos.

Um exemplo prático da importância da geometria não Euclidiana da esfera é o planeamento de uma viagem aérea de longo curso. Por exemplo, é um facto que o Porto e Nova Iorque se encontram aproximadamente à mesma latitude ( $41^\circ$  norte). Poder-se-ia portanto esperar que os aviões voassem do Porto para Nova Iorque directamente para oeste, ao longo do paralelo 41. Contudo, não é isso que eles fazem: na verdade, eles partem com rumo noroeste, virando lentamente para oeste e aterrando com rumo sudoeste (Figura 6). A razão de ser disto é que o paralelo 41 não é uma geodésica, uma vez que o plano que o define não contém o centro da Terra. A trajetória



$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

FIGURA 5. Triângulo Euclidiano.

seguida pelo avião, que procura minimizar a distância a percorrer, é o círculo máximo obtido a partir do plano oblíquo que contém o Porto, Nova Iorque e o centro da Terra.

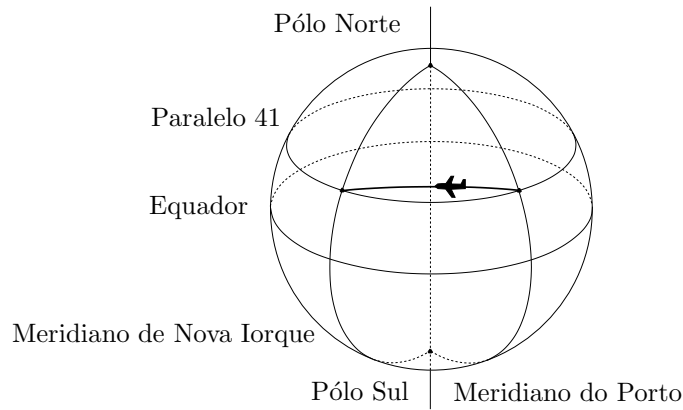


FIGURA 6. Viagem do Porto a Nova Iorque.

A geometria da esfera é bastante diferente da geometria do plano. Por exemplo:

- (1) Duas geodésicas distintas intersectam-se sempre em dois pontos (não existem paralelas).
- (2) Os ângulos internos de um triângulo somam mais de  $180^\circ$ .

Na Figura 7, por exemplo, encontra-se representado um triângulo na esfera com três ângulos rectos (cujos ângulos internos somam portanto  $270^\circ$ ). Definimos a *curvatura média* deste triângulo através da fórmula

$$\text{Curvatura média} = \frac{\hat{\text{Ângulo em excesso}}}{\text{Área do triângulo}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\frac{4\pi R^2}{8}} = \frac{1}{R^2}$$

(onde  $R$  é o raio da esfera e o valor dos ângulos é expresso em radianos). Na esfera, todos os triângulos possuem mesma curvatura média (diz-se que a esfera é uma superfície de curvatura constante). Em geral, contudo, a curvatura de uma superfície varia, sendo dada em cada ponto pelo valor limite da curvatura média de triângulos cada vez mais pequenos em torno desse ponto.

Uma forma alternativa de medir a curvatura média de um triângulo consiste em fazer o chamado *transporte paralelo* de um vector (seta) tangente à superfície ao longo do triângulo, ou seja, mover o vector ao longo do triângulo, mantendo-o tangente à superfície, sem o deixar rodar. No plano Euclideano, esta operação é trivial, e o vector no final do transporte coincide evidentemente com o vector no início do transporte; numa superfície curva, porém, o vector final encontra-se rodado em

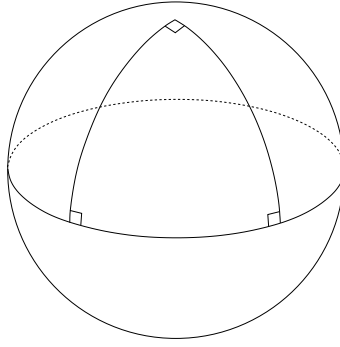


FIGURA 7. Triângulo esférico com três ângulo rectos.

relação ao vector inicial por um ângulo igual ao excesso da soma dos ângulos internos do triângulo sobre os  $180^\circ$  da geometria Euclideana. Este facto encontra-se ilustrado na Figura 8.

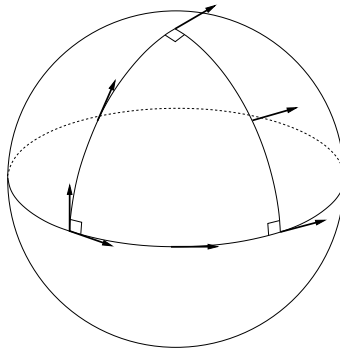


FIGURA 8. Transporte paralelo ao longo de um triângulo esférico.

Um exemplo prático deste fenómeno é fornecido pelo chamado *pêndulo de Foucault*. Um pêndulo de Foucault é simplesmente um pêndulo suficientemente comprido e pesado para se manter a oscilar durante alguns dias (Figura 9; existe também um pêndulo de Foucault no Museu da Ciência em Lisboa). À primeira vista, o plano de oscilação do pêndulo de Foucault parece não variar; ao fim de algumas horas, no entanto, torna-se claro que este plano roda lentamente no sentido horário. A razão de ser desta rotação é o facto de a Terra estar a girar; é fácil imaginar o que sucede a um pêndulo de Foucault no Pólo Norte, cujo plano de oscilação roda  $360^\circ$  por dia. Noutras latitudes, no entanto, não é tão fácil de perceber exactamente como ou quanto é que o plano de oscilação roda por dia.



FIGURA 9. Pêndulo de Foucault do Panteão de Paris.

Uma forma de compreender a rotação do plano de oscilação do pêndulo de Foucault no Panteão de Paris é perceber que este plano define uma direcção tangente à superfície da Terra. Se a Terra não rodasse esta direcção manter-se-ia constante, mas a rotação da Terra arrasta o pêndulo ao longo do paralelo que passa por Paris, completando uma volta a cada 24 horas. O melhor que o pêndulo de Foucault consegue fazer é transportar paralelamente esta direcção ao longo do paralelo, e portanto ao fim de uma volta completa a direcção rodou em relação à direcção inicial (Figura 10).

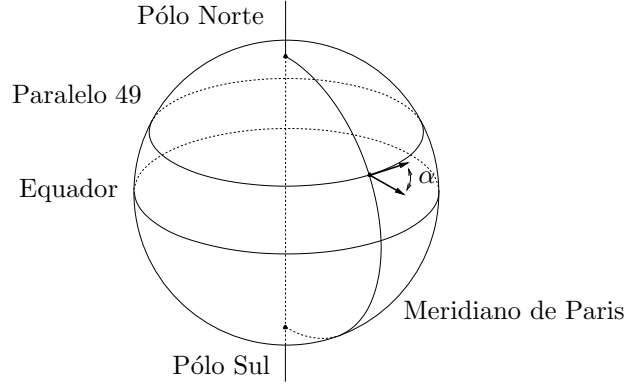


FIGURA 10. Rotação do plano de oscilação do pêndulo de Foucault.

O valor do ângulo de rotação pode ser obtido multiplicando a curvatura da superfície da Terra pela área envolvida pelo paralelo. À latitude  $\lambda$ , o pêndulo de Foucault roda então

$$\alpha = 2\pi - \underbrace{2\pi R(R - R \sin \lambda)}_{\text{área}} \underbrace{\frac{1}{R^2}}_{\text{curvatura}} = 2\pi \sin \lambda \quad \text{radianos por dia}$$

(note-se que o ângulo entre duas direcções tanto pode ser  $\alpha$  como  $2\pi - \alpha$ ; na fórmula acima escolhemos o valor que dá  $2\pi$  no Pólo Norte).

### 3. EINSTEIN: O ESPAÇO É CURVO

Em 1915, Albert Einstein (1879–1955) postulou que a matéria curva o espaço (mais correctamente, o espaço-tempo), e que os raios luminosos seguem as geodésicas deste espaço curvo. Uma consequência deste postulado é o efeito de lente gravitacional, que origina imagens múltiplas de objectos astronómicos (Figura 11).

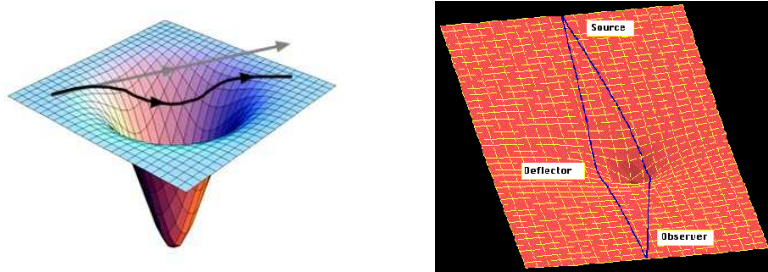


FIGURA 11. Efeito de lente gravitacional.

Na prática, os raios luminosos emitidos pelo objecto desviam-se em relação ao trajecto que seguiriam se não existisse curvatura. O observador pode então receber dois ou mais destes raios luminosos provenientes de direcções diferentes, vendo portanto várias imagens do mesmo objecto

em posições distintas no céu. Em geral é possível também ver o objecto responsável pela curvatura do espaço (Figura 12).

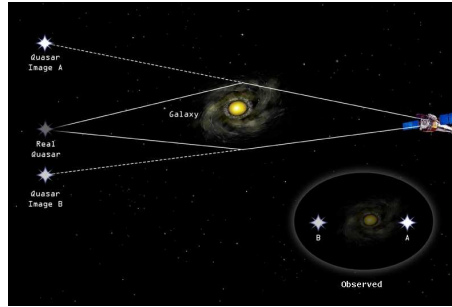


FIGURA 12. Formação de imagens múltiplas.

A Figura 13 mostra duas fotografias reais deste fenómeno. A primeira, conhecida como a *Cruz de Einstein*, contém quatro imagens do mesmo objecto (um quasar), podendo também ver-se a galáxia que produz a curvatura. A segunda contém um *anel de Einstein*; trata-se de um caso em que o alinhamento entre o objecto e o observador é quase perfeito, correspondendo à existência de um número infinito de imagens.

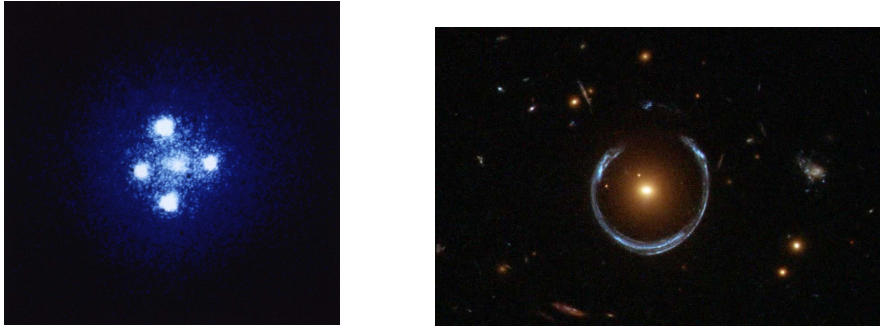


FIGURA 13. Cruz e anel de Einstein.

A curvatura produzida pela Terra foi já medida experimentalmente a bordo do satélite *Gravity Probe B*, lançado em 2004. A experiência consistiu em colocar em órbita ao redor da Terra esferas quase perfeitas, em rotação sobre si próprias. Por motivos técnicos, as esferas foram arrefecidas abaixo de  $-271^{\circ}\text{C}$ , e carregadas electricamente (Figura 14).



FIGURA 14. Montagem da experiência *Gravity Probe B*.

Se o espaço em redor da Terra fosse plano, as direcções dos eixos de rotação das esferas permaneceriam fixas (trata-se do princípio dos giroscópios). Devido à curvatura do espaço, no entanto, o melhor que as esferas conseguem fazer é transportar paralelamente esta direcção, pelo que no final de uma órbita a direcção mudou ligeiramente. Uma vez que a massa da Terra é muito reduzida (à escala astronómica), este efeito é muito pequeno: cerca de 6,6 mili-segundos de arco por ano (Figura 15). No entanto, é real e foi medido.

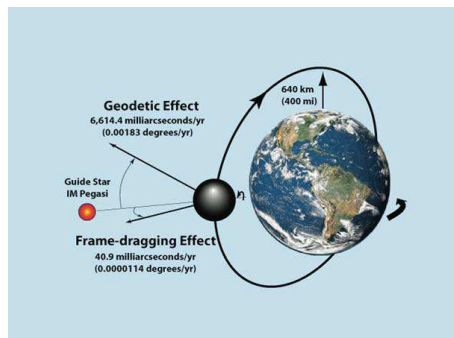


FIGURA 15. Resultado da experiência *Gravity Probe B*.

Os efeitos da curvatura do espaço são importantes na vizinhança de objectos muito compactos, como por exemplo buracos negros. Na Figura 16 podem-se ver imagens de raios X de dois buracos negros: Cisne X-1, com cerca de 15 massas solares, resultante do colapso de uma estrela, e Sagitário A\*, com cerca de 4 milhões de massas solares, situado no centro da nossa galáxia. As imagens não são de facto dos buracos negros, já que estes não emitem luz, mas sim da matéria envolvente (sobretudo hidrogénio) que aquece por fricção ao cair.

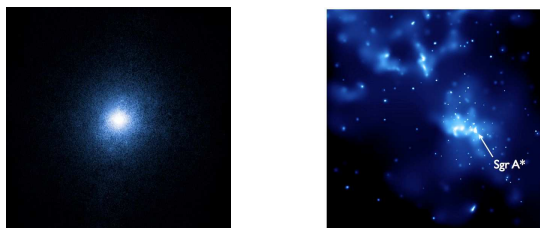


FIGURA 16. Cisne X-1 Sagitário A\* (imagem de raios-X do telescópio Chandra).

A curvatura do espaço na vizinhança de um buraco negro é tão acentuada que existem geodésicas fechadas, como na esfera, correspondendo a raios luminosos circulares (Figura 17). Um observador situado na trajectória de um destes raios veria as suas próprias costas (na realidade veria uma infinidade de imagens de si próprio, dispostas em intervalos regulares, correspondendo a raios de luz que seguissem a geodésica um certo número de vezes desde as suas costas até aos seus olhos; estas imagens estariam desfasadas no tempo, sendo o atraso entre duas imagens dado pelo tempo necessário para percorrer a geodésica). O eixo de um giroscópio transportado ao longo desta geodésica rodaria 360° por órbita.

Na Figura 18 ilustram-se as distorções causadas pelo efeito de lente gravitacional na vizinhança de um buraco negro. Estas imagens, obtidas por simulação num computador, mostram aquilo que se veria se surgisse um buraco negro no céu nocturno, ou em frente do pico Matterhorn, nos Alpes.

#### 4. TEORIAS DE GAUGE

Todas as interacções na Natureza se podem resumir à acção de quatro forças fundamentais. Uma delas é a gravidade, que Einstein explicou com a curvatura do espaço-tempo. As outras três



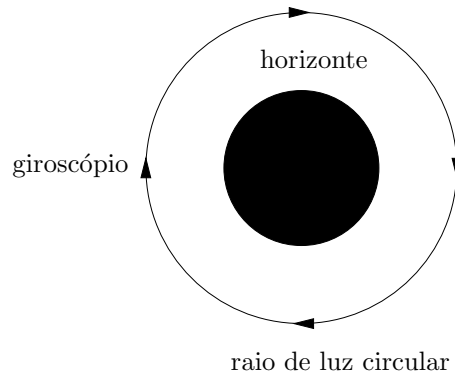


FIGURA 17. Geodésica fechada e transporte paralelo em torno de um buraco negro.

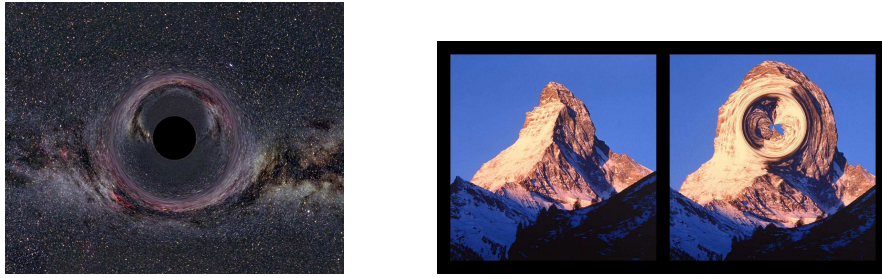


FIGURA 18. Buraco negro a 600 quilómetros e a 600 metros.

podem ser descritas pelas chamadas teorias de gauge, nas quais se admite que em cada ponto do espaço (mais correctamente, do espaço-tempo) existe um espaço interno, formado por vectores complexos. Estes vectores não são directamente observáveis (tecnicamente são apenas os valores da função de onda), mas é possível imaginar transportá-los paralelamente. A curvatura deste transporte paralelo pode ser interpretada como um campo de força, ao qual é natural impor certas condições (as chamadas equações de Yang-Mills).

Se suposermos que o espaço dos vectores internos tem dimensão (complexa) 1, as equações de Yang-Mills reduzem-se às familiares equações de Maxwell para o campo electromagnético. A força electromagnética é responsável pela maioria dos fenómenos do dia-a-dia: estrutura da matéria, forças de contacto entre sólidos, ímãs, baterias, geradores, trovoadas (Figura 19). A própria luz (bem como as ondas de rádio e os raios X) é uma onda electromagnética.



FIGURA 19. Força electromagnética.



Se suposermos que o espaço dos vectores internos tem dimensão (complexa) 2, obtemos as equações para a força nuclear fraca. Trata-se de uma força que só actua à escala subnuclear, e é responsável por certos decaimentos radioactivos, incluindo o que faz funcionar a Tomografia por Emissão de Positrões (Figura 20), no qual o paciente ingere um líquido radioactivo.



FIGURA 20. Força nuclear fraca.

Finalmente, se suposermos que o espaço dos vectores internos tem dimensão (complexa) 3, obtemos as equações para a força nuclear forte. Trata-se da força responsável pela coesão do núcleo atómico, cuja tremenda energia é libertada nas reacções que fazem brilhar o Sol, ou na explosão de uma bomba de hidrogénio (Figura 21).

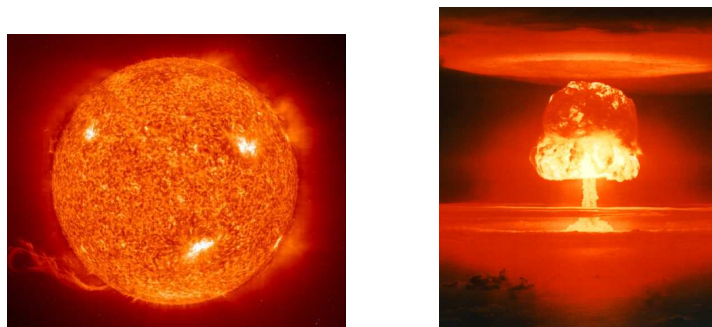


FIGURA 21. Força nuclear forte.

Em conclusão, a profecia de Galileu revelou-se surpreendentemente correcta: a linguagem secreta do Universo é a Matemática, e quanto mais profundamente olhamos para a Natureza mais caracteres geométricos encontramos.