O GPS E A TEORIA DA RELATIVIDADE

JOSÉ NATÁRIO

1. Introdução

Dos muitos milagres tecnológicos de que dispomos no século XXI, e que teriam sem dúvida parecido magia a gerações passadas, existe um que mudou completamente a forma como nos orientamos à superfície do planeta Terra: o Sistema de Posicionamento Global, ou GPS na sigla inglesa (de *Global Positioning System*). O seu aparecimento alterou a forma como se navega, como se conduzem guerras, e até os mapas (que se julgavam rigorosos) de cidades tão cartografadas nos últimos séculos como Paris ou Nova Iorque. O seu funcionamento é quase uma epítome da ciência e engenharia modernas: baseia-se num sistema de satélites (engenharia aeroespacial) que emitem sinais de rádio (engenharia de telecomunicações), cujo tempo de propagação é medido por relógios atómicos (Mecânica Quântica) tão precisos que requerem correcções devidas à dilatação do tempo (Teoria da Relatividade), sendo o cálculo da posição realizado em tempo real por um aparelho que cabe na palma da mão (engenharia de computadores).

Por detrás disto tudo está, claro, a Matemática. Neste capítulo explicaremos o funcionamento geral do GPS, e a Matemática, muito simples, da determinação da posição do receptor a partir dos sinais dos satélites. Depois analisaremos duas das correcções mais interessantes que é necessário aplicar no cálculo da posição correcta: as correcções devidas à dilatação do tempo para relógios em movimento (que é uma consequência simples da invariância da velocidade da luz e do Teorema de Pitágoras) e para relógios num campo gravitacional. Este exemplo ilustra não só o papel central desempenhado pela Matemática na compreensão do mundo natural, mas também a importância da ciência fundamental: assuntos cujo interesse inicial é meramente teórico acabam por, mais tarde ou mais cedo, encontrar aplicações práticas relevantes, e em geral imprevisíveis.

2. GPS

Hoje em dia, o uso do Sistema de Posicionamento Global é generalizado. Por menos de 100 euros, é possível adquirir um receptor de GPS (Figura 1), capaz de indicar a sua posição exacta em qualquer ponto da superfície da Terra. Muitos objectos de uso corrente, desde telemóveis a automóveis, vêm já equipados com estes aparelhos. Além das aplicações civis e militares óbvias, da aviação à cartografia, o GPS tem aplicações científicas importantes, como por exemplo a medição do movimento de falhas geológicas durante tremores de terra; deu ainda origem a actividades recreativas completamente novas, como o popular jogo *geocaching*.

Figura 1. Receptor de GPS (fonte: TomTom).

2.1. **Ideia básica.** A ideia básica do GPS é muito simples: existe uma frota ("constelação" na terminologia do GPS) de satélites em órbita ao redor da Terra, que conhecem as suas órbitas com enorme exactidão, e transportam a bordo relógios atómicos muito precisos (Figura 2). Periodicamente, um sinal de rádio é emitido por cada satélite, no qual este indica a hora exacta que marca o seu relógio, bem como a sua posição nesse preciso instante.

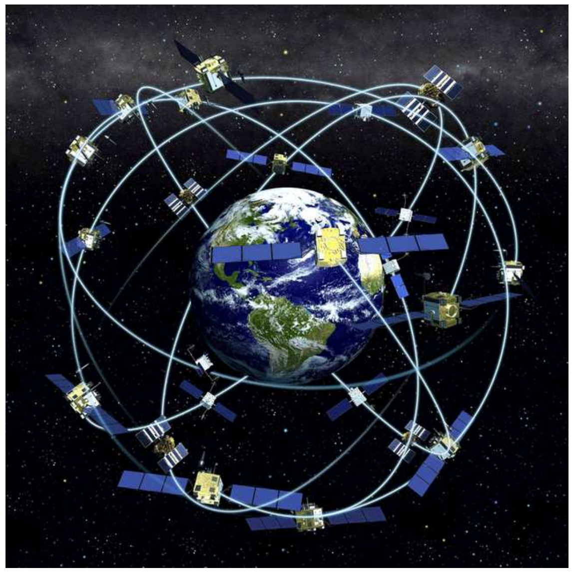


FIGURA 2. Constelação de satélites do GPS (fonte: NASA).

Suponhamos que num dado instante t o receptor de GPS recebe sinais de três satélites. O sinal do primeiro satélite indica que este se encontrava na posição (x_1, y_1, z_1) no instante t_1. Se c for a velocidade da luz, o sinal de rádio terá viajado uma distância $c(t - t_1)$. Deste modo, o receptor sabe que a sua posição (x, y, z) se encontra na superfície esférica de raio $c(t - t_1)$ centrada no ponto (x_1, y_1, z_1), ou seja, é uma solução da equação

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = c^2(t - t_1)^2.$$

Da mesma forma, se o segundo satélite comunica que se encontrava na posição (x_2, y_2, z_2) no instante t_2, o receptor conclui que se encontra algures na superfície esférica de equação

$$(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = c^2(t - t_2)^2.$$

Estas duas superfícies esféricas intersectam-se numa circunferência[1]. De facto, subtraindo as equações obtemos

$$2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y + 2(z_1 - z_2)z = I_{12},$$

onde

$$I_{12} = {x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2 - c^2(t - t_1)^2 - {x_2}^2 - {y_2}^2 - {z_2}^2 + c^2(t - t_2)^2.$$

Esta equação é a equação de um plano, que intersecta as duas superfícies esféricas numa circunferência comum. Finalmente, se o terceiro satélite indica que se encontrava no ponto (x_3, y_3, z_3) no instante t_3, o receptor sabe que está algures na superfície esférica de equação

$$(x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = c^2(t - t_3)^2,$$

ou, equivalentemente, no plano de equação

$$2(x_1 - x_3)x + 2(y_1 - y_3)y + 2(z_1 - z_3)z = I_{13},$$

[1] Ignoramos o caso especial em que as superfícies esféricas se intersectam num único ponto, isto é, são tangentes; na prática, esta situação nunca ocorre.

com

$$I_{13} = {x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2 - c^2(t - t_1)^2 - {x_3}^2 - {y_3}^2 - {z_3}^2 + c^2(t - t_3)^2.$$

É agora imediata a conclusão que as três superfícies esféricas se intersectam em dois pontos (Figura 3): de facto, os dois planos intersectam-se numa recta, que por sua vez intersecta a primeira superfície esférica em dois pontos. Matematicamente, o receptor resolve o sistema de três equações quadráticas

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = c^2(t - t_1)^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = c^2(t - t_2)^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = c^2(t - t_3)^2 \end{cases}$$

ou, equivalentemente, o sistema de uma equação quadrática e duas equações lineares

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = c^2(t - t_1)^2 \\ 2(x_1 - x_2)x + 2(y_1 - y_2)y + 2(z_1 - z_2)z = I_{12} \\ 2(x_1 - x_3)x + 2(y_1 - y_3)y + 2(z_1 - z_3)z = I_{13} \end{cases}$$

obtendo duas soluções possíveis para a sua posição. Em geral, apenas uma destas soluções se encontra sobre a superfície da Terra, e essa será a verdadeira posição. Alternativamente, o sinal de um quarto satélite pode ser utilizado para remover a ambiguidade.

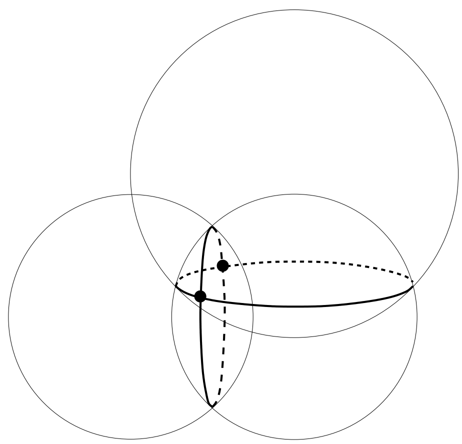


FIGURA 3. Intersecção de três superfícies esféricas.

2.2. **Corrigindo o tempo.** O mundo real é sempre mais complicado que as nossas idealizações. A ideia do funcionamento do receptor de GPS descrita anteriormente presume que o relógio do receptor é suficientemente preciso, mas na realidade os únicos relógios suficientemente precisos para uso no GPS são os relógios atómicos, cujo custo é de muitos milhares de euros. A razão da necessidade de tal precisão é simples de compreender: o GPS funciona medindo o tempo que os sinais de rádio demoram a viajar dos satélites até ao receptor. Os sinais de rádio viajam à velocidade da luz, 300.000 quilómetros por segundo, ou seja, cerca de 30 centímetros por nano-segundo (1 nano-segundo corresponde a 10^{-9} segundos). Assim, para que a medição da posição tenha uma precisão de 5 metros, por exemplo, é necessário que a medição do intervalo de tempo tenha uma precisão de 15 nano-segundos.

Felizmente, não é necessário pagar muitos milhares de euros por um receptor de GPS: basta que o receptor use os sinais de *quatro* satélites, e resolva o correspondente sistema de equações

$$\begin{cases} (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = c^2(t - t_1)^2 \\ (x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 + (z - z_2)^2 = c^2(t - t_2)^2 \\ (x - x_3)^2 + (y - y_3)^2 + (z - z_3)^2 = c^2(t - t_3)^2 \\ (x - x_4)^2 + (y - y_4)^2 + (z - z_4)^2 = c^2(t - t_4)^2 \end{cases}$$

em ordem às variáveis (x, y, z, t). Desta forma, não só obtém uma posição (x, y, z) cuja precisão é determinada pela precisão dos relógios atómicos a bordo dos satélites, como pode ainda ele próprio ser utilizado como um relógio atómico muito preciso!

O sistema de equações quadráticas acima corresponde à intersecção de quatro hipersuperfícies cónicas em $\mathbb{R}^4$, e pode ser substituido pelo sistema de uma equação quadrática e três equações lineares

$$\begin{cases} (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = c^2(t-t_1)^2 \\ 2(x_1-x_2)x + 2(y_1-y_2)y + 2(z_1-z_2)z - 2c^2(t_1-t_2)t = J_{12} \\ 2(x_1-x_3)x + 2(y_1-y_3)y + 2(z_1-z_3)z - 2c^2(t_1-t_3)t = J_{13} \\ 2(x_1-x_4)x + 2(y_1-y_4)y + 2(z_1-z_4)z - 2c^2(t_1-t_4)t = J_{14} \end{cases}$$

onde agora

$$J_{12} = {x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2 - c^2{t_1}^2 - {x_2}^2 - {y_2}^2 - {z_2}^2 + c^2{t_2}^2,$$

e analogamente para J_{13} e J_{14}. O novo sistema corresponde à intersecção de uma hipersuperfície cónica e três hiperplanos. Os hiperplanos intersectam-se numa recta, que por sua vez intersecta a hipersuperfície cónica em dois pontos (Figura 4). O receptor obtém assim duas possibilidades para a sua posição, escolhendo então aquela que corresponde a um ponto da superfície da Terra. Alternativamente, o sinal de um quinto satélite pode ser utilizado para remover a ambiguidade.

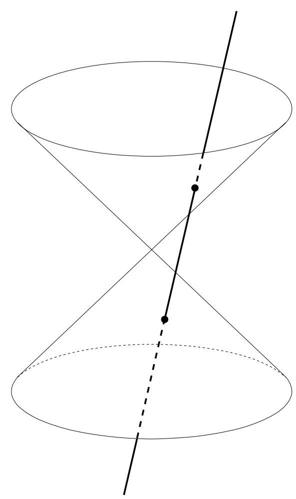


Figura 4. Intersecção de uma recta com uma superfície cónica.

Um detalhe técnico final é que (obviamente) os sinais dos satélites não são recebidos no mesmo instante exacto t. Suponhamos que o sinal do primeiro satélite é recebido quando o relógio do receptor marca t'_1, sendo a hora exacta na verdade $t'_1 + \delta$, onde δ é o desvio do relógio do receptor (de quartzo, portanto de baixa precisão) em relação aos relógios atómicos dos satélites. Assim, a equação correspondente ao sinal do primeiro satélite é na realidade

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = c^2(t'_1 + \delta - t_1)^2,$$

e o sistema de equações quadráticas que o receptor usa para determinar a sua posição é

$$\begin{cases} (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2 = c^2(t'_1 + \delta - t_1)^2 \\ (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 + (z-z_2)^2 = c^2(t'_2 + \delta - t_2)^2 \\ (x-x_3)^2 + (y-y_3)^2 + (z-z_3)^2 = c^2(t'_3 + \delta - t_3)^2 \\ (x-x_4)^2 + (y-y_4)^2 + (z-z_4)^2 = c^2(t'_4 + \delta - t_4)^2 \end{cases}$$

a resolver em ordem às variáveis (x, y, z, δ). O desvio δ do relógio do receptor em relação aos relógios atómicos vai variando ao longo do tempo, mas mantém-se suficientemente estável durante o cálculo para não afectar a precisão. Conhecendo este desvio, o receptor pode assim funcionar como um relógio de precisão idêntica à de um relógio atómico.

2.3. **Outras correcções.** Existem outras correcções que é necessário fazer no cálculo da posição do receptor de GPS. Parte delas prendem-se com o facto de que os sinais dos satélites se propagam na atmosfera, e portanto a sua velocidade não é exactamente a velocidade c da luz no vácuo. Para piorar as coisas, esta velocidade varia no espaço e no tempo, em função da ionização e da humidade das diversas camadas atmosféricas. Outras correcções tornam-se necessárias para eliminar os efeitos de reflexões dos sinais de GPS (em edifícios próximos, por exemplo), que podem ser confundidas com o verdadeiro sinal. Existem diversos métodos para implementar estas correcções, como usar duas frequências distintas no sinal de GPS, que reagem à ionização de maneira diferente, permitindo estimar o atraso devido a este fenómeno.

Existe ainda um terceiro tipo de correcções, mais interessantes, tornadas necessárias pela incrível precisão requerida na medição dos intervalos de tempo. Tal precisão leva-nos a ter que examinar a própria natureza do tempo, que foi profundamente reformulada por Einstein[2] na sua Teoria da Relatividade.

3. Relatividade

Em finais do século XIX tornou-se claro que a velocidade da luz era especial: cuidadosas experiências desenhadas para detectar variações na velocidade da luz devidas ao movimento anual da Terra em torno do Sol registavam resultados teimosamente nulos. A velocidade da luz parecia ser sempre a mesma, independentemente das velocidades da fonte e do observador. Isto é altamente contra-intuitivo, uma vez que um observador que se mova na mesma direcção que um raio de luz, por exemplo, vê esse raio de luz percorrer uma distância menor num dado intervalo de tempo, e portanto deveria obter uma velocidade menor.

Após um período de grande confusão, Einstein sugeriu, em 1905, uma solução tão simples quanto engenhosa: a única forma de observadores diferentes obterem o mesmo valor para a velocidade da luz seria medirem intervalos de tempo diferentes entre os mesmos acontecimentos. Esta explicação, que veio a ser conhecida como a Teoria da Relatividade Restrita, revelou-se correcta: relógios em movimento (num referencial inercial) atrasam-se em relação a relógios parados.

Figura 5. Albert Einstein.

Mais tarde, ao tentar incorporar a gravitação na sua teoria, Einstein desenvolveu a chamada Teoria da Relatividade Geral, publicada em 1915, na qual concluiu que o ritmo de um relógio depende não só da sua velocidade mas também do local em que este se encontra: relógios colocados em pontos mais baixos de um campo gravitacional atrasam-se em relação a relógios colocados em pontos mais altos.

Uma vez que os satélites do GPS são basicamente relógios em órbita (portanto movendo-se a grandes velocidades num ponto elevado do campo gravitacional da Terra), que devem estar

[2]Albert Einstein (1879 – 1955), físico alemão, prémio Nobel da Física (1921).

certos com uma precisão de nano-segundos, ambos os efeitos previstos por Einstein têm que ser cuidadosamente considerados.

3.1. **Relatividade Restrita.** Para calcular o atraso num relógio em movimento previsto pela teoria da Relatividade Restrita consideremos um referencial inercial S', que se move com velocidade v ao longo do eixo dos xx de um outro referencial inercial S. Em S' foi instalado um *relógio de luz*, formado por dois espelhos, E e F, colocados na origem e num certo ponto do eixo dos $y'y'$, como ilustrado na Figura 6. Um "tic" do relógio de luz corresponde a um ciclo em que um sinal luminoso parte do espelho E, é reflectido no espelho F, e regressa ao espelho E, ou seja, a um intervalo de tempo

$$\Delta t' = \frac{2\Delta y'}{c},$$

onde $\Delta y'$ é a distância entre os dois espelhos em S' e c é a velocidade da luz.

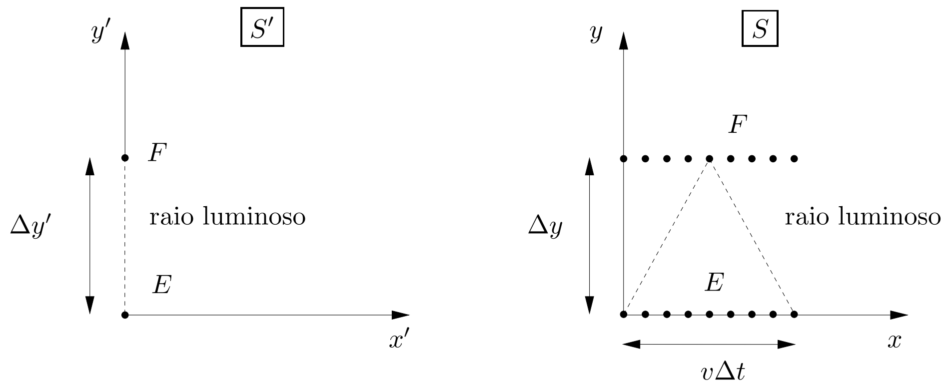


Figura 6. Relógio de luz.

No referencial S, no entanto, os espelhos estão em movimento, e portanto o sinal luminoso percorre uma distância diferente. Uma vez que a velocidade da luz possui o mesmo valor c em S, é claro da Figura 6 e do Teorema de Pitágoras que

$$(\Delta y)^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2,$$

onde Δy é a distância entre os dois espelhos medida em S e Δt é o intervalo de tempo correspondente a um "tic" do relógio medido em S. Se admitirmos a hipótese razoável de que a distância entre os espelhos medida nos dois referenciais é a mesma, $\Delta y = \Delta y'$, obtemos

$$\left(\frac{c\Delta t'}{2}\right)^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2,$$

donde rapidamente se conclui que o observador em S' mede um intervalo de tempo *menor* para um "tic" do seu relógio de luz do que um observador em S:

$$\boxed{\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

($\Delta t'$ é o intervalo de tempo medido por um observador que se move com velocidade v em relação a um observador inercial que mede um intervalo de tempo Δt). Esta é a famosa fórmula da dilatação do tempo: relógios em movimento funcionam a um ritmo mais lento do que relógios repouso. Em situações do dia-a-dia, as velocidades v são muito inferiores a c, e portanto $\Delta t'$ e Δt são muito aproximadamente iguais; no entanto, em situações que envolvam velocidades comparáveis à velocidade da luz (como por exemplo em aceleradores de partículas), ou grandes precisões na medida dos intervalos de tempo (como é o caso do GPS), a dilatação do tempo tem que ser levada em conta.

3.2. **Gravidade Newtoniana.** Recordemos que um campo gravitacional Newtoniano é descrito pela chamada função potencial gravitacional $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, a partir da qual se constrói o campo gravitacional $\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de acordo com a fórmula $\mathbf{G} = -\operatorname{grad} \Phi$. A trajectória $\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ de uma partícula de massa m em queda livre no campo gravitacional satisfaz a equação diferencial

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{G}$$

(segunda lei de Newton[3]). Por outras palavras, a aceleração sofrida por uma partícula em queda livre é $\mathbf{G}$, independentemente da partícula (uma observação devida a Galileu[4]). Uma consequência da segunda lei de Newton é que a energia total

$$E = \frac{1}{2}m\left\langle \frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\rangle + m\Phi$$

é conservada. De facto, temos

$$\frac{dE}{dt} = m\left\langle \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\rangle + m\left\langle \operatorname{grad}\Phi, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\rangle = \left\langle m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} - m\mathbf{G}, \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right\rangle = 0.$$

O termo $m\Phi$ representa portanto a energia potencial gravitacional da partícula. Da equação de conservação de energia esperamos que as velocidades típicas de partículas em queda livre no campo gravitacional sejam da ordem de $\sqrt{|\Phi|}$. O campo é considerado fraco (do ponto de vista da Teoria da Relatividade) se esta velocidade característica for muito inferior à velocidade da luz. Para campos fracos é possível usar as fórmulas Newtonianas acima; caso contrário é necessário entrar em conta com a dilatação do tempo, o que acaba por nos levar à Teoria da Relatividade Geral.

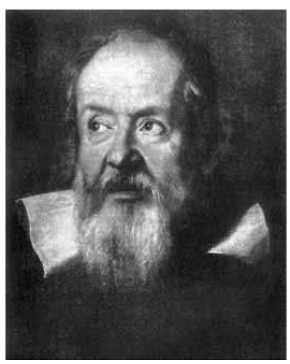


Figura 7. Galileu Galilei e Isaac Newton.

Recordemos ainda que o potencial gravitacional criado por uma massa M esfericamente simétrica é dado por

$$\Phi = -\frac{GM}{r},$$

onde G é a constante de gravitação universal e $r = \|\mathbf{r}\|$ designa a distância ao centro. O correspondente campo gravitacional é

$$\mathbf{G} = -\frac{GM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}.$$

A velocidade v de uma órbita circular neste campo pode ser obtida a partir da segunda lei de Newton: para uma tal órbita r é constante, e por conservação de energia v é também constante. A aceleração é portanto apenas a aceleração centrípeta

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{v^2}{r}\frac{\mathbf{r}}{r},$$

[3]Sir Isaac Newton (1643–1727), físico, matemático, astrónomo, filósofo e alquimista inglês.

[4]Galileu Galilei (1564 – 1642), astrónomo, físico e filósofo italiano.

e igualando à expressão para $\mathbf{G}$ acima obtém-se

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{r}}}$$

(note-se que esta é precisamente a velocidade típica $\sqrt{|\Phi|}$).

3.3. **Relatividade Geral.** A Teoria da Relatividade Geral é muito mais sofisticada que a Teoria da Relatividade Restrita, e não pode ser verdadeiramente compreendida sem Geometria Diferencial, que é o ramo da Matemática que estuda a geometria dos espaços curvos. Para campos gravitacionais fracos, no entanto, é possível obter por métodos elementares uma fórmula aproximada para a dilatação do tempo sofrida por um relógio nesse campo. Deduziremos essa fórmula usando dois argumentos diferentes, ambos essencialmente devidos a Einstein.

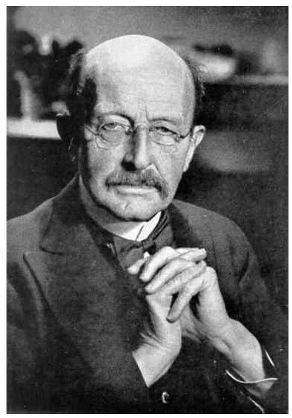


FIGURA 8. Max Planck.

O primeiro argumento utiliza uma combinação de Mecânica Quântica e Relatividade Restrita. Da Mecânica Quântica sabemos que a luz se comporta como se fosse constituida por partículas, chamadas fotões, com energia dada pela *relação de Planck*[5]

$$E = \frac{h}{T},$$

onde h é a constante de Planck e T é o período da radiação. Da *relação de equivalência massa-energia*

$$E = mc^2,$$

deduzida por Einstein como consequência da Relatividade Restrita (ver Apêndice), concluimos que a cada fotão corresponde uma certa massa, e portanto é de esperar que um fotão que sobe num campo gravitacional perca energia (caso contrário seria fácil construir uma máquina de movimento perpétuo). Sejam E e T a energia e o período de um fotão num dado ponto $\mathbf{r}$ de um campo gravitacional, e E', T' as mesmas quantidades num outro ponto $\mathbf{r}'$. A relação de Planck-Einstein implica que

$$ET = h = E'T'.$$

Se $\Delta\Phi = \Phi(\mathbf{r}') - \Phi(\mathbf{r})$ for a diferença de potencial entre $\mathbf{r}'$ e $\mathbf{r}$, é de esperar que

$$E' \simeq E - m\Delta\Phi \simeq E - \frac{E}{c^2}\Delta\Phi = \left(1 - \frac{\Delta\Phi}{c^2}\right)E.$$

Portanto

$$T \simeq \left(1 - \frac{\Delta\Phi}{c^2}\right)T'.$$

[5]Max Planck (1858–1947), físico alemão, prémio Nobel da Física (1918).

Para campos gravitacionais fracos, onde podemos usar a descrição Newtoniana do campo gravitacional, a quantidade $\left|\frac{\Delta\Phi}{c^2}\right|$ é muito inferior a 1. Usando a aproximação de primeira ordem

$$\frac{1}{1-x} \simeq 1 + x,$$

válida para $|x|$ muito menor que 1, temos então

$$T' \simeq \left(1 + \frac{\Delta\Phi}{c^2}\right) T.$$

Por outras palavras, o período da radiação aumenta à medida que esta sobe num campo gravitacional. Como podemos conciliar esta observação com o facto de que a velocidade da luz não varia? Se imaginarmos um sinal luminoso de um dado período como uma sequência de *flashes* instantâneos, é evidente que a invariância da velocidade da luz força os períodos entre os *flashes* a serem os mesmos para todos os observadores em repouso, *a menos que os relógios destes observadores funcionem a ritmos diferentes*. De facto se supusermos que um relógio colocado em $\mathbf{r}'$ mede um intervalo de tempo

$$\Delta t' \simeq \left(1 + \frac{\Delta\Phi}{c^2}\right) \Delta t$$

sempre que um relógio idêntico colocado em $\mathbf{r}$ mede um intervalo de tempo Δt, a relação acima entre os períodos da radiação torna-se compatível com a invariância da velocidade da luz. No limite em que o ponto $\mathbf{r}$ está "no infinito", onde o potencial é zero, obtém-se $\Delta\Phi = \Phi(\mathbf{r}')$, e portanto

$$\boxed{\Delta t' \simeq \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right) \Delta t}$$

($\Delta t'$ é o intervalo de tempo medido num ponto onde o potencial gravitacional é Φ quando o mesmo intervalo de tempo medido por um observador no infinito é Δt). Esta é a famosa fórmula da dilatação gravitacional do tempo: relógios num ponto mais baixo de um campo gravitacional funcionam a um ritmo mais lento do que relógios "no infinito". Em situações do dia-a-dia, o valor absoluto do potencial gravitacional Φ é muito inferior a c^2, e portanto $\Delta t'$ e Δt são muito aproximadamente iguais; no entanto, em situações que envolvam campos gravitacionais fortes (como por exemplo próximo de buracos negros), ou grandes precisões na medida dos intervalos de tempo (como é o caso do GPS), a dilatação gravitacional do tempo tem que ser levada em conta.

Um segundo argumento para a validade da fórmula acima utiliza o chamado Princípio da Equivalência, formulado por Einstein em 1907. Este princípio postula que as forças de inércia que surgem num referencial acelerado são indistinguíveis de um campo gravitacional. Consideremos então um referencial em rotação uniforme (portanto acelerado), com velocidade angular constante ω. A velocidade de um observador em repouso neste referencial (em relação a um referencial inercial que não roda) é $v = \omega r$, onde r é a distância ao eixo de rotação, e portanto o seu relógio mede intervalos de tempo

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{\omega^2 r^2}{c^2}}$$

em relação aos intervalos de tempo Δt medidos no referencial inercial (ou no eixo de rotação). Por outro lado, a aceleração centrífuga no referencial em rotação pode ser interpretada como um campo gravitacional

$$\mathbf{G} = \frac{v^2}{r}\frac{\mathbf{r}}{r} = \omega^2 \mathbf{r} = -\operatorname{grad}\Phi,$$

onde $\mathbf{r}$ é a componente do vector posição ortogonal ao eixo de rotação e

$$\Phi = -\frac{1}{2}\omega^2 r^2.$$

Note-se que $\Phi = 0$ no eixo de rotação, pelo que os observadores no eixo de rotação correspondem aos observadores "no infinito" no argumento anterior. Deste modo, temos

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 + \frac{2\Phi}{c^2}}$$

ou, usando a aproximação de primeira ordem

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} \simeq 1 + \frac{x}{2},$$

válida para $|x|$ muito menor que 1, obtemos novamente

$$\Delta t' \simeq \Delta t \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right).$$

4. GPS e Relatividade

Temos agora a informação necessária para calcular as correcções relativistas a aplicar aos relógios atómicos transportados pelos satélites do GPS. Recordemos que estes satélites emitem regularmente a hora exacta que marca o seu relógio, bem como sua posição nesse preciso instante. Esta posição é calculada a partir da hora marcada no relógio, uma vez que as órbitas dos satélites são conhecida com grande precisão, sendo constantemente monitorizadas por estações de rastreio à superfície da Terra (Figura 9); as *efemérides*, isto é, as constantes numéricas necessárias para escrever as equações da órbita, são actualizadas a cada duas horas. Estas constantes são ajustadas usando o tempo medido pelos relógios atómicos nas estações de rastreio, que tem então que ser convertido no tempo medido a bordo dos satélites.

Figura 9. Estação de rastreio do GPS usada entre 1984 e 2007.

4.1. Cálculo da correcção relativista.

Sendo a Terra muito aproximadamente esférica, o seu potencial gravitacional é dado por

$$\Phi = -\frac{GM}{r},$$

onde M é a massa da Terra. O valor do factor GM pode ser facilmente calculado a partir da aceleração da gravidade à superfície da Terra, $g \simeq 9,8$ metros por segundo quadrado, e do raio da Terra, $R \simeq 6.400$ quilómetros, notando que

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{GM = gR^2}$$

Se um observador inercial "no infinito" mede um intervalo de tempo Δt, um satélite que se move com velocidade v num ponto a uma distância r do centro da Terra mede um intervalo de tempo

$$\Delta t_{SAT} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right) \Delta t \simeq \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right)\left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right) \Delta t,$$

onde usámos a aproximação de primeira ordem, uma vez que a velocidade do satélite é muito inferior à velocidade da luz. Utilizando ainda a aproximação de primeira ordem $(1+x)(1+y) \simeq 1 + x + y$, válida para $|x|$ e $|y|$ muito menores que 1, temos então

$$\Delta t_{SAT} \simeq \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{GM}{c^2 r}\right) \Delta t.$$

Do mesmo modo, um observador à superfície da Terra mede um intervalo de tempo

$$\Delta t_{TERRA} \simeq \left(1 - \frac{V^2}{2c^2} - \frac{GM}{c^2R}\right)\Delta t,$$

onde V é a velocidade de rotação da Terra no ponto onde se encontra o observador. Portanto

$$\begin{aligned}\frac{\Delta t_{SAT}}{\Delta t_{TERRA}} &\simeq \frac{1 - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{GM}{c^2r}}{1 - \frac{V^2}{2c^2} - \frac{GM}{c^2R}} \simeq \left(1 - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{GM}{c^2r}\right)\left(1 + \frac{V^2}{2c^2} + \frac{GM}{c^2R}\right) \\ &\simeq 1 - \frac{v^2}{2c^2} - \frac{GM}{c^2r} + \frac{V^2}{2c^2} + \frac{GM}{c^2R},\end{aligned}$$

onde usámos novamente a aproximação de primeira ordem. Se assumirmos que o satélite se move numa órbita circular, sabemos que

$$v^2 = \frac{GM}{r},$$

pelo que obtemos finalmente

$$\boxed{\frac{\Delta t_{SAT}}{\Delta t_{TERRA}} \simeq 1 - \frac{3v^2}{2c^2} + \frac{V^2}{2c^2} + \frac{GM}{c^2R}}$$

(Δt_{SAT} é o intervalo de tempo medido a bordo dos satélites, Δt_{TERRA} é o intervalo de tempo medido à superfície da Terra, v é a velocidade orbital dos satélites, V é a velocidade de rotação da Terra no ponto da superfície considerado, M e R são a massa e o raio da Terra). Seja T o período da órbita circular. Eliminando r do sistema de equações

$$\begin{cases} v^2 = \dfrac{GM}{r} \\ \\ v = \dfrac{2\pi r}{T} \end{cases}$$

obtemos

$$v = \left(\frac{2\pi GM}{T}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{2\pi g R^2}{T}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

As órbitas dos satélites do GPS têm um período de 12 horas (de modo que as posições dos satélites se repetem duas vezes por dia). Substituindo os valores de g, R e T (em unidades consistentes!) na expressão acima obtemos $v \simeq 3,9$ quilómetros por segundo, donde

$$\frac{3v^2}{2c^2} \simeq 2,5 \times 10^{-10}.$$

Uma vez que a Terra completa uma rotação a cada 24 horas, a sua velocidade de rotação no equador é

$$V \simeq \frac{2\pi \times 6.400}{24 \times 3.600} \simeq 0,47 \text{ quilómetros por segundo},$$

pelo que

$$\frac{V^2}{2c^2} \simeq 1,2 \times 10^{-12}.$$

Esta correcção é da ordem de uma centésima da correcção devida à posição e movimento do satélite, e portanto pode ser ignorada. Deste modo, é irrelevante se o tempo medido à superfície da Terra é medido no equador ou em qualquer outro ponto. Finalmente,

$$\frac{GM}{c^2R} = \frac{gR}{c^2} \simeq 7,0 \times 10^{-10}.$$

Concluímos portanto que

$$\frac{\Delta t_{SAT}}{\Delta t_{TERRA}} \simeq 1 + 4,5 \times 10^{-10},$$

ou seja, o relógio no satélite adianta-se por dia cerca de

$$4,5 \times 10^{-10} \times 24 \times 3.600 \simeq 4,0 \times 10^{-5} \text{ segundos}$$

em relação a um relógio à superfície da Terra. Se o receptor de GPS tivesse o seu próprio relógio atómico, e calculasse a sua posição simplesmente comparando o seu relógio com o tempo indicado pelos sinais dos satélites, a dessincronização dos relógios ao fim de um dia corresponderia um erro na posição do receptor de cerca de $4,0 \times 10^{-5} \times 300.000 \simeq 12$ quilómetros. Este número é muitas vezes citado como sendo o erro acumulado diariamente pelo GPS se as correcções relativistas não fossem efectuadas, mas isto não está correcto, porque na prática, como vimos, o receptor de GPS usa os relógios atómicos dos satélites. O erro acumulado viria simplesmente do facto das equações para a posição do satélite em função do tempo, obtidas pelas estações de rastreio, utilizarem o tempo à superfície da Terra, e não o tempo medido pelos relógios dos satélites. Ao fim de um dia os satélites errariam o cálculo da sua posição em apenas cerca de $4,0 \times 10^{-5} \times 3.900 \simeq 0,16$ metros, um número muito menos dramático que os 12 quilómetros, mas igualmente importante: caso as correcções relativistas não fossem efectuadas, o GPS estaria a errar por um metro ao fim de uma semana, por cinco metros ao fim de um mês, e por 56 metros ao fim de um ano.

4.2. **Efeito de Sagnac.** Uma outra complicação introduzida pela Teoria da Relatividade no GPS é o *efeito de Sagnac*[6], que dificulta a sincronização dos relógios atómicos das várias estações de rastreio à superfície da Terra (Figura 10).

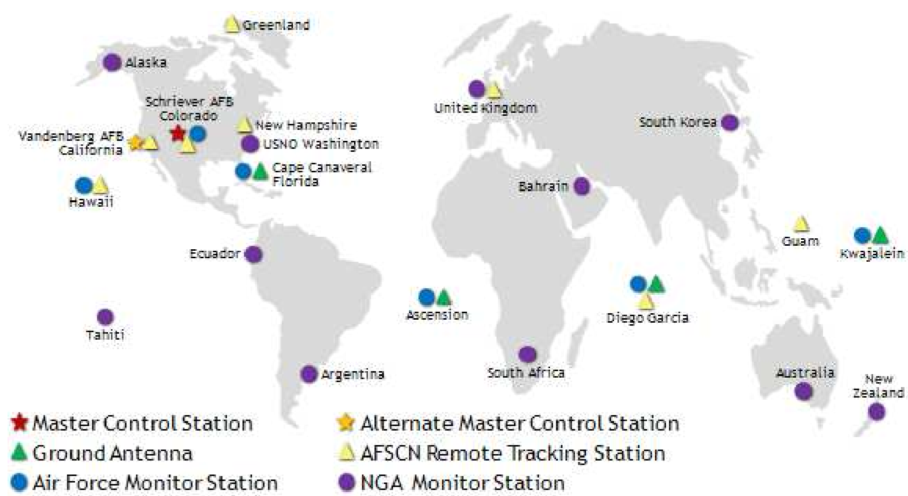


Figura 10. Localização das diversas estações de rastreio do GPS (fonte: GPS.gov).

A sincronização de relógios na Teoria da Relatividade é não trivial, por causa das dilatação do tempo. Suponhamos que queremos sincronizar dois relógios em repouso num referencial inercial. Uma maneira de o fazer é acertar o nosso relógio de bolso pelo primeiro relógio, transportá-lo até a segundo relógio, e utilizá-lo para acertar este último. Contudo, este procedimento tem uma falha: é que se o primeiro relógio mede um intervalo de tempo Δt para a nossa viagem, na qual supomos a nossa velocidade v constante, então o nosso relógio de bolso medirá um intervalo de tempo de apenas

$$\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

e portanto o segundo relógio ficará atrasado em relação ao primeiro. Podemos tentar minimizar este efeito escolhendo uma velocidade v muito pequena, e de facto isto funciona: se v fôr muito menor que c então podemos usar a aproximação de primeira ordem para escrever

$$\Delta t' \simeq \Delta t \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \Delta t - \frac{vL}{c^2},$$

[6]Georges Sagnac (1869–1926), físico francês.

onde $L = v\Delta t$ é a distância entre os dois relógios, e portanto a dessincronização entre os dois relógios, $\Delta t - \Delta t'$, tende para zero quando v tende para zero. (Claro que quando v tende para zero a duração Δt da viagem tende para infinito, e portanto este método de sincronização não seria prático[7]; no entanto, estamos interessados aqui apenas na questão de princípio).

Para sincronizar relógios num referencial inercial só temos então que transportar o relógio que faz a sincronização muito lentamente (em comparação com a velocidade da luz). A superfície da Terra, contudo, não define um referencial inercial, porque a Terra gira. Consideremos um único relógio em repouso à superfície da Terra, e *suponhamos que o queremos sincronizar consigo próprio.* Por simplicidade, suponhamos que este relógio se encontra no equador, e que circum-navegamos a Terra ao longo do equador com uma velocidade v muito pequena. No referencial inercial que não gira com a Terra, o relógio imóvel move-se com velocidade igual à velocidade de rotação da Terra no equador, $V \simeq 0,47$ quilómetros por segundo; se viajarmos para leste, estaremos a mover-nos no referencial inercial com velocidade aproximada $V + v$. Desta forma, a dessincronização entre o relógio fixo e o relógio de bolso será

$$\Delta t\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} - \Delta t\sqrt{1-\frac{(V+v)^2}{c^2}} \simeq \Delta t\,\frac{(V+v)^2 - V^2}{2c^2} = \Delta t\,\frac{(2V+v)v}{2c^2} \simeq \frac{VL}{c^2},$$

onde Δt é a duração da viagem medida no referencial inercial, $L \simeq v\Delta t$ é o comprimento do equador, e usámos novamente a aproximação de primeira ordem. Uma vez que

$$\frac{VL}{c^2} = \frac{0,47 \times 2\pi \times 6400}{300.000^2} \simeq 210 \times 10^{-9} \text{ segundos},$$

vemos que o relógio de bolso se atrasará cerca de 210 nano-segundos em relação ao relógio fixo, *por mais pequena que seja a velocidade v.* Se o relógio for transportado para oeste, a dessincronização terá o mesmo valor absoluto mas sinal oposto, isto é, o relógio de bolso adiantar-se-á cerca de 210 nano-segundos em relação ao relógio fixo. Isto tem a consequência notável que se utilizarmos o processo habitual de sincronização, um relógio à superfície da Terra *nunca está certo consigo próprio!* Do ponto de vista prático, se tentarmos sincronizar dois relógios no equador obtemos uma discrepância de 210 nano-segundos entre a sincronização feita indo para leste ou indo para oeste[8].

É esta dependência do percurso da sincronização de relógios num referencial em rotação que constitui o efeito de Sagnac. Uma vez que, como vimos, os relógios do sistema GPS têm que estar certos ao nano-segundo, este efeito tem que ser levado em conta. A forma de resolver este problema (bem como, na verdade, o problema da dessincronização dos relógios dos satélites com os das estações de rastreio) é que todo o sistema GPS funciona com um "tempo oficial", nomeadamente o tempo medido por um observador inercial em repouso no infinito, que na realidade não é medido por *nenhum* relógio em todo o sistema: o ritmo e sincronização de cada relógio é ajustado consoante a sua localização e velocidade por forma a que esse relógio indique o tempo oficial.

5. Conclusão

Neste capítulo explicámos como é que a Matemática é aplicada no GPS, primeiro no seu funcionamento geral e depois nalgumas das correcções finas que é necessário efectuar. Com este exemplo pretendemos ilustrar o papel central desempenhado pela Matemática na ciência e engenharia modernas, sem as quais nem o GPS nem a maior parte dos outros milagres tecnológicos que nos rodeiam poderiam sequer ser sonhados.

Apêndice: Efeito de Doppler e equivalência massa-energia

Consideremos um sinal luminoso com período T para um certo observador inercial, e perguntemo-nos qual o período medido para o sinal por um segundo observador que se move com velocidade v em relação ao primeiro, na mesma direcção que o sinal. Se imaginarmos o sinal periódico como

[7] Um método mais prático, devido a Einstein, baseia-se na troca de sinais luminosos entre os dois relógios. As conclusões que retiramos de seguida são no entanto independentes do método de sincronização.

[8] No caso geral, é possível provar que a discrepância entre duas sincronizações é proporcional à área (orientada) da região do plano equatorial limitada pelas projecções dos dois percursos.

uma série de *flashes*, vemos que o intervalo de tempo T_1 que o observador em movimento demora a detectar dois *flashes* consecutivos satisfaz

$$cT_1 = cT + vT_1,$$

uma vez que o sinal seguinte tem que percorrer a distância adicional vT_1 que o observador se afasta (Figura 11). Por outras palavras,

$$T_1 = \frac{T}{1-\frac{v}{c}}.$$

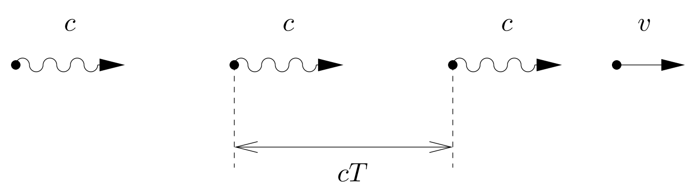


Figura 11. Efeito de Doppler.

Este é o efeito de Doppler clássico. A este efeito temos que adicionar, contudo, a dilatação do tempo, que faz com que o observador em movimento meça na verdade um período

$$T_1' = T_1\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = T\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}}.$$

Para um observador que se mova em direcção contrária à do sinal luminoso, temos apenas que inverter o sinal de v na fórmula acima:

$$T_2' = T\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{c}}.$$

Suponhamos que um objecto O em repouso emite dois fotões com energia total E em direcções opostas, de modo que O permanece em repouso. Cada fotão possui energia $E/2$, e portanto período

$$T = \frac{2h}{E}.$$

Do ponto de vista de um observador que se mova com velocidade v, o fotão emitido na direcção do seu movimento tem período

$$T_1' = T\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}} = \frac{2h}{E}\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v}{c}},$$

e portanto energia

$$E_1' = \frac{h}{T_1'} = \frac{E}{2}\frac{1-\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \simeq \frac{E}{2}\left(1-\frac{v}{c}\right)\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right) \simeq \frac{E}{2}\left(1-\frac{v}{c}+\frac{v^2}{2c^2}\right)$$

(onde suposémos que v é muito menor que c). Analogamente, o fotão emitido na direcção oposta tem período

$$T_2' = T\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{c}} = \frac{2h}{E}\frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{c}},$$

e portanto energia

$$E_2' = \frac{h}{T_1'} = \frac{E}{2}\frac{1+\frac{v}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \simeq \frac{E}{2}\left(1+\frac{v}{c}\right)\left(1+\frac{v^2}{2c^2}\right) \simeq \frac{E}{2}\left(1+\frac{v}{c}+\frac{v^2}{2c^2}\right).$$

Resulta que do ponto de vista do observador em movimento, o conjunto dos dois fotões possui energia total

$$E' = E'_1 + E'_2 \simeq E + \frac{1}{2}\frac{E}{c^2}v^2.$$

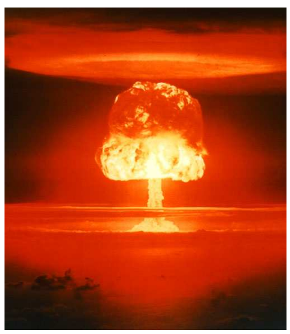
Por outras palavras, do ponto de vista do observador em movimento o objecto O emitiu não só a energia E, mas ainda a energia adicional[9]

$$E' - E = \frac{1}{2}mv^2,$$

onde $m = E/c^2$. Esta energia só pode ter vindo da energia cinética de O, que tem velocidade v em relação ao observador em movimento. Como após a emissão O se continua a mover com a mesma velocidade v, somos levado à conclusão que a sua massa deve ter diminuido em m, de forma a manter a energia total constante. Concluimos então que é possível converter massa em energia, de acordo com a famosa relação de Einstein

$$\boxed{E = mc^2}$$

que, para melhor ou para pior, alterou o decurso da História do planeta Terra.



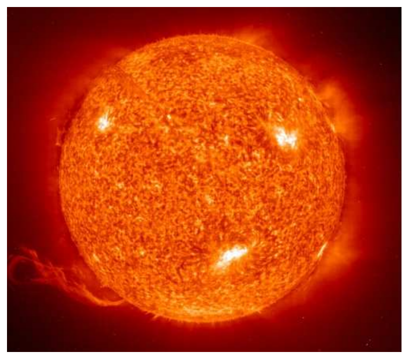


FIGURA 12. Exemplos de conversão de massa em energia: explosão de uma bomba de hidrogénio (fonte: DOE), e o Sol (fonte: NASA).

Referências

[1] N. Ashby, *Relativity in the Global Positioning System*, Living Rev. Relativity 6 (2003) `http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2003-1/`

[2] H. Lorentz, A. Einstein e H. Minkowski, *O Princípio da Relatividade*, Fundação Calouste Gulbenkian (2001)

[3] J. Natário, *General Relativity Without Calculus*, Springer (2011)

[4] C. Rousseau e Y. Saint-Aubin, *Mathematics and Technology*, Springer (2008)

[5] E. Taylor and J. Wheeler, *Exploring Black Holes: Introduction to General Relativity*, Addison Wesley (2000)

[6] `http://www.gps.gov/`

[7] `http://en.wikipedia.org/wiki/GPS`

CENTRO DE ANÁLISE MATEMÁTICA, GEOMETRIA E SISTEMAS DINÂMICOS, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO, 1049-001 LISBOA, PORTUGAL

[9] Note-se que isto é uma consequência da Relatividade Restrita: se não incluíssemos a dilatação do tempo no efeito de Doppler teríamos $E' = E$.