O que é a curvatura de uma superfície?

A superfície mais simples é o plano, cuja geometria foi estudada em detalhe por Euclides no seus Elementos (cerca de 300 a.C.). Entre outras coisas, Euclides escreveu que:

- Duas rectas distintas intersectam-se no máximo uma vez;
- Existem rectas que não se intersectam (paralelas);
- Os ângulos internos de um triângulo somam 180º.

Em muitas situações, porém, é necessário estudar a geometria de outras superfícies. Para planear uma viagem de longo curso, por exemplo, é preciso compreender a geometria da esfera[1]. Em geral, uma superfície curva não contém qualquer recta; se pensarmos, no entanto, que a principal propriedade da recta é minimizar a distância entre quaisquer dois dos seus pontos, podemos substituir o conceito de recta pelo conceito de **geodésica**, definida como uma curva ao longo da superfície que minimiza a distância (medida sobre a superfície) entre quaisquer dois dos seus pontos[2]. No caso da esfera, por exemplo, não é difícil provar que as geodésicas são os **círculos máximos,** isto é, as intersecções da esfera com planos que passam pelo seu centro (por exemplo o equador ou os meridianos, mas não os paralelos, no caso da superfície da Terra). É por isso que um avião viajando entre o Porto e Nova Iorque, que ficam aproximadamente à mesma latitude (41º N), não voa directamente para oeste, mas sim inicialmente para noroeste, virando depois para oeste e finalmente para sudoeste (ver Figura 1).

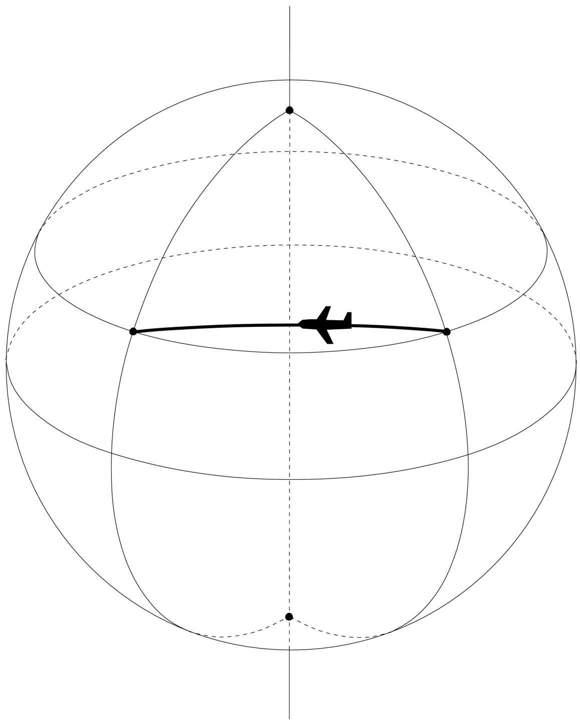

Figura 1

No caso da esfera, as três afirmações de Euclides acima deixam de ser verdade, devendo ser substituídas por:

- Duas geodésicas distintas intersectam-se exactamente duas vezes;
- Não existem paralelas;
- Os ângulos internos de um triângulo somam sempre **mais** que 180º.

[1] Por "esfera" deve entender-se "superfície esférica".
[2] Desde que suficientemente próximos.

Na Figura 2, por exemplo, encontra-se representado um triângulo esférico com **três** ângulos rectos. Uma vez que é possível dividir a esfera em oito destes triângulos, a sua área é $4\pi R^2/8$ (onde R é o raio da esfera). Consequentemente, a **curvatura média** do triângulo, definida como a razão entre o excesso da soma dos seus ângulos internos em relação a 180º (medido em radianos) e a sua área, é

$$(\pi/2)/(\pi R^2/2)=1/R^2.$$

Não é difícil mostrar que a curvatura média de qualquer triângulo na esfera possui o mesmo valor[3]. Diz-se então que a esfera é uma **superfície de curvatura constante** igual a $1/R^2$.

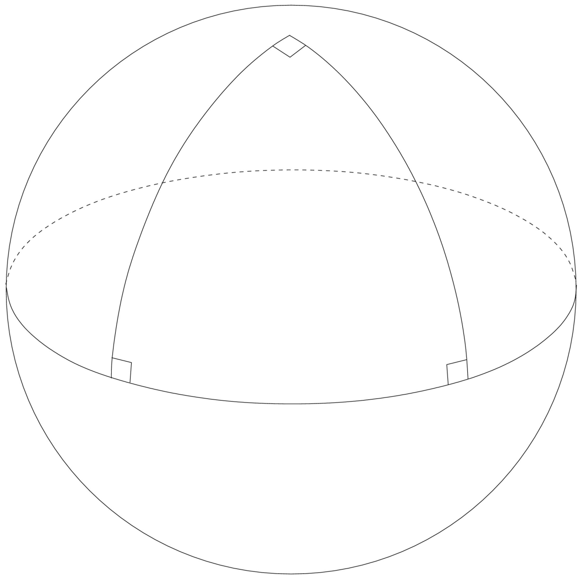

Figura 2

Para superfícies gerais, a curvatura média varia de triângulo para triângulo. A curvatura da superfície é então uma função, definida em cada ponto como o limite das curvaturas médias de triângulos cada vez mais pequenos desenhados em torno desse ponto[4]. Intuitivamente, mede o quanto que a geometria local da superfície difere da geometria do plano.

Historicamente, a definição de curvatura de uma superfície surgiu a partir da definição de curvatura de uma curva. Esta é simplesmente o inverso do raio da circunferência que melhor aproxima[5] a curva num dado ponto. No conjunto de todas as geodésicas de uma superfície curva que passam num determinado ponto, existe uma que possui curvatura mínima e outra que possui curvatura máxima[6]. A **curvatura média** da superfície é a soma destas curvaturas[7]; a **curvatura de Gauss** foi por este definida como o seu produto. Pode mostrar-se que a curvatura de Gauss coincide exactamente com a definição de curvatura de uma superfície em termos de triângulos[8], dependendo portanto apenas da geometria intrínseca da superfície. Por exemplo, é possível enrolar uma folha de papel na superfície de um cilindro ou de um cone, pelo que estas superfícies possuem a geometria local do plano; consequentemente, a sua curvatura de Gauss é zero (apesar da curvatura média não o ser). Gauss ficou tão satisfeito com este resultado que lhe chamou o **Theorema Egregium** (Teorema Notável).

Uma forma conveniente de medir os ângulos internos de um triângulo numa superfície é através do chamado **transporte paralelo**. Este consiste em mover um vector tangente à superfície ao longo do

---

[3] Isto é particularmente simples para triângulos com vértices no equador e num dos pólos.

[4] Em particular este limite existe, o que não é óbvio. Note-se que a soma dos ângulos internos de triângulos cada vez mais pequenos tende para 180º, como seria de esperar, uma vez que localmente qualquer superfície é bem aproximada pelo seu plano tangente.

[5] No sentido que tem contacto de segunda ordem.

[6] Porque o conjunto das direcções possíveis (circunferência) é compacto. É possível mostrar que as geodésicas correspondentes são ortogonais.

[7] A curvatura média ser zero é a condição para uma superfície possuir área mínima.

[8] É fácil ver isto no caso da esfera.

triângulo sem o deixar rodar. Num triângulo plano o vector regressaria à posição inicial após um circuito, mas numa superfície curva não é esse o caso. Por exemplo, para o triângulo da Figura 2 o vector regressa rodado de 90º (ver Figura 3). Estes 90º coincidem exactamente com o excesso da soma dos ângulos internos do triângulo em relação a 180º. De igual modo, para um triângulo geral o vector regressa rodado de um ângulo igual à curvatura da esfera ($1/R^2$) multiplicada pela área do triângulo[9]. Facilmente se mostra que o mesmo é verdade para uma linha poligonal fechada qualquer, e portanto, por aproximação, para qualquer curva fechada simples na esfera.

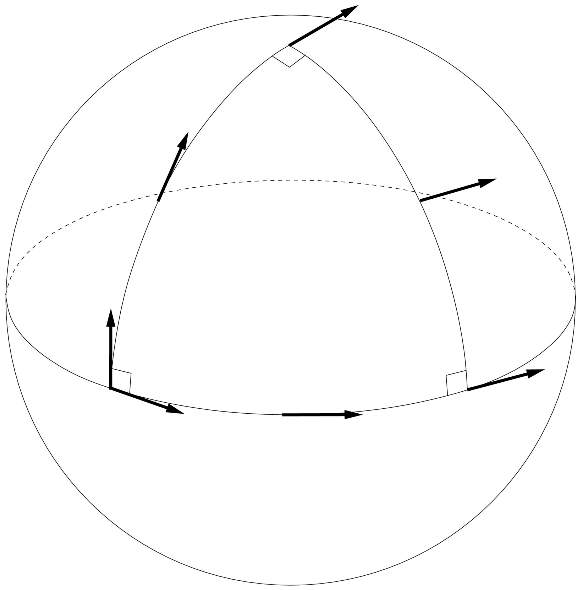

Figura 3

Estas ideias encontram uma aplicação prática no **Pêndulo de Foucault**. Trata-se de um pêndulo vulgar, mas suficientemente comprido e pesado para se manter a oscilar durante alguns dias[10]. Em virtude do movimento de rotação da Terra, o plano de oscilação deste pêndulo roda ao longo do dia, a uma taxa que depende da latitude. Por exemplo, é fácil compreender que este plano roda 360º por dia nos pólos, e que não roda de todo no equador. A uma dada latitude l, o pêndulo tenta manter o seu plano de oscilação constante à medida que a rotação da Terra o arrasta ao longo do paralelo. Por outras palavras, a direcção do plano de oscilação é transportada paralelamente. Após 24 horas, o pêndulo regressou ao mesmo ponto[11], e portanto a direcção do plano de oscilação rodou um ângulo de

$$(1/R^2)(2\pi R^2(1\text{-}sen\ l))=2\pi(1\text{-}sen\ l) \text{ radianos}$$ [12]

no sentido directo, ou seja,

$$2\pi\text{-}2\pi(1\text{-}sen\ l)=2\pi\ sen\ l \text{ radianos}$$

no sentido horário.

Uma aplicação mais subtil destas ideias é fornecida pela teoria da relatividade geral de Einstein. De acordo com esta teoria, o espaço[13] tridimensional em redor de um objecto com massa não é exactamente Euclidiano, mas sim muito ligeiramente curvo (no sentido em que as suas secções planas não possuem a geometria do plano, mas sim de uma superfície muito ligeiramente curva). Por exemplo, se fosse possível medir o raio da Terra a partir do seu centro obter-se-ia um valor cerca de 1 milímetro e meio superior ao valor do raio inferido a partir da sua circunferência[14]. Esta ligeira curvatura do espaço ao redor da Terra foi confirmada pelo satélite Gravity Probe B, lançado em Abril de 2004. No interior deste satélite encontravam-se as cinco "esferas mais esféricas jamais

[9] Se a curvatura não é constante deve ser integrada no interior do triângulo.
[10] Existe um pêndulo de Foucault no Museu da Ciência de Lisboa.
[11] Do ponto de vista do referencial inercial no qual o centro da Terra está em repouso.
[12] A área da região limitada pelo paralelo obtém-se facilmente do facto de que a projecção cilíndrica preserva áreas.
[13] Em rigor o espaço-tempo.
[14] Assumindo que a Terra é uma esfera perfeita de densidade constante. A geometria do espaço no interior da Terra é a de uma 3-esfera de raio cerca de 26 800 vezes superior ao raio da Terra.

construídas" (esféricas com uma precisão de 1 parte num milhão[15]), rodando sobre si mesmas e em queda livre. Se o espaço fosse plano, o seu eixo de rotação permaneceria fixo; uma vez que o espaço é curvo, o eixo de rotação é transportado paralelamente e portanto regressa rodado ao fim de cada órbita ao redor da Terra. O valor previsto para o ângulo de rotação (0,0018º por ano[16]) foi confirmado pelas medições[17].

[15] Se a Terra fosse esférica com este grau de precisão não existiriam relevos com mais de 2 metros de amplitude.

[16] Sabendo que cada órbita demora cerca de 100 minutos, o leitor atento poderá calcular que o ângulo devido à curvatura do espaço deveria ser de 0,0012º; os restantes 0,0006º provêm, grosso modo, da curvatura do tempo.

[17] Este não era porém o objectivo principal da experiência, que pretendia medir um efeito mais pequeno ainda.