UNIVERSIDADE TÉCNICA DE LISBOA
INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

Integrabilidade do Fluxo Geodésico num Elipsóide

Sílvia Isabel Belo Guerra

(Licenciada)

Dissertação para obtenção do Grau de Mestre em
Matemática e Aplicações

Orientador: Doutor José António Maciel Natário

Presidente: Doutor Pedro Ferreira dos Santos
Vogais: Doutora Lucía Fernández Suárez
Doutor José António Maciel Natário

Setembro de 2007

Resumo

O objectivo do presente trabalho é apresentar uma demonstração da integrabilidade do fluxo geodésico num elipsóide. Para isso, considera-se uma família de quádricas $Q_\lambda \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ dada por $Q_\lambda = Q_0 - \lambda Q_\infty$, onde $\lambda \in \mathbb{RP}^1$, $Q_0 \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ é a quádrica não-singular dada por $-x_0^2 + a_1x_1^2 + \cdots + a_{n+1}x_{n+1}^2 = 0$ com $0 < a_1 < \cdots < a_{n+1}$, e $Q_\infty \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ é a quádrica singular dada por $x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 0$. A partir desta família de quádricas, podemos tirar conclusões acerca de uma família de elipsóides $E_\lambda \subset \mathbb{R}^{n+1}$, tal que $E_\lambda := Q_\lambda^*|_{\mathbb{R}^{n+1}}$.

No primeiro capítulo prova-se que um subespaço projectivo genérico $L \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ de dimensão k, é tangente a $k+1$ quádricas distintas do lápis de quádricas Q_λ.

O segundo capítulo tem como objectivo provar o Teorema de Chasles. Para isso, demonstram-se alguns resultados do primeiro capítulo na sua versão dual, isto é, em $\mathbb{RP}^{n+1*}$. Nomeadamente, um ponto genérico $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ pertence a n elipsóides distintos da família E_λ, e uma recta genérica $l \in \mathbb{R}^{n+1}$ é tangente a n elipsóides da família E_λ. Podemos então definir a função $f : TE_0 \to \mathrm{Sym}^{n-1}(\mathbb{R})$, que a cada elemento $(q,p) \in TE_0$ associa $n-1$ valores distintos $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}\}$ (não-nulos). O Teorema de Chasles garante que cada função λ_i é constante ao longo das geodésicas do elipsóide E_0.

No terceiro capítulo, mostra-se que o fluxo geodésico é completamente integrável, usando o Teorema de Chasles. Prova-se que dada uma variedade simpléctica (M, ω), uma função $\lambda \in C^\infty(M)$ e $\Sigma = \lambda^{-1}(c)$ onde c é um valor regular de λ, então $\omega_{|_\Sigma}$ é degenerada, $\dim \ker \omega_{|_\Sigma} = 1$ e as curvas integrais do campo hamiltoniano X_λ são as curvas integrais da distribuição definida por $\ker \omega_{|_\Sigma}$ (Lema 3.7). Considera-se a variedade simpléctica $(T^*\mathbb{R}^{n+1}, \omega)$, onde ω é a forma simpléctica canónica, e a subvariedade simpléctica (T^*E_0, ω_1), onde ω_1 é a forma simpléctica ω restrita a T^*E_0. O Lema 3.7 permite provar que as funções $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ são primeiros integrais em involução. Por último, prova-se que as funções $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ são primeiros integrais independentes e em involução do Hamiltoniano $H = \frac{1}{2}\langle p, p\rangle$, donde segue que o fluxo geodésico num elipsóide é completamente integrável.

Palavras-chave: Espaço Projectivo, Quádricas, Família Confocal, Fluxo Geodésico, Sistemas Completamente Integráveis, Teorema de Chasles.

Abstract

The purpose of the present dissertation is to prove the integrability of the geodesic flow on an ellipsoid. For this, we consider a family of quadrics $Q_\lambda = Q_0 - \lambda Q_\infty \subset \mathbb{RP}^{n+1}$, where $\lambda \in \mathbb{RP}^1$, $Q_0 \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ is a non-singular quadric of the form $-x_0^2+a_1x_1^2+\cdots+a_{n+1}x_{n+1}^2 = 0$ with $0 < a_1 < \cdots < a_{n+1}$, and $Q_\infty \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ is the singular quadric $x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2 = 0$. From this family of quadrics, we can prove results about a family of ellipsoids $E_\lambda \subset \mathbb{R}^{n+1}$, given by $E_\lambda := Q_\lambda^*|_{\mathbb{R}^{n+1}}$.

In the first chapter, we prove that a generic projective subspace $L \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ with dimension k is tangent to $k+1$ distinct quadrics of the pencil Q_λ.

The purpose of the second chapter is to prove Chasles's Theorem. In order to do that, we prove some results of the first chapter, but in its dual version, that is, in $\mathbb{RP}^{n+1*}$. Namely, a generic point $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ belongs to n distinct ellipsoids of the family E_λ. Thus, we can define a function $f : TE_0 \to \mathrm{Sym}^{n-1}(\mathbb{R})$ such as, to each element $(q,p) \in TE_0$, it associates $n-1$ different values $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}\}$ (all non-zero). Chasles's Theorem guarantees that each function λ_i is constant along the geodesics of the ellipsoid E_0.

In the third chapter, we prove that the geodesic flow is completely integrable, using Chasles's Theorem. We also prove that, given a simplectic manifold (M, ω), a function $\lambda \in C^\infty(M)$ and $\Sigma = \lambda^{-1}(c)$, where c is a regular value of λ, then $\omega_{|\Sigma}$ is degenerate, $\dim\ker\omega_{|\Sigma} = 1$ and the integral curves of the hamiltonian field X_λ are the integral curves of the distribution defined by $\ker\omega_{|\Sigma}$ (see Lemma 3.7). We then consider the simplectic manifold $(T^*\mathbb{R}^{n+1}, \omega)$, where ω is the canonic simplectic form, and we also consider the simplectic submanifold (T^*E_0, ω_1), where ω_1 is the simplectic form ω restricted to T^*E_0. Lemma 3.7 allows us to prove that the functions $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ are first integrals in involution. Finally, one proves that the functions $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ are first integrals, independent and in involution, of the Hamiltonian $H = \frac{1}{2}\langle p, p\rangle$, which implies that the geodesic flow on an ellipsoid is completely integrable.

Key-Words: Projective Space, Quadrics, Confocal Family, Geodesic Flow, Completely Integrable Systems, Chasles's Theorem.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao Professor José Natário pela disponibilidade, que demonstrou logo de início, em ser o meu orientador de mestrado. Também lhe agradeço toda a atenção, simpatia e paciência em responder a todas as minhas dúvidas. Foi um apoio muito importante ao longo do meu trabalho.

Agradeço ao Professor Gustavo Granja pela disponibilidade e simpatia em explicar e sugerir alguns resultados de Geometria Algébrica. A sua ajuda foi indispensável.

Também agradeço à Professora Margarida Mendes Lopes pela forma como conduziu as suas aulas – foram indispensáveis na elaboração da minha tese; e ao Professor João Pimentel Nunes pelo seu apoio e disponibilidade.

Por fim, agradeço ao Professor Paulo Almeida que, mesmo sem o saber, foi uma fonte de inspiração ao longo do meu percurso académico.

Conteúdo

Introdução

Pretende-se com este trabalho apresentar uma demonstração da integrabilidade do fluxo geodésico num elipsóide. A chave para essa demonstração é o Teorema de Chasles.

O problema foi abordado de um ponto de vista essencialmente algébrico. Por exemplo, os resultados preliminares que levam à demonstração do Teorema de Chasles resultam da dualização de lemas de geometria projectiva. O método escolhido foi o seguinte: considerou-se uma família de quádricas $Q_\lambda \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ dada por

$$Q_\lambda = Q_0 - \lambda Q_\infty$$

(ver parágrafo a seguir à Definição 1.7) onde $\lambda \in \mathbb{RP}^1$, $Q_0 \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ é a quádrica não-singular dada por

$$-x_0^2 + a_1 x_1^2 + \cdots + a_{n+1} x_{n+1}^2 = 0$$

com $0 < a_1 < \cdots < a_{n+1}$, e $Q_\infty \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ é a quádrica singular dada por

$$x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 0\,.$$

A partir desta família de quádricas, tirámos conclusões acerca de uma família de elipsóides $E_\lambda \subset \mathbb{R}^{n+1}$, que mais não são do que a família dual de Q_λ. Concretamente, $E_\lambda := Q_\lambda^*|_{\mathbb{R}^{n+1}}$.

No primeiro capítulo são apresentados conceitos de geometria projectiva, nomeadamente *lápis de quádricas*, *espaço projectivo dual*, *quádrica dual*, *subvariedade projectiva*, *funções regulares*. Também se define a topologia no espaço projectivo complexo – a Topologia de Zariski. Na grassmaniana complexa $\mathrm{G}_\mathbb{C}(n,k)$ é considerada a topologia induzida por $\mathbb{CP}^{\frac{n!}{k!(n-k)!}-1}$, pois $\mathrm{G}_\mathbb{C}(n,k)$ é subvariedade projectiva desse espaço projectivo. Na grassmaniana real $\mathrm{G}_\mathbb{R}(n,k)$ assume-se a topologia quociente e a estrutura de variedade diferencial herdada do conjunto das matrizes reais $n \times k$, designado por $\mathcal{M}'_{n\times k}$. O objectivo deste capítulo é provar que um subspaço projectivo genérico $L \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ de dimensão k, é tangente a $k+1$ quádricas distintas do lápis de quádricas Q_λ.

O segundo capítulo tem como objectivo provar o Teorema de Chasles. Para isso, demonstram-se alguns resultados do primeiro capítulo na sua versão dual, isto é, em $\mathbb{RP}^{n+1*}$. Nomeadamente, um ponto genérico $y \in \mathbb{R}^{n+1}$

pertence a n elipsóides distintos da família E_λ, e uma recta genérica $l \in \mathbb{R}^{n+1}$ é tangente a n elipsóides da família E_λ. Podemos então definir a função

$$\begin{aligned} f : TE_0 &\rightarrow \mathrm{Sym}^{n-1}(\mathbb{R}) \\ (q,p) &\mapsto \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}\} \end{aligned}$$

que a cada recta em TE_0 associa $n-1$ valores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ (não incluímos o valor $\lambda = 0$). O Teorema de Chasles garante que cada função λ_i é constante ao longo das geodésicas do elipsóide E_0.

No terceiro capítulo, mostra-se que o fluxo geodésico é completamente integrável, usando o Teorema de Chasles. Para isso, começamos por recordar alguns conceitos de geometria diferencial, como *variedade simpléctica*, *campo hamiltoniano* e *fluxo hamiltoniano*. Prova-se em seguida que dada uma variedade simpléctica (M, ω), uma função $\lambda \in C^\infty(M)$ e $\Sigma = \lambda^{-1}(c)$ onde c é um valor regular de λ, então $\omega_{|\Sigma}$ é degenerada, $\dim \ker \omega_{|\Sigma} = 1$ e as curvas integrais do campo hamiltoniano X_λ são as curvas integrais da distribuição definida por $\ker \omega_{|\Sigma}$ (Lema 3.7). Considera-se então a variedade simpléctica $(T^*\mathbb{R}^{n+1}, \omega)$, onde ω é a forma simpléctica canónica, e a subvariedade simpléctica (T^*E_0, ω_1), onde ω_1 é a forma simpléctica ω restrita a T^*E_0. O Lema 3.7 permite provar que as funções $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ são primeiros integrais em involução. Por último, prova-se que as funções $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ são primeiros integrais independentes e em involução do Hamiltoniano $H = \frac{1}{2}\langle p, p \rangle$, donde segue que o fluxo geodésico num elipsóide é completamente integrável.

Uma possibilidade de continuação do presente trabalho seria adaptar os resultados obtidos, a uma métrica de espaço-tempo, isto é, uma métrica da forma ${dx_0}^2 + {dx_1}^2 + \cdots + {dx_n}^2 - {dx_{n+1}}^2$. Este trabalho foi realizado recentemente por Daniel Genin, Boris Khesin e Serge Tabachnikov, e pode ser consultado na versão *preprint* sob o título *"Geodesics on an ellipsoid in Minkowski space"*.

CAPíTULO 1

Espaço Projectivo e Quádricas

Seja V um espaço vectorial com dimensão $n+1$, sobre um corpo $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

DEFINIÇÃO 1.1. O *espaço projectivo* $P(V)$ é o conjunto dos subespaços vectoriais com dimensão 1 contidos em V. A *dimensão* do espaço projectivo $P(V)$ é dada por $\dim(V) - 1$.

O espaço projectivo $P(V)$ é descrito por

$$P(V) = \{v \in V : v \neq 0\} \, / \sim$$

onde a relação de equivalência é dada por

$$v_1 \sim v_2 \Leftrightarrow v_1 = \lambda v_2$$

para algum $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Por outras palavras, os elementos de $P(V)$ são as classes de equivalência $[v]$, com $v \neq 0$.

Seja $\{e_0, \ldots, e_n\}$ uma base para V e considerem-se em V as coordenadas $(x_0, \ldots, x_n)$ tais que cada elemento de $v \in V$ é dado pelo vector que o representa na base dada, i.e., $(x_0, \ldots, x_n)$ representa o elemento $v = \sum_{i=0}^{n} x_i e_i \in V$. Sendo assim, o elemento $[v] \in P(V)$ pode ser representado por $[x_0, \ldots, x_n]$. Esta representação designa-se por *coordenadas homogéneas* pois $[x_0, \ldots, x_n] = [\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n]$, para todo $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$.

DEFINIÇÃO 1.2. Um *subespaço projectivo* de um espaço projectivo $P(V)$ é um conjunto da forma $P(U)$, onde U é um subespaço vectorial de V. Por outras palavras, é o conjunto dos subespaços vectoriais com dimensão 1 contidos em U.

DEFINIÇÃO 1.3. Uma *forma bilinear simétrica* em V é uma aplicação $B \colon V \times V \to \mathbb{K}$ tal que

1. $B(v, w) = B(w, v)$;
2. $B(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w) = \lambda_1 B(v_1, w) + \lambda_2 B(v_2, w)$

para quaisquer $v, v_1, v_2, w \in V$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$. A forma B diz-se *não-degenerada* se $B(v, w) = 0$ para todo o $w \in V$ implica $v = 0$.

Sejam $v = \sum_{i=0}^n x_i e_i$ e $w = \sum_{i=0}^n y_i e_i$ dois elementos V. Então, pela definição de forma bilinear simétrica, temos

$$B(v,w) = \sum_{i,j=0}^{n} B(e_i, e_j) x_i y_j = x^T \beta y = v^T \beta w$$

onde β é a matriz simétrica cujas entradas são $\beta_{ij} = B(e_i, e_j)$. Note-se que estamos a identificar v e w respectivamente com os vectores $x = (x_0, \ldots, x_n)$ e $y = (y_0, \ldots, y_n)$, que os representam na base dada.

Concluímos que uma forma bilinear simétrica B é univocamente determinada por uma matriz simétrica β, pelo que podemos identificar B com a matriz β que a determina. Assim, as formas bilineares simétricas formam um espaço vectorial sobre $\mathbb{K}$ isomorfo ao espaço vectorial SV das matrizes simétricas $(n+1)\times(n+1)$, donde segue que a sua dimensão é $(n+1)(n+2)/2$.

Definição 1.4. Dada uma forma bilinear simétrica $B : V \times V \to \mathbb{K}$, a aplicação $v \mapsto B(v,v)$ é designada por *forma quadrática*.

Como vamos trabalhar com o corpo dos reais ou dos complexos, onde a divisão por 2 está bem definida, a forma quadrática determina univocamente a forma bilinear B, pois

$$B(v+w, v+w) = B(v,v) + B(w,w) + 2B(v,w)\,.$$

Teorema 1.5. *Seja B uma forma quadrática definida num espaço vectorial V de dimensão n, sobre um corpo $\mathbb{K}$. Então:*

1. *Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ então existe uma base $\{v_0, \ldots, v_n\}$ para V tal que se $v = \sum_{i=0}^n c_i v_i$ então $B(v,v) = \sum_{i=0}^m c_i^2$;*
2. *Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ então existe uma base $\{v_0, \ldots, v_n\}$ para V tal que se $v = \sum_{i=0}^n c_i v_i$ então $B(v,v) = \sum_{i=0}^p c_i^2 - \sum_{j=p+1}^m c_j^2$. Se B for não-degenerada então $m = n$.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [**6**]. □

Definição 1.6. Uma *quádrica* num espaço projectivo $P(V)$ é um conjunto da forma $Q_B = \{[v] \in P(V) \colon B(v,v) = 0\}$, onde B é uma forma bilinear simétrica em V. A quádrica diz-se *não-singular* se B é não-degenerada. A *dimensão* de uma quádrica não-vazia é $\dim P(V) - 1$.

Sejam A e B duas formas bilineares simétricas e considerem-se Q_A e Q_B as quádricas definidas por A e B, respectivamente. Para qualquer $(\gamma, \mu) \in \mathbb{K}^2 \setminus (0,0)$, a forma bilinear simétrica $\gamma A + \mu B$ define a quádrica

$$Q_{\gamma A + \mu B} = \{[v] \in P(V) \colon (\gamma A + \mu B)(v,v) = 0\}\,.$$

Por simplificação de notação, designaremos a quádrica definida por $\gamma A + \mu B$ por $\gamma Q_A + \mu Q_B$, ou seja, identificamos a quádrica com a matriz que a determina.

DEFINIÇÃO 1.7. Sejam Q_A e Q_B duas quádricas em $P(V)$. A família de quádricas dada por $\gamma Q_A + \mu Q_B$, onde $[\gamma, \mu] \in P(\mathbb{K}^2)$, designa-se por *lápis de quádricas em $P(V)$ gerado por Q_A e Q_B*.

Na Definição 1.7 considera-se $[\gamma, \mu] \in P(\mathbb{K}^2)$, pois para qualquer forma bilinear simétrica B e qualquer $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, temos que B e λB definem a mesma quádrica. Note-se que podemos escrever o lápis $\gamma Q_A + \mu Q_B$ na forma $Q_A - \lambda Q_B$, onde $\lambda \in \mathbb{K}$, mas convencionando que o ponto no infinito, $[0, 1]$, corresponde à quádrica Q_B (também se escreve simplesmente $\lambda \in P(\mathbb{K}^2)$).

Se considerarmos o conjunto SV das matrizes simétricas $(n+1) \times (n+1)$, podemos interpretar geometricamente cada ponto de $P(SV)$ como sendo uma quádrica em $P(V)$, na medida em que cada matriz $\beta \in SV$ determina univocamente uma forma bilinear B dada por $B(v, w) = v^T \beta w$, e portanto determina uma única quádrica, precisamente a quádrica Q_B, através da equação $v^T \beta v = 0$. Uma vez que nos interessa trabalhar com espaços vectoriais sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, a relação entre quádricas e elementos de $P(SV)$ não é biunívoca pois podemos ter elementos em $P(SV)$ não projectivamente equivalentes[1] mas correspondendo à mesma quádrica. Por exemplo, na recta projectiva $P(\mathbb{R}^2)$, temos que ${x_0}^2 + {x_1}^2 = 0$ e ${x_0}^2 + 2{x_1}^2 = 0$ definem a mesma quádrica, mas não são projectivamente equivalentes. Podemos dizer que um lápis de quádricas é uma recta projectiva em $P(SV)$, podendo haver repetição de quádricas no lápis.

DEFINIÇÃO 1.8. Um lápis de quádricas $\gamma Q_A + \mu Q_B$ em $P(V)$ diz-se em *posição geral* se contiver exactamente $(n + 1)$ quádricas singulares, onde $(n + 1)$ é a dimensão de V.

Seja $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ o anel dos polinómios a $n+1$ variáveis, com coeficientes no corpo $\mathbb{K}$. Recorde-se que um polinómio $f(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ designa-se por *polinómio homogéneo de grau k* se

$$f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^k f(x_0, \ldots, x_n)$$

para qualquer $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e para todo $(x_0, \ldots, x_n) \in V$.

Designa-se por *hipersuperfície* o conjunto definido pelos zeros comuns de um único polinómio homogéneo. Se esse polinómio homogéneo for de grau 1, a hipersuperfície designa-se por *hiperplano*. Em coordenadas homogéneas, uma quádrica verifica uma equação da forma

$$v^T \beta v = 0 \Leftrightarrow \sum_{i,j=0}^{n} \beta_{ij} x_i x_j = 0$$

[1] Dado um espaço vectorial E sobre um corpo $\mathbb{K}$, dois elementos $a, b \in E$ dizem-se *projectivamente equivalentes* se existir $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ tal que $a = \lambda b$.

onde $\beta \in SV$, donde se conclui que uma quádrica é o conjunto dos zeros de um polinómio homogéneo de grau 2, pelo que é uma hipersuperfície em $P(V)$.

Note-se que um subespaço projectivo $L \subset P(V)$ de dimensão k é definido por um conjunto de $n-k$ equações lineares homogéneas.

Considere-se uma quádrica $Q \subset P(V)$ definida por $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$, onde $f(x_0, \ldots, x_n)$ é um polinómio homogéneo de grau 2. Define-se o *espaço tangente a uma quádrica Q no ponto $q = [q_0, \ldots, q_n] \in Q$* como sendo o subespaço de $P(V)$ dado pela equação

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}(q_0, \ldots, q_n)x_0 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(q_0, \ldots, q_n)x_n = 0\,.$$

Um ponto $q \in Q$ diz-se *ponto singular de Q* se

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_q = 0$$

para todo o $i \in \{0, \ldots, n\}$. Neste caso, o espaço tangente a $q \in Q$ é todo o espaço projectivo $P(V)$.

Prova-se que Q é uma quádrica singular se e só se existe um ponto $q \in Q$ tal que q é um ponto singular da quádrica Q.

Dado um subespaço projectivo L, interessa-nos estudar o espaço tangente à intersecção dada por $Q \cap L$. Note-se que $Q \cap L$ é uma quádrica em L.

Para definir o espaço tangente a $Q \cap L$, suponhamos o subespaço projectivo L tem dimensão k, e escolham-se coordenadas[2] $[x_0, \ldots, x_n]$ em $P(V)$ tais que L é dado por $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$. Suponhamos que Q, nestas coordenadas, é dada por $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$. Assim, o espaço tangente a $Q \cap L$ no ponto q (visto como subespaço de $P(V)$) é dado pelo núcleo da matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \left.\frac{\partial f}{\partial x_0}\right|_q & \cdots & \left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_q & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & I_{(n-k)} & \\ 0 & \cdots & 0 & & & \end{array}\right]$$

que coincide com o núcleo da matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \left.\frac{\partial f}{\partial x_0}\right|_q & \cdots & \left.\frac{\partial f}{\partial x_k}\right|_q & \left.\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}\right|_q & \cdots & \left.\frac{\partial f}{\partial x_n}\right|_q \\ \hline 0 & \cdots & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & I_{(n-k)} & \\ 0 & \cdots & 0 & & & \end{array}\right].$$

Portanto o espaço tangente a $Q \cap L$ num ponto q é a intersecção de L com o espaço tangente a Q em q.

[2] Por escolha de coordenadas, entenda-se a escolha de uma base $\{e_0, \ldots, e_n\}$ para o espaço vectorial V.

LEMA 1.9. *Seja Q uma quádrica não-singular em $P(V)$ e $L \subset P(V)$ um subespaço projectivo de dimensão k. Então L é tangente a Q se e só se $Q \cap L$ é uma quádrica singular.*

DEMONSTRAÇÃO. Seja $L \subset P(V)$ um subespaço projectivo de dimensão k. Escolham-se coordenadas $[x_0, \ldots, x_n]$ em $P(V)$ tais que L é dado por $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$. A quádrica Q escrita nestas coordenadas será dada por $f(x_0, \ldots, x_n) = 0$, onde $f \in \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ é um polinómio homogéneo de grau 2.

Suponhamos que L é tangente a Q num ponto $q = [q_0, \ldots, q_n]$. Então os pontos de L verificam a condição

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}(q_0, \ldots, q_n)x_0 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(q_0, \ldots, q_n)x_n = 0 \tag{1}$$

o que equivale a

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}(q_0, \ldots, q_n)x_0 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_k}(q_0, \ldots, q_n)x_k = 0$$

para todo $x_0, \ldots, x_k \in \mathbb{K}$, pois L é dado por $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$. Daqui segue que

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_q = 0$$

para todo o $i \in \{0, \ldots, k\}$. Concluímos que q é ponto singular de $Q \cap L$.

Suponhamos agora que $Q \cap L$ é uma quádrica singular. Então existe um ponto singular $q = [q_0, \ldots, q_n] \in Q \cap L$. Daqui segue que

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_q = 0$$

para todo o $i \in \{0, \ldots, k\}$. Assim, a equação do plano tangente a Q no ponto q é dada por

$$\frac{\partial f}{\partial x_{k+1}}(q_0, \ldots, q_n)x_{k+1} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(q_0, \ldots, q_n)x_n = 0\,. \tag{2}$$

Como L é dado por $x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$, em particular os pontos de L verificam a equação (1). Concluímos que L é tangente a Q em q. $\square$

Vamos agora definir o *espaço projectivo dual*. Começamos por notar que qualquer hiperplano $L \subset P(V)$ é dado por uma equação da forma

$$\sum_{j=0}^{n} \beta_j x_j = 0$$

onde $\beta_j \neq 0$ para algum $j \in \{0, \ldots, n\}$. A equação $\sum_{j=0}^{n} \lambda\beta_j x_j = 0$, define o mesmo hiperplano, para qualquer $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Assim, a cada hiperplano $L \subset P(V)$ corresponde um ponto $[\beta_0, \ldots, \beta_n]$, onde $\beta_j \neq 0$ para algum

$j \in \{0, \ldots, n\}$. Obtemos desta forma coordenadas homogéneas para o conjunto dos hiperplanos contidos em $P(V)$. Vamos designar por $[z_0, \ldots, z_n]$ as coordenadas homogéneas em $P(V)^*$.

Observe-se que um hiperplano define uma aplicação linear de V em $\mathbb{K}$, a menos de uma constante multiplicativa, na medida em que um hiperplano é sempre o núcleo de uma aplicação linear $f : V \to \mathbb{K}$. Assim, cada hiperplano define um único ponto em $P(V^*)$. Da mesma forma, um ponto em $P(V^*)$ define um único hiperplano. Temos então uma identificação canónica entre $P(V)*$ e $P(V^*)$.

Diz-se que $[\beta_0, \ldots, \beta_n] = L^*$ é o ponto dual[3] do hiperplano L e o conjunto dos pontos duais de todos os hiperplanos em $P(V)$ designa-se por *espaço projectivo dual* $P(V)^*$, o qual tem a estrutura de um espaço projectivo.

Sejam $\alpha = [\alpha_0, \ldots, \alpha_n]$ e $\beta = [\beta_0, \ldots, \beta_n]$ dois pontos distintos do espaço projectivo dual. Podemos definir uma recta $l \subset P(V)^*$ dada por $\gamma\alpha + \mu\beta$ onde $[\gamma, \mu] \in P(\mathbb{K}^2)$. É interessante observar que a recta l, mais precisamente, qualquer recta $l \subset P(V)^*$, define um único subespaço projectivo $L \subset P(V)$ com dimensão $n - 2$. Basta tomar dois pontos distintos da recta l, por exemplo α e β, e L será dado pelas equações

$$\begin{cases} \alpha_0 x_0 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 \\ \beta_0 x_0 + \cdots + \beta_n x_n = 0 \end{cases}, \tag{3}$$

que não dependem dos dois pontos escolhidos na recta l. Reciprocamente, dado um subespaço projectivo $L \subset P(V)$ com dimensão $n-2$ dado por duas equações linearmente independentes da forma (3), podemos definir a recta $l \subset P(V)^*$ dada por $\gamma\alpha + \mu\beta$ com $[\gamma, \mu] \in P(\mathbb{K}^2)$, onde $\alpha = [\alpha_0, \ldots, \alpha_n]$ e $\beta = [\beta_0, \ldots, \beta_n]$. Se forem escolhidas duas outras equações definindo o mesmo plano L, a recta obtida será a mesma. Diz-se que a recta l é o subespaço projectivo dual de L, e escreve-se $l = L^*$.

DEFINIÇÃO 1.10. Dada uma quádrica $Q \subset P(V)$, a *quádrica dual* Q^* é o conjunto dos pontos $[\beta_0, \ldots, \beta_n] \in P(V)^*$ tais que $\sum_{j=0}^{n} \beta_j x_j = 0$ define um hiperplano tangente a Q.

A quádrica dual Q^* é efectivamente uma quádrica, como se prova no início do Lema 1.11.

LEMA 1.11. *Seja $L \subset P(V)$ um subespaço projectivo de dimensão $n - 2$ e seja $Q \subset P(V)$ uma quádrica não-singular. L é tangente a Q se e só se a recta dual $l = L^* \subset P(V)^*$ é tangente a Q^*.*

[3] O hiperplano L também se diz o hiperplano dual do ponto $[\beta_0, \ldots, \beta_n]$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $Q \subset P(V)$ uma quádrica não-singular. Pelo Teorema 1.5, qualquer forma quadrática pode ser diagonalizada, pelo que podemos escolher coordenadas $[x_0, \ldots, x_n]$ em $P(V)$ tais que a quádrica Q é dada por

$$a_0 {x_0}^2 + \cdots + a_n {x_n}^2 = 0\,.$$

Dado um ponto $q = [q_0, \ldots, q_n] \in Q$, o plano tangente a Q em q corresponde ao ponto $[a_0 q_0, \ldots, a_n q_n] \in P(V)^*$, o qual verifica

$$a_0 q_0^2 + \cdots + a_n q_n^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{(a_0 q_0)^2}{a_0} + \cdots + \frac{(a_n q_n)^2}{a_n} = 0\,.$$

Desta forma, considerando em $P(V)^*$ as coordenadas homogéneas $[z_0, \ldots, z_n]$, dada uma quádrica definida pela equação $a_0 x_0^2 + \cdots + a_n x_n^2 = 0$, a quádrica dual Q^* é dada por

$$\frac{z_0^2}{a_0} + \cdots + \frac{{z_n}^2}{a_n} = 0\,. \tag{4}$$

Seja $L \subset P(V)$ um subespaço projectivo de dimensão $n-2$ tangente a Q num ponto $q = [q_0, \ldots, q_n] \in Q$. L é dado por

$$\begin{cases} a_0 q_0 x_0 + \cdots + a_n q_n x_n = 0 \\ \beta_0 x_0 + \cdots + \beta_n x_n = 0 \end{cases}$$

onde $(a_0 q_0, \ldots, a_n q_n)$ e $(\beta_0, \ldots, \beta_n)$ são dois vectores não-colineares. Então a recta dual $l = L^*$ contém os pontos (distintos) $[a_0 q_0, \ldots, a_n q_n]$ e $[\beta_0, \ldots, \beta_n]$ e portanto é dada por $\gamma[a_0 q_0, \ldots, a_n q_n] + \mu[\beta_0, \ldots, \beta_n]$ onde $[\gamma, \mu] \in P(\mathbb{K}^2)$. De (4), a equação do plano tangente a Q^* no ponto $[a_0 q_0, \ldots, a_n q_n]$ é

$$q_0 z_0 + \cdots + q_n z_n = 0\,.$$

Uma vez que $q \in (Q \cap L)$, então

$$\begin{cases} a_0 q_0^2 + \cdots + a_n q_n^2 = 0 \\ \beta_0 q_0 + \cdots + \beta_n q_n = 0 \end{cases}\,,$$

pelo que

$$\begin{aligned} &q_0(\gamma a_0 q_0 + \mu\beta_0) + \cdots + q_n(\gamma a_n q_n + \mu\beta_n) = \\ &\qquad\qquad = \gamma(a_0 q_0^2 + \cdots + a_n q_n^2) + \mu(\beta_0 q_0 + \cdots + \beta_n q_n) = 0\,, \end{aligned}$$

donde se conclui que a recta $l = L^*$ é tangente a Q^*.

O raciocínio é análogo para provar que dada uma recta $l \subset \mathbb{P}(V)^*$ tangente a uma quádrica Q^* então o subespaço L tal que $L^* = l$ é tangente a Q. □

Para fixar notação, seja $\mathbb{RP}^n = P(\mathbb{R}^{n+1})$ o espaço projectivo real, e $\mathbb{CP}^n = P(\mathbb{C}^{n+1})$ o espaço projectivo complexo. Para os resultados que se seguem, precisamos de considerar o espaço projectivo complexo $\mathbb{CP}^n$.

Definição 1.12. Seja $J \subset \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ um conjunto de polinómios homogéneos. Uma *subvariedade projectiva em* $\mathbb{CP}^n$ é um conjunto da forma $V(J) := \{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{CP}^n \colon f(x_0, \ldots, x_n) = 0 \quad \forall f \in J\}$.

É muito importante observar que dado um qualquer conjunto de polinómios $J \subset \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$, a subvariedade projectiva $V(J) = V(I)$, onde I é o ideal gerado[4] por J em $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$.

A definição de subvariedade projectiva não depende do representante $[x_0, \ldots, x_n]$ pois

$$f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = 0 \Leftrightarrow \lambda^k f(x_0, \ldots, x_n) = 0 \Leftrightarrow f(x_0, \ldots, x_n) = 0$$

para qualquer constante $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Podemos definir em $\mathbb{CP}^n$ uma topologia em que os fechados são as subvariedades projectivas. Esta topologia designa-se por *Topologia de Zariski.*

Recorde-se que um conjunto *localmente fechado* de um espaço topológico, é a intersecção de um fechado com um aberto do espaço topológico. Uma *variedade quase-projectiva* é um conjunto localmente fechado de $\mathbb{CP}^n$, munido da topologia induzida por $\mathbb{CP}^n$.

Considere-se em $\mathbb{CP}^n$ as coordenadas homogéneas $[x_0, \ldots, x_n]$. Seja $X \subset \mathbb{CP}^n$ uma variedade quase-projectiva.

Definição 1.13. Uma função $f \colon X \to \mathbb{C}$ diz-se *regular num ponto* $P \in X$ se existem polinómios homogéneos $G, H \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$ do mesmo grau tais que $H(P) \neq 0$ e $f = \frac{G}{H}$ numa vizinhança aberta de P. f diz-se *regular em* X se for regular em todo o ponto $P \in X$.

Uma função $f \colon X \to \mathbb{C}^m$ diz-se *regular (em X)* se todas as funções coordenadas forem regulares (em X). Finalmente, uma função entre duas variedades quase-projectivas $f \colon X \to Y$ diz-se *regular* se para qualquer função regular $g \colon Y \to \mathbb{C}$, a composição $g \circ f \colon X \to \mathbb{C}$ é também uma função regular. Prova-se que uma função regular é contínua para a topologia de Zariski.

Se a variedade quase-projectiva estiver contida nalgum aberto afim U_i, onde

$$U_i = \{[x_0, \ldots, x_n] : x_i \neq 0\},$$

a topologia de Zariski é tal que os fechados são conjuntos da forma $V(J)$ onde J é um qualquer conjunto de polinómios não necessariamente homogéneos contido em $\mathbb{K}[y_0, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_n]$, onde $y_k := \frac{x_k}{x_i}$ (observe-se que U_i é isomorfo

[4]Sendo $J \subset \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$, o *ideal gerado por* J é o ideal $I = \langle J \rangle$ de todas as combinações lineares finitas de elementos de J com coeficientes em $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$, ou seja,

$$I := \{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n : a_1 \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n], b_i \in J\}.$$

a $\mathbb{K}^n$). Neste caso, ainda temos que a definição de função regular obedece à Definição 1.13, com a única diferença de não se exigir (novamente) que os polinómios sejam homogéneos, nem do mesmo grau.

Recorde-se que a *grassmaniana complexa* $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}(n,k)$ é o conjunto dos subespaços lineares sobre $\mathbb{C}$, de dimensão k, contidos em $\mathbb{C}^n$.

Seja $\mathcal{M}_{n\times k}$ o conjunto das matrizes $n \times k$ de entradas complexas e $GL(k)$ o conjunto das matrizes $k \times k$ invertíveis. Dado $U \in \mathrm{G}_{\mathbb{C}}(n,k)$, escolham-se k vectores linearmente independentes, $\{v_1,\ldots,v_k\}$ tais que $U = \mathrm{span}\{v_1,\cdots,v_k\}$. Então U pode ser representado pela matriz cujas colunas são os vectores $\{v_1,\ldots,v_k\}$, que é uma matriz de característica máxima. Note-se que duas matrizes de característica máxima $A, B \in \mathcal{M}_{n\times k}$ geram o mesmo espaço das colunas se e só se existe uma matriz invertível $S \in GL(k)$ tal que $A = BS$. Seja $\mathrm{r}(A)$ a característica da matriz A. Portanto

$$\mathrm{G}_{\mathbb{C}}(n,k) = \{A \in \mathcal{M}_{k\times n}\colon\ \mathrm{r}(A) = k\}/\sim$$

onde $A \sim B$ se e só se existe uma matriz $S \in GL(k)$ tal que $A = BS$.

Seja $\Delta^A_{i_1,\ldots,i_k}$ o subdeterminante de uma matriz $A \in \mathcal{M}_{n\times k}$ obtido a partir das linhas $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$. Considere-se a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \psi\colon \mathcal{M}_{n\times k} & \to & \mathbb{CP}^{\frac{n!}{k!(n-k)!}-1} \\ A & \mapsto & [\Delta^A_{1,\ldots,k},\ldots,\Delta^A_{i_1,\ldots,i_k},\ldots,\Delta^A_{(n-k+1),\ldots,n}] \end{array}.$$

A aplicação ψ está bem definida em $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}(n,k)$, pois se $A \sim B$ então existe $S \in GL(k)$ tal que $A = BS$, donde segue que

$$\Delta^A_{i_1,\ldots,i_k} = \det S \cdot \Delta^B_{i_1,\ldots,i_k}$$

e portanto $\psi(A)$ e $\psi(B)$ definem o mesmo ponto em $\mathbb{CP}^{\frac{n!}{k!(n-k)!}-1}$.

A aplicação ψ designa-se por *mergulho de Plücker* e prova-se que a imagem de $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}(n,k)$ pelo mergulho de Plücker é uma subvariedade projectiva de $\mathbb{CP}^{\frac{n!}{k!(n-k)!}-1}$ (ver **[4]**) donde segue que a Topologia de Zariski em $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}(n,k)$ é a topologia induzida pela Topologia de Zariski em $\mathbb{CP}^{\frac{n!}{k!(n-k)!}-1}$. Note-se que $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}(n+1,1) = \mathbb{CP}^n$ e $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}(n+1,n) = \mathbb{CP}^{n*}$.

Definição 1.14. Seja $f : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$ uma função de classe C^∞ se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou holomorfa se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Um ponto $p \in \mathbb{K}^{n+1}$ diz-se *ponto regular de f* se $Df|_p : \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$ é sobrejectiva, ou seja, se a característica da sua representação matricial é máxima. Caso contrário, o ponto p diz-se *ponto crítico de f*.

Proposição 1.15. *Considere-se $\mathbb{K}^{n+1}$ com a topologia usual. Seja $V(I) \subset \mathbb{K}^{n+1}$, onde $I \subset \mathbb{K}[x_0,\ldots,x_n]$ é um ideal não trivial. Então o complementar $V(I)^c$ é um conjunto aberto denso.*

Demonstração. Observe-se que $\mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ é um anel Noetheriano, portanto qualquer ideal $I \subset \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ é finitamente gerado (ver [**7**]). Então $V(I) = V(\langle g_1, \ldots, g_m \rangle)$ com $m \geq 1$ e $g_i \neq 0$ para todo o $i \in \{1, \ldots, m\}$, pois estamos a supor que $I \neq \{0\}$. Em particular, $V(I) \subset V(g_1)$, pelo que basta provar a proposição para I gerado por um único polinómio não-nulo g.

Vamos fazer uma prova por indução no grau k de g para mostrar que $V(I)^c$ é denso. Note-se que, se g é um polinómio constante não-nulo, nada há a provar, pois neste caso $V(I) = \varnothing$.

Base de Indução: seja g um polinómio de grau $k = 1$.

Seja $\mathcal{F}$ o conjunto dos pontos regulares de g contidos em $V(g)$. Tem-se que $\mathcal{F}$ é uma subvariedade diferenciável de $\mathbb{K}^{n+1}$ com dimensão n, logo tem medida nula. Seja agora $\mathcal{F}'$ o conjunto dos pontos críticos de g contidos em $V(g)$. Estes pontos verificam

$$g = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial x_0} = \cdots = \frac{\partial g}{\partial x_n} = 0\,.$$

Além disso, como $k = 1$, existe $l \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $\frac{\partial g}{\partial x_l} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Temos então que $\mathcal{F}' = \varnothing$. Concluímos que $V(g) = \mathcal{F}$ e portanto tem medida nula. Então o complementar $V(g)^c$ é denso.

Hipótese de Indução: $V(g)$ tem medida nula para polinómios g de grau inferior ou igual a k.

Passo: Seja g um polinómio de grau $k+1$. Novamente, define-se $\mathcal{F}$ como sendo o conjunto dos pontos regulares em $V(g)$. Então $\mathcal{F}$ é uma subvariedade diferenciável de $\mathbb{K}^{n+1}$ com dimensão n, logo tem medida nula. Seja $\mathcal{F}'$ dos pontos críticos em $V(g)$. Estes pontos verificam

$$g = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial x_0} = \cdots = \frac{\partial g}{\partial x_n} = 0\,.$$

Além disso, existe $l \in \{0, \ldots, n\}$ tal que $\frac{\partial g}{\partial x_l}$ é um polinómio não-nulo. Em particular, $\mathcal{F}' \subset V(\frac{\partial g}{\partial x_l})$. Note-se que o polinómio $\frac{\partial g}{\partial x_l}$ tem grau inferior ou igual a k. Aplicando a Hipótese de Indução, tem-se que $V(\frac{\partial g}{\partial x_l})$ tem medida nula. Conclui-se que $V(g) = \mathcal{F}' \cup \mathcal{F}$ é a união de dois conjuntos de medida nula, portanto tem também medida nula. Assim, o complementar $V(g)^c$ é denso.

Para provar que é aberto, basta notar que na topologia usual de $\mathbb{K}^{n+1}$, todo o conjunto da forma $V(J)$ com $J \subset \mathbb{K}[x_0, \ldots, x_n]$ é um fechado, logo o seu complementar é um aberto, o que termina a demonstração. $\square$

Proposição 1.16. *Seja $J \subset \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_n]$, I o ideal gerado por J e $I_R = I \cap \mathbb{R}[x_0, \ldots, x_n]$. Considere-se um ponto $(r_0, \cdots, r_n)$ tal que $r_i \in \mathbb{R}$*

para todo o $i \in \{0, \ldots, n\}$. *Então* $(r_0, \cdots, r_n)$ *pertence a* $V(I)$ *se e só se pertence a* $V(I_R)$.

Demonstração. Recorde-se que

$$V(I_R) := \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon f(x_0, \ldots, x_n) = 0 \quad \forall f \in I_R\}.$$

Se $(r_0, \cdots, r_n) \in V(I)$, então $(r_0, \cdots, r_n) \in V(I_R)$, pois claramente $I_R \subset I$. Suponhamos agora que $(r_0, \cdots, r_n) \in V(I_R)$. Seja $g \in I$ um qualquer polinómio de I. Recorde-se que $\overline{g}$ designa o polinómio obtido de g, fazendo apenas o conjugado de cada um dos seus coeficientes. Note-se que

$$g(r_0, \cdots, r_n) = 0 \Leftrightarrow |g(r_0, \cdots, r_n)|^2 = 0.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |g(r_0, \cdots, r_n)|^2 = g(r_0, \cdots, r_n)\overline{g(r_0, \cdots, r_n)} = \\ = g(r_0, \cdots, r_n)\overline{g}(r_0, \cdots, r_n) = g\overline{g}(r_0, \cdots, r_n) \end{aligned}$$

pois $(r_0, \cdots, r_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Mas $g\overline{g} \in I$, pois I é um ideal, e $g\overline{g}$ é um polinómio com coeficientes reais, pelo que $g\overline{g} \in I_R$. Como $(r_0, \cdots, r_n) \in V(I_R)$, concluímos que $g\overline{g}(r_0, \cdots, r_n) = 0$. Segue-se que $g(r_0, \cdots, r_n) = 0$ e portanto $(r_0, \cdots, r_n) \in V(I)$. □

Considere-se a grassmaniana real $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}(n, k)$, definida pelo conjunto dos subespaços lineares sobre $\mathbb{R}$, de dimensão k, contidos em $\mathbb{R}^n$. Podemos considerar que $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}(n, k) \subset \mathrm{G}_{\mathbb{C}}(n, k)$, na medida em que os elementos da grassmaniana real correspondem (biunivocamente) aos elementos de grassmaniana complexa que são gerados (como subespaços vectoriais) por vectores de entradas reais. Estes elementos são por vezes designados por *pontos reais* da grassmaniana complexa. Seja $\mathcal{M}'_{k\times n}$ o conjunto das matrizes $k \times n$ com entradas reais. À semelhança do que acontece com a grassmaniana complexa,

$$\mathrm{G}_{\mathbb{R}}(n, k) = \{A \in \mathcal{M}'_{k\times n} \colon \mathrm{r}(A) = k\}/\sim \tag{5}$$

onde $A \sim B$ se e só se existe uma matriz $S \in GL(k)$ tal que $A = BS$. O quociente em (5) induz uma estrutura diferencial em $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}(n, k)$, bem como uma topologia – a topologia quociente da topologia usual em $\mathcal{M}'_{k\times n}$. Dado um sistema de cartas para $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}(n, k)$, diz-se que um subconjunto $B \subset \mathrm{G}_{\mathbb{R}}(n, k)$ tem medida nula se e só se a sua imagem em cada carta tem medida nula.

Uma propriedade diz-se *genérica* quando existe um aberto denso onde essa propriedade é válida. Por exemplo, uma propriedade é verdadeira para um subespaço projectivo genérico de dimensão k, $L \subset \mathbb{RP}^{n+1}$, se e só existe um aberto denso não-vazio na grassmaniana real $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}(n + 2, k + 1)$ tal que essa propriedade é válida para todo o elemento desse aberto. Note-se que há um difeomorfismo que identifica $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}(n, k)$ com $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}(n, n - k)$, pelo que uma propriedade genérica no espaço projectivo $\mathbb{RP}^n$, também é genérica no seu dual $\mathbb{RP}^{n*}$.

Seja $\mathrm{Sym}^{k+1}(\mathbb{C})$ a variedade quase-projectiva dada pelo produto simétrico. Tem-se que

$$\mathrm{Sym}^{k+1}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{k+1}/\sim$$

onde a relação de equivalência $\sim$ é dada por

$$(a_1, \ldots, a_{k+1}) \sim (b_1, \ldots, b_{k+1}) \Leftrightarrow \exists_{\sigma \in S_{k+1}} (a_1, \ldots, a_{k+1}) = \sigma(b_1, \ldots, b_{k+1}),$$

onde S_{k+1} designa o conjunto das permutações de $(k+1)$ elementos. As classes de equivalência designam-se por $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}\}$, por uma questão de comodidade. A topologia em $\mathrm{Sym}^{k+1}(\mathbb{C})$ é a topologia quociente da topologia de Zariski em $\mathbb{C}^{k+1}$.

A álgebra das funções regulares em $\mathrm{Sym}^{k+1}(\mathbb{C})$ é um anel polinomial gerado pelos polinómios simétricos elementares (ver [**9**]). Para $k+1$ variáveis, temos $k+1$ polinómios simétricos elementares, que são os seguintes:

$$\begin{aligned}
\sigma_0(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}) &= \prod_{1 \le i \le k+1} \lambda_i \\
\sigma_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}) &= \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le k+1} \lambda_{i_1} \lambda_{i2} \cdots \lambda_{i_k} \\
&\vdots \\
\sigma_{k-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}) &= \sum_{1 \le i < j \le k+1} \lambda_i \lambda_j \\
\sigma_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}) &= \sum_{1 \le i \le k+1} \lambda_i \,.
\end{aligned} \tag{6}$$

Considere-se, o lápis de quádricas $Q_\lambda \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ definido por

$$Q_\lambda = Q_0 - \lambda Q_\infty$$

onde $\lambda \in \mathbb{RP}^1$, $Q_0 \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ é a quádrica não-singular dada por

$$-x_0^2 + a_1 x_1^2 + \cdots + a_{n+1} x_{n+1}^2 = 0$$

com $0 < a_1 < \cdots < a_{n+1}$, e $Q_\infty \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ é a quádrica singular dada por

$$x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 0\,.$$

LEMA 1.17. *Um subespaço projectivo genérico $L \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ de dimensão k é tangente a Q_λ para $k+1$ valores distintos de λ.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere-se a grassmaniana $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}(n+2, k+1)$ que, como já vimos, é subvariedade projectiva do espaço projectivo complexo $\mathbb{CP}^{\frac{n+2!}{(k+1)!(n-k+1)!}-1}$. Vamos designar por $U_0 \subset \mathbb{C}^{n+2}$ o subespaço gerado pelo vector director $e_0 = (1, 0, \ldots, 0)$.

Qualquer elemento $U \in G_{\mathbb{C}}(n+2, k+1)$ pode ser representado por uma matriz $(n+2)\times(k+1)$ tal que as $k+1$ colunas $\{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ formam uma base para U, e tal que para certo conjunto de índices $\{i_1, \dots, i_{k+1}\}$, as linhas correspondentes formam a matriz identidade I_{k+1}. Tem-se que, se U contém U_0 então qualquer representante M de U verifica

$$\Delta_{i_1,\dots,i_{k+1}} = 0$$

para todo $2 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} < n+2$. Seja $\mathcal{A} \subset \mathbb{CP}^{\frac{(n+2)!}{(n-k+1)(k+1)}-1}$ o aberto (afim) definido por

$$\Delta_{n-k+2,\dots,n+2} \neq 0\,.$$

Considere-se a variedade quase-projectiva

$$X = G_{\mathbb{C}}(n+2, k+1) \cap \mathcal{A}$$

munida da topologia induzida pela topologia de $\mathbb{CP}^{\frac{n+2!}{(k+1)!(n-k+1)!}-1}$. Claramente, todo o elemento $U \in X$ verifica $U \cap U_0 = \{0\}$. Além disso, cada $U \in X$ tem um único representante da forma

$$M = \left[\frac{M_U}{I_{k+1}}\right] \tag{7}$$

pelo que U é univocamente determinado pela submatriz M_U, que tem dimensões $(n-k+1)\times(k+1)$. Conclui-se que X, para além de estar contida num aberto afim, está munida de um sistema de coordenadas dado pelas entradas da submatriz M_U, pelo que é isomorfa ao espaço afim $\mathbb{C}^{(n-k+1)\times(k+1)}$.

A matriz[5] que define a quádrica singular Q_∞ é semi-definida positiva e verifica $v^T Q_\infty v = 0$ se e só se $v \in U_0$. Em particular, a restrição de Q_∞ a qualquer $U \in X$ é definida positiva, o que significa que em coordenadas apropriadas, a quádrica $Q_\infty|_U$ é dada pela matriz identidade I_{k+1}. Por outras palavras, existe uma matriz M, representante de U, tal que $Q_\infty|_U = M^T Q_\infty M = I_{k+1}$. Sendo assim,

$$p(\lambda) = \det(Q_\lambda|_U) = \det(M^T Q_\lambda M) = \det(M^T Q_0 M - \lambda I_{k+1}) \tag{8}$$

é o polinómio característico da matriz $M^T Q_0 M$, e portanto tem $k+1$ raízes, contadas com as suas multiplicidades. Pelo Lema 1.9, concluímos que um subespaço projectivo genérico L é tangente a, no máximo, $k+1$ quádricas do lápis Q_λ.

Para provar que um subespaço projectivo genérico é tangente a exactamente $k+1$ quádricas do lápis Q_λ, define-se a função

$$f\colon X \to \mathrm{Sym}^{k+1}(\mathbb{C})$$

[5]Por uma questão de simplificação da linguagem, estamos a identificar a quádrica com a matriz que a determina.

que a cada $U \in X$ associa o conjunto das $k+1$ raízes $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}\}$ do polinómio $\det(M^T Q_\lambda M)$, contadas com a sua multiplicidade. Esta função está bem definida, pois se M' for um representante de U distinto de M, existe uma matriz $S \in GL(k+1)$ tal que $M' = MS$, donde segue que

$$\begin{aligned}\det(M'^T Q_\lambda M') &= \det((MS)^T Q_\lambda (MS)) \\ &= \det(S^T M^T Q_\lambda MS) \\ &= \det(S)^2 \det(M^T Q_\lambda M)\end{aligned}$$

e portanto as raízes $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}\}$ não dependem do representante M de $U \in X$.

Uma vez que a álgebra das funções regulares em $\mathrm{Sym}^{k+1}(\mathbb{C})$ é gerada pelos polinómios simétricos (6), para provar que a função f é regular, basta mostrar que a composição

$$\sigma_i \circ f \colon X \to \mathbb{C}$$

define uma função regular para todo o $i \in \{0, \ldots, k\}$.

Note-se que $\sigma_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ é o coeficiente de grau i do polinómio mónico

$$m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_{k+1}) .$$

Assim, para cada $U \in X$, temos

$$\sigma_i \circ f(U) = \frac{a_i}{a_{k+1}}$$

onde a_l é o coeficiente de grau l do polinómio (8). Já vimos que em X temos necessariamente $a_{k+1} \neq 0$. Além disso, os coeficientes do polinómio $p(\lambda)$ são funções polinomiais nas entradas da submatriz M_U referida em (7), que são coordenadas afins para X. Concluímos que a função $\sigma_i \circ f$ é regular para todo o $i \in \{0, \ldots, k\}$, e portanto f é uma função regular entre variedades quase-projectivas.

Tem-se que o subconjunto $S \subset \mathrm{Sym}^{k+1}(\mathbb{C})$ dado por

$$S = \{\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}\} \in \mathrm{Sym}^{k+1}(\mathbb{C}) \colon \lambda_i \neq \lambda_j \quad \text{para todo o} \quad i \neq j\}$$

é um aberto de $\mathrm{Sym}^{k+1}(\mathbb{C})$. A pré-imagem de um aberto por uma função regular é um aberto, pelo que $f^{-1}(S)$ é um aberto de X. Isto significa que $(f^{-1}(S))^c = V(I)$, onde $I \subset \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_{(n-k+1)(k+1)-1}]$ é um ideal gerado por polinómios homogéneos.

Já vimos que os elementos da grassmaniana real $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}(n+2, k+1)$ podem ser identificados com os elementos de $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}(n+2, k+1)$ gerados por $k+1$ vectores de entradas reais. Seja

$$X_R := \mathrm{G}_{\mathbb{R}}(n+2, k+1) \cap X .$$

Note-se que X_R pode ser identificada o subconjunto de $\mathbb{C}^{(n-k+1)\times(k+1)}$ formado pelos pontos com entradas reais. Pela Proposição 1.16

$$X_R \cap (f^{-1}(S))^c = V(I_R)$$

onde $I_R = I \cap \mathbb{R}[x_0, \ldots, x_{(n-k+1)(k+1)-1}]$. Para mostrar que $X_R \cap (f^{-1}(S))$ é não-vazio, considere-se o elemento $U \in X_R$ representado pela matriz

$$M = \left[\begin{array}{c} 0_{(n-k+1)\times(k+1)} \\ \hline \\ I_{k+1} \end{array} \right]. \tag{9}$$

Então

$$M^T Q_\lambda M = \begin{bmatrix} a_{n-k+1} - \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n+1} - \lambda \end{bmatrix}$$

e portanto, $\det(M^T Q_\lambda M) = 0$ equivale a calcular os valores próprios da matriz diagonal $\mathrm{diag}(a_{n-k+1}, \ldots, a_{n+1})$, os quais existem, são reais e distintos. Então $I_R \neq \{0\}$, e portanto, pela Proposição 1.15, $X_R \cap (f^{-1}(S))$ é um aberto denso de X_R.

Note-se que, pela Proposição 1.15, $\Delta_{n-k+2,\ldots,(n+2)} \neq 0$ define um aberto denso em $\mathcal{M}'_{(n+2)\times(k+1)}$. Logo, X_R é um aberto denso de $G_{\mathbb{R}}(n+2, k+1)$, donde se segue que $X_R \cap (f^{-1}(S))$ é também um aberto denso de $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}(n+2, k+1)$. Concluímos que o polinómio $p(\lambda) = \det(M^T Q_\lambda M)$ tem $k+1$ soluções reais distintas, num aberto denso de $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}(n+2, k+1)$. Como Q_λ é uma matriz simétrica com entradas reais, temos que $\lambda_i \in \mathbb{R}$ para todo o $i \in \{1, \ldots, k+1\}$. Por outras palavras, genericamente o lápis $Q_\lambda|_L$ é singular para $k+1$ valores reais e distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$. Novamente pelo Lema 1.9, um subespaço projectivo genérico L é tangente a Q_λ para $k+1$ valores reais e distintos, o que termina a demonstração. $\square$

CAPíTULO 2

Teorema de Chasles

Uma vez que estamos a considerar o lápis Q_λ definido pela equação

$$-{x_0}^2 + (a_1 - \lambda){x_1}^2 + \cdots + (a_{n+1} - \lambda){x_{n+1}}^2 = 0\,,$$

onde $0 < a_1 < \cdots < a_{n+1}$, à semelhança do que vimos em (4), a quádrica dual Q^*_λ é dada pela equação

$$-{z_0}^2 + \frac{{z_1}^2}{a_1 - \lambda} + \cdots + \frac{{z_{n+1}}^2}{a_{n+1} - \lambda} = 0\,.$$

Considere-se o aberto $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ dado por $z_0 \neq 0$, com coordenadas $(y_1, \ldots, y_n)$ onde $y_i = \frac{z_i}{z_0}$ para todo o $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Fazendo a restrição de Q^*_λ a esse aberto, obtemos uma família E_λ de elipsóides[1] confocais, parametrizada por $\lambda \in \mathbb{R}$, dada por

$$E_\lambda := Q^*_\lambda|_{\mathbb{R}^{n+1}} = \{(y_1, \ldots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \colon \sum_{i=1}^{n+1} \frac{{y_i}^2}{a_i - \lambda} = 1\}\,.$$

Por dualização do Lema 1.17, obtemos os dois resultados seguintes.

Lema 2.1. *Um ponto genérico $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ pertence a $n+1$ elipsóides distintos da família de elipsóides confocais E_λ.*

Demonstração. Considere-se em $\mathbb{RP}^{n+1*}$ as coordenadas $[z_0, \ldots, z_{n+1}]$ e seja $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{RP}^{n+1*}$ o aberto dado por $z_0 \neq 0$. O ponto $y = (y_1, \ldots, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ corresponde ao ponto $[1, y_1, \ldots, y_{n+1}] \in \mathbb{RP}^{n+1*}$, ou seja, y representa o hiperplano projectivo $L \in \mathbb{RP}^{n+1}$ definido por

$$x_0 + y_1 x_1 \cdots + y_{n+1} x_{n+1} = 0\,,$$

Pelo Lema 1.17, genericamente o hiperplano L é tangente a $n+1$ quádricas distintas Q_{λ_i} do lápis de quádricas Q_λ, o que equivale a dizer que, por definição de quádrica dual, $L^* \in Q^*_{\lambda_i}$ para todo o $i \in \{1, \ldots, n+1\}$. Uma vez que $L^* = y \in \mathbb{R}^{n+1}$, então $y \in Q^*_{\lambda_i} \cap \mathbb{R}^{n+1} = E_{\lambda_i}$. Resta apenas observar que uma propriedade genérica num espaço projectivo, também é genérica no seu dual, o que termina a demonstração. □

[1]Estas superfícies de dimensão n não são necessariamente elipsóides, mas designá-las-emos assim por comodidade de linguagem.

LEMA 2.2. *Uma recta genérica $l \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é tangente a n elipsóides distintos da família de elipsóides confocais E_λ. Além disso, os hiperplanos tangentes a cada um destes elipsóides nos pontos de tangência com a recta l são perpendiculares entre si.*

DEMONSTRAÇÃO. Considere-se em $\mathbb{RP}^{n+1*}$ as coordenadas $[z_0, \ldots, z_{n+1}]$ e seja $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{RP}^{n+1*}$ o aberto dado por $z_0 \neq 0$. Uma recta $l \in \mathbb{R}^{n+1}$ é dada por

$$t(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) + (1-t)(\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}),$$

onde $t \in \mathbb{R}$ e $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \neq (\beta_1, \ldots, \beta_{n+1})$. A recta l corresponde a uma (única) recta $\tilde{l} \in \mathbb{P}^{n+1*}$ dada por

$$\gamma[1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}] + \mu[1, \beta_1, \ldots, \beta_{n+1}],$$

onde $[\gamma, \mu] \in \mathbb{RP}^1$. A recta $\tilde{l}$ define um único subespaço projectivo $L \subset \mathbb{RP}^{n+1}$ com dimensão $n-1$, dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 + \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0 \\ x_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_{n+1} x_{n+1} = 0 \end{array} \right. . \tag{10}$$

Note-se que $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}) \neq (\beta_1, \ldots, \beta_{n+1})$, pelo que as equações que definem L são linearmente independentes. Pelo Lema 1.17, um subespaço projectivo genérico de dimensão $n-1$ é tangente a n quádricas distintas Q_{λ_i}. Pelo Lema 1.11, genericamente a recta dual $\tilde{l}$ é tangente a cada uma das quádricas $Q^*_{\lambda_i}$.

Resta agora provar que, genericamente, os pontos de tangência pertencem ao aberto dado por $z_0 \neq 0$. Para isso, vamos considerar a grassmaniana complexa $\mathrm{G}_{\mathbb{C}}(n+2, n)$.

Já provámos que a função

$$\begin{array}{rcl} f : X & \to & \mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}) \\ U & \mapsto & \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \end{array} \tag{11}$$

é uma função regular em X. Sabemos que existe um aberto denso $\mathcal{B} \subset \mathrm{G}_{\mathbb{C}}(n+2, n)$ tal que f associa n valores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ a cada elemento deste aberto. Considere-se a função

$$\begin{array}{rcl} F : \mathcal{B} & \to & \mathrm{Sym}^n(\mathbb{CP}^{n+1*}) \\ U & \mapsto & \{p_1, \ldots, p_n\} \end{array}$$

onde p_i é o ponto de tangência de $\tilde{l}$ com a quádrica $Q^*_{\lambda_i}$. Vamos mostrar em seguida que F é regular. Seja $U \in \mathcal{B}$. Então $L = P(U)$ é tangente a n quádricas Q_{λ_i}. Seja M um representante de U como em (7),

$$M = \left[\begin{array}{ccc} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & \cdots & m_{2n} \\ \hline & I_n & \end{array} \right].$$

Recorde-se que temos coordenadas afins em X, e portanto também em $\mathcal{B}$, dadas pela submatriz

$$M_U = \begin{bmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & \cdots & m_{2n} \end{bmatrix}.$$

Considere-se a quádrica Q_{λ_i} e seja $q = [q_0, \ldots, q_{n+1}]$ o ponto de tangência de L à quádrica Q_{λ_i}. O hiperplano H tangente a Q_{λ_i} no ponto q é dado por

$$-q_0 x_0 + (a_1 - \lambda_i) q_1 x_1 + \cdots + (a_{n+1} - \lambda_i) q_{n+1} x_{n+1} = 0$$

o que corresponde ao ponto p de tangência de $\tilde{l}$ com a quádrica dual $Q^*_{\lambda_i}$ dado por

$$p = [-q_0, (a_1 - \lambda_i) q_1, \ldots, (a_{n+1} - \lambda_i) q_{n+1}].$$

É muito importante observar que, em coordenadas apropriadas, a quádrica $Q_\lambda|_L$ é dada por uma matriz da forma $(A - \lambda I_n)$, onde A é uma matriz simétrica com n valores próprios distintos. Na sequência da demonstração do Lema 1.9, vimos que L é tangente a Q_{λ_i} num ponto q se e só se q é um ponto singular de $Q_{\lambda_i}|_L$, o que equivale a ter

$$(A - \lambda_i I_n) q = 0$$

Portanto, sabendo que um certo subespaço projectivo L é tangente a n quádricas distintas Q_{λ_i}, então o ponto de tangência a cada uma das quádricas é precisamente o vector próprio associado ao valor próprio λ_i da matriz A. Cada espaço próprio tem dimensão superior ou igual a 1. Como existem n espaços próprios distintos, então cada espaço próprio tem necessariamente dimensão 1, pelo que o ponto de tangência a cada uma das quádricas é único.

Sendo assim, para cada λ_i, o ponto de tangência q é a solução do sistema linear

$$(A - \lambda_i I_n) q = 0 \tag{12}$$

pelo que q é função regular das entradas da matriz A. Mas a matriz A é obtida a partir da matriz $M^T Q_{\lambda_i} M$ à custa de uma mudança de variáveis linear, portanto q é, em particular, uma função regular (polinomial) nas entradas da submatriz M_U, o que implica que $p = [-q_0, (a_1 - \lambda_1) q_1, \ldots, (a_{n+1} - \lambda_1) q_{n+1}]$ é também função regular das entradas da submatriz M_U. Concluímos que F é uma função regular.

Seja ϱ a projecção de $(\mathbb{CP}^{n+1*})^n$ em $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{CP}^{n+1*})$ e seja

$$\mathcal{F} := \varrho(H_\infty \times (\mathbb{CP}^{n+1*})^{n-1})$$

onde H_∞ é o hiperplano dado por $z_0 = 0$ (é o hiperplano no infinito). O conjunto $H_\infty \times (\mathbb{CP}^{n+1*})^{n-1}$ é um fechado de $(\mathbb{CP}^{n+1*})^n$, logo $\mathcal{F}$ é um fechado de $\mathrm{Sym}^n(\mathbb{CP}^{n+1*})$ pois ϱ é uma aplicação fechada. Então o conjunto $F^{-1}(\mathcal{F})$

é um fechado de $\mathcal{B}$, pelo que é um conjunto da forma $V(I)$ onde I é um ideal de $\mathbb{C}[x_0, \ldots, x_{n+1}]$. Seja

$$\mathcal{B}_R := \mathrm{G}_{\mathbb{R}}(n+2, n) \cap \mathcal{B}\,.$$

Pela Proposição 1.16, tem-se que

$$\mathrm{G}_{\mathbb{R}}(n+2, n) \cap F^{-1}(\mathcal{F}) = V(I_R)$$

onde $I_R \subset \mathbb{R}[x_0, \ldots, x_{n+1}]$, pelo que o seu complementar é um aberto de $\mathcal{B}_R$. Para mostrar que é não-vazio, e portanto denso, considere-se o elemento $U \in \mathrm{G}_{\mathbb{R}}(n+2, n)$ dado por

$$\left[\begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \hline & I_n & \end{array}\right]. \tag{13}$$

Claramente, o subespaço $L = P(U)$ é tangente a n quádricas distintas do lápis Q_λ, nomeadamente para $\lambda = a_2, \ldots, a_{n+1}$. A recta dual $\tilde{l}$ do subespaço L é dada por

$$\gamma[1, 0, \ldots, 0] + \mu[0, 1, 0, \ldots, 0]\,,$$

onde $[\gamma, \mu] \in \mathbb{RP}^1$. Pelo Lema 1.11, $\tilde{l}$ é tangente a $Q^*_{a_i}$ para $i \in \{2, \ldots, n+1\}$. Note-se que $\tilde{l} \cap H_\infty = [0, 1, 0, \ldots, 0]$, mas este ponto não pertence a nenhuma das quádricas referidas $Q^*_{a_i}$, o que implica que os pontos de tangência de $\tilde{l}$ não pertencem a H_∞.

Em seguida prova-se que $\mathcal{B}_R$ é um aberto denso de $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}(n+2, n)$. Para isso basta observar que $\mathcal{B}^c = V(I)$, o que implica que $\mathcal{B}^c_R = V(I_R)$. Temos então que B_R é um aberto de $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}(n+2, n)$. É não-vazio, pois o elemento U descrito em (13), pertence a $\mathcal{B}_R$. Logo, $\mathcal{B}_R$ é um aberto denso de $\mathrm{G}_{\mathbb{R}}(n+2, n)$.

Observe-se que, dado $U \in \mathrm{G}_{\mathbb{R}}(n+2, n) \cap F^{-1}(\mathcal{F}^c)$ e $L = P(U)$, em coordenadas adequadas, $Q_\lambda|_L$ é definida por $A - \lambda I_n$. Assim, o ponto de tangência q verifica, a equação (12), ou seja, é o vector próprio da matriz A associado ao valor próprio λ_i, como já foi referido. Como A é uma matriz não-singular simétrica de entradas reais, então q tem coordenadas reais, pelo que o ponto p (ponto de tangência de $\tilde{l} = L*$, com a quádrica dual $Q^*_{\lambda_i}$) tem também coordenadas reais.

Concluímos que uma recta genérica $\tilde{l} \in \mathbb{RP}^{n+1*}$ é tangente a n quádricas $Q^*_{\lambda_i}$ e os pontos de tangência p_i não pertencem ao hiperplano dado por $z_0 = 0$, ou seja, os pontos de tangência estão no aberto $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por $z_0 \neq 0$. Concluímos que, genericamente, uma recta $l \in \mathbb{R}^{n+1}$ é tangente a n elipsóides distintos da família confocal E_λ.

Sejam agora λ e μ dois valores distintos tais que a recta l é tangente a E_λ e E_μ. Sejam $q = (q_1, \ldots, q_{n+1}) \in E_\lambda$ e $p = (p_1, \ldots, p_{n+1}) \in E_\mu$ os respectivos pontos de tangência. O plano tangente a E_λ no ponto q é dado por

$$\frac{q_1}{a_1-\lambda}\, y_1 + \cdots + \frac{q_{n+1}}{a_{n+1}-\lambda}\, y_{n+1} = 0\,,$$

e o plano tangente a E_μ no ponto p é

$$\frac{p_1}{a_1-\mu}\, y_1 + \cdots + \frac{p_{n+1}}{a_{n+1}-\mu}\, y_{n+1} = 0\,.$$

Note-se que ambos os pontos q e p pertencem à recta l. Como a recta l é tangente aos dois elipsóides E_λ e E_μ, então l está contida em ambos os planos tangentes. Em particular, $p-q$ pertence ao plano tangente a E_λ no ponto q, e ao plano tangente a E_μ no ponto p. Somando as igualdades

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{q_i}{a_i-\lambda}(p_i-q_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{p_i}{a_i-\mu}(p_i-q_i) = 0$$

obtemos

$$\sum_{i=1}^{n+1} q_i p_i \left(\frac{1}{a_i-\lambda} - \frac{1}{a_i-\mu}\right) - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{{q_i}^2}{a_i-\lambda} + \sum_{i=1}^{n+1} \frac{{p_i}^2}{a_i-\mu} = 0$$

Desta forma,

$$0 = \sum_{i=1}^{n+1} q_i p_i \left(\frac{1}{a_i-\lambda} - \frac{1}{a_i-\mu}\right) = (\lambda-\mu)\sum_{i=1}^{n+1} \frac{q_i p_i}{(a_i-\lambda)(a_i-\mu)}\,,$$

donde se conclui que os dois planos tangentes são perpendiculares entre si.

□

Vamos designar por D_n o conjunto das rectas afins orientadas em $\mathbb{R}^{n+1}$. Temos que

$$D_n = \{(u,v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \colon \|v\| = 1, \langle u, v\rangle = 0\} = TS^n \cong T^*S^n \qquad (14)$$

onde v designa o vector director da recta, u designa o ponto na recta orientada que resulta da intersecção da recta com o subespaço vectorial ortogonal à recta, e o isomorfismo $TS^n \cong T^*S^n$ é obtido através da métrica euclidiana.

Pelo Lema 2.2, é possível associar a uma recta genérica $l \in \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto (não ordenado) de n valores λ_i, onde $1 \le i \le n$, tais que o elipsóide E_{λ_i} é tangente a l. Dada uma recta $l \in D_n$, podemos definir

$$\begin{array}{rcl} g : D_n & \to & \mathrm{G}_{\mathbb{R}}(n+2, n) \\ l & \mapsto & U \end{array}$$

onde U é o subespaço vectorial tal que $L = P(U)$ é o subespaço dual da recta $\tilde{l}$ (fecho de l a todo o espaço projectivo $\mathbb{RP}^{n+1*}$). A função g é um difeomorfismo na sua imagem.

Pelo Lema 2.2 e usando também o facto da função em (11) ser regular e de g ser um difeomorfismo na sua imagem, podemos atribuir a uma recta genérica $l \in D_n$ um conjunto de valores $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ distintos, que podem ser ordenados em cada componente conexa do aberto, obtendo-se n funções $\lambda_i : D_n \to \mathbb{R}$, de classe C^∞, definidas num aberto denso de D_n.

Recorde-se que o *plano osculante a uma curva* $\gamma(t)$ *num ponto* $\gamma(t_0)$ é o plano gerado pelos vectores $\dot\gamma(t_0)$ e $\ddot\gamma(t_0)$.

Teorema de Chasles. Seja $\gamma : \mathbb{R} \to E_0$ uma geodésica do elipsóide E_0, e $\lambda_i(t)$, com $1 \le i \le n-1$, os valores correspondentes à recta tangente à geodésica em $\gamma(t)$. Então cada $\lambda_i(t)$ é constante.

Demonstração. Seja $\gamma : \mathbb{R} \to E_0$ uma geodésica do elipsóide E_0 parametrizada pelo comprimento de arco. Para cada $t \in \mathbb{R}$, seja $\Lambda(t)$ a recta orientada dada pela tangente a γ no ponto $\gamma(t)$. Obtemos um caminho de rectas orientadas $\Lambda : \mathbb{R} \to D_n$, onde

$$\Lambda(t) = (\gamma(t) - \langle \gamma(t), \dot\gamma(t)\rangle\, \dot\gamma(t), \dot\gamma(t))\,.$$

Fixe-se um instante $t = t_0$. Fazendo uma translação, podemos supor que $\gamma(t_0) = 0$. Desta forma, $\dot\Lambda(t_0) = (0, \ddot\gamma(t_0))$.

Seja π o plano osculante a γ no ponto $\gamma(t_0)$. Dado $k \in \mathbb{R}$, define-se o caminho de rectas $L_k(s) \subset \pi$ por

$$L_k(s) = \left(0, \dot\gamma(t_0)\cos(ks) + \frac{\ddot\gamma(t_0)}{\|\ddot\gamma(t_0)\|}\operatorname{sen}(ks)\right)\,.$$

Tem-se que

$$\dot L_k(s) = (0, -k\dot\gamma(t_0)\operatorname{sen}(ks) + k\frac{\ddot\gamma(t_0)}{\|\ddot\gamma(t_0)\|}\cos(ks))\,.$$

Portanto,

$$\dot L_k(0) = (0, k\frac{\ddot\gamma(t_0)}{\|\ddot\gamma(t_0)\|})$$

donde segue que

$$\dot L_{\|\ddot\gamma(t_0)\|}(0) = \dot\Lambda(t_0)\,.$$

Qualquer elemento $v \in T_{\Lambda(t_0)}\Lambda$ é da forma $v = \lambda\dot\Lambda(t_0)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, portanto para $k = \lambda\|\ddot\gamma(t_0)\|$ obtém-se $\dot L_k(0) = v$. Assim, cada elemento $v \in T_{\Lambda(t_0)}\Lambda$ pode ser obtido através de um caminho de rectas em π, passando pelo ponto $\gamma(t_0)$, bastando para isso escolher a constante k convenientemente.

Considere-se a hipersuperfície $Z_i \subset D_n$ dada pelas rectas orientadas tangentes a $E_{\lambda_i(t_0)}$ (portanto $\Lambda(t_0) \in Z_i$). Seja p_i o ponto de tangência de $\Lambda(t_0)$ com $E_{\lambda_i(t_0)}$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\dot\gamma(t_0) = (1, 0, \ldots, 0)$, $\ddot\gamma(t_0) = (0, \alpha, 0, \ldots, 0)$ com $\alpha > 0$, $p_i = (\beta, 0, \ldots, 0)$ com $\beta \neq 0$, que $T_{q_i}E_{\lambda_i(t_0)}$ é dado por $y_{n+1} = 0$ e que $\nabla F(\beta, 0, \ldots, 0) = (0, \ldots, 0, \eta)$ com $\eta \neq 0$, onde F é o polinómio de grau 2 tal que o elipsóide $E_{\lambda_i(t_0)}$ é dado por $F(y_1, \ldots, y_{n+1}) = 0$. De facto, pelo Lema 2.2, o hiperplano tangente a E_0 no ponto $\gamma(t_0)$ é perpendicular ao hiperplano $T_{p_i}E_{\lambda_i(t_0)}$. Uma vez que γ é uma geodésica, o vector $\ddot\gamma(t_0)$ é perpendicular a $T_{\gamma(t_0)}E_0$, donde segue necessariamente que o plano osculante π está contido em $T_{p_i}E_{\lambda_i(t_0)}$. Para concluir a demonstração, resta apenas provar que

$$T_{\Lambda(t_0)}\Lambda \subset T_{\Lambda(t_0)}Z_i\,.$$

Para cada elemento $v \in T_{\Lambda(t_0)}\Lambda$ considere-se o caminho de rectas orientadas $L_k(s)$ acima definido,

$$L_k(s) = \left(0, \dot{\gamma}(t_0)\cos(ks) + \frac{\ddot{\gamma}(t_0)}{\|\ddot{\gamma}(t_0)\|}\operatorname{sen}(ks)\right).$$

O vector director da recta $L_k(s)$ é $(\cos(ks), -\operatorname{sen}(ks), 0, \ldots, 0)$. Seja r a recta que passa no ponto $\gamma(t_0)$, com direcção dada pelo vector $w = (\cos(ks), \operatorname{sen}(ks), 0, \ldots, 0, \xi)$, ou seja, r é dada parametricamente por τw, onde $\tau \in \mathbb{R}$. Sejam

$$G_1(\tau, \xi, s) = F(\tau\cos(ks), \tau\operatorname{sen}(ks), 0, \ldots, 0, \tau\xi)$$

$$G_2(\tau, \xi, s) = \nabla F|_{(\tau\cos(ks), \tau\operatorname{sen}(ks), 0, \ldots, 0, \tau\xi)} \cdot (\cos(ks), \operatorname{sen}(ks), 0, \ldots, 0, \xi)$$

e considere-se o sistema dado por

$$\begin{cases} G_1(\tau, \xi, s) = 0 \\ G_2(\tau, \xi, s) = 0 \end{cases} \tag{15}$$

Pretende-se encontrar solução ξ e τ em função de s, por forma a obter, para cada s, uma recta que passa por $\gamma(t_0)$ e que seja tangente ao elipsóide $E_{\lambda_i(t_0)}$. Para $s = 0$ existe solução, $\xi = 0$ e $\tau = \beta$. Interessa que o determinante

$$\det \frac{\partial G}{\partial(\tau, \xi)}(\beta, 0, 0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial \tau} & \frac{\partial G_1}{\partial \xi} \\ \frac{\partial G_2}{\partial \tau} & \frac{\partial G_2}{\partial \xi} \end{vmatrix}_{|(\beta,0,0)}$$

seja não-nulo. Tem-se que

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial G_1}{\partial \tau}(\tau, \xi, s) &= \tfrac{\partial F}{\partial y_1}(\tau\cos(ks), \tau\operatorname{sen}(ks), 0, \ldots, 0, \tau\xi)\cos(ks) \\ &\quad + \tfrac{\partial F}{\partial y_2}(\tau\cos(ks), \tau\operatorname{sen}(ks), 0, \ldots, 0, \tau\xi)\operatorname{sen}(ks) \\ &\quad + \tfrac{\partial F}{\partial y_{n+1}}(\tau\cos(ks), \tau\operatorname{sen}(ks), 0, \ldots, 0, \tau\xi)\xi \end{aligned}$$

e portanto $\frac{\partial G_1}{\partial \tau}(\beta, 0, 0) = 0$. Por outro lado,

$$\tfrac{\partial G_1}{\partial \xi}(\beta, 0, 0) = \tfrac{\partial F}{\partial y_{n+1}}(\beta, 0, \ldots, 0)\beta = \eta\beta \neq 0\,.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial G_2}{\partial \tau}(\tau, \xi, s) &= \tfrac{\partial}{\partial \tau}\left(\tfrac{\partial F}{\partial y_1}\cos(ks) + \tfrac{\partial F}{\partial y_2}\operatorname{sen}(ks) + \tfrac{\partial F}{\partial y_{n+1}}\xi\right) \\ &= \cos(ks)\left(\tfrac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}\cos(ks) + \tfrac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2}\operatorname{sen}(ks) + \tfrac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_{n+1}}\xi\right) \\ &\quad + \operatorname{sen}(ks)\left(\tfrac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_2}\cos(ks) + \tfrac{\partial^2 F}{\partial y_2^2}\operatorname{sen}(ks) + \tfrac{\partial^2 F}{\partial y_2 \partial y_{n+1}}\xi\right) \\ &\quad + \xi\left(\tfrac{\partial^2 F}{\partial y_1 \partial y_{n+1}}\cos(ks) + \tfrac{\partial^2 F}{\partial y_2 \partial y_{n+1}}\operatorname{sen}(ks) + \tfrac{\partial^2 F}{\partial y_{n+1}^2}\xi\right) \end{aligned}$$

donde segue que

$$\frac{\partial G_2}{\partial \tau}(\beta, 0, 0) = \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}(\beta, 0, \ldots, 0)\,.$$

A função F que define o elipsóide $E_{\lambda(t_0)}$ é da forma

$$\begin{aligned} F(y_1, \ldots, y_{n+1}) = b_1{y_1}^2 + \cdots + b_{n+1}y_{n+1}^2 + \\ + \sum_{1\le i<j\le n+1} c_{ij}y_iy_j + d_1y_1 + \cdots + d_{n+1}y_{n+1} + d_0\,. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} F(\beta, 0, \ldots, 0) = 0 \Leftrightarrow b_1\beta^2 + d_1\beta + d_0 = 0 \\ \dot\gamma(t_0)\cdot \nabla F(\beta, 0, \cdots, 0) = 0 \Leftrightarrow 2b_1\beta + d_1 = 0 \end{aligned} \tag{16}$$

De (16) seguem as igualdades:

$$2b_1\beta = -d_1 \quad \text{e} \quad b_1\beta^2 = d_0\,.$$

Assim, se supusermos que $b_1 = 0$, temos também que $d_1 = d_0 = 0$ e portanto F terá a forma

$$F(y_1, \ldots, y_{n+1}) = f(y_2, \ldots, y_{n+1}) + y_1(c_{12}y_2 + \cdots + c_{1(n+1)}y_{n+1})$$

onde f é um polinómio de grau 2, com coeficiente de grau 0 nulo. Assim,

$$F(\tau, 0, \ldots, 0) = 0 \Leftrightarrow \Lambda(t_0) \subset E_{\lambda_i(t_0)}$$

donde se conclui que $\Lambda(t_0)$ tem infinitos pontos de tangência com $E_{\lambda_i(t_0)}$. No entanto, pelo Lema 2.2, uma recta genérica é tangente a um número finito de elipsóides da família E_λ, e cada ponto de tangência é obtido de um sistema linear, mais precisamente, cada ponto de tangência é dado pelo vector próprio obtido da resolução do sistema (12). Daqui se conclui que, genericamente, $\frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2}(\beta, 0, \ldots, 0) \neq 0$. Então o sistema (15) tem solução para uma vizinhança de $s = 0$. Seja $C_k(s)$ o caminho de rectas orientadas dado por

$$\begin{aligned} C_k(s) &= \left(\gamma(t_0), \tfrac{(\tau(s)\cos(ks), \tau(s)\,\mathrm{sen}(ks), 0, \ldots, 0, \tau(s)\xi(s))}{\|(\tau(s)\cos(ks), \tau(s)\,\mathrm{sen}(ks), 0, \ldots, 0, \tau(s)\xi(s))\|}\right) \\ &= \left(0, \tfrac{(\tau(s)\cos(ks), \tau(s)\,\mathrm{sen}(ks), 0, \ldots, 0, \tau(s)\xi(s))}{\tau(s)\sqrt{1+\xi^2(s)}}\right)\,. \end{aligned}$$

Claramente, $C_k(s) \in Z_i$. Em seguida prova-se que $\dot C_k(0) = \dot L_k(0)$. Para simplificar a notação, seja $n(s) = \tau(s)\sqrt{1+\xi^2(s)}$. Então

$$\dot n(s) = \dot\tau(s)\sqrt{1+\xi^2(s)} + \frac{\tau(s)\xi(s)\dot\xi(s)}{\sqrt{1+\xi^2(s)}}\,,$$

pelo que $n(0) = \beta$ e $\dot{n}(0) = \dot{\tau}(0)$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{ds}(\tau(s)\cos(ks)n^{-1}(s)) &= \tfrac{\dot{\tau}(s)\cos(ks)}{n(s)} - \tfrac{k\tau(s)\operatorname{sen}(ks)}{n(s)} - \tfrac{\tau(s)\cos(ks)\dot{n}(s)}{n^2(s)} \\
\tfrac{d}{ds}(\tau(s)\operatorname{sen}(ks)n^{-1}(s)) &= \tfrac{\dot{\tau}(s)\operatorname{sen}(ks)}{n(s)} + \tfrac{k\tau(s)\cos(ks)}{n(s)} - \tfrac{\tau(s)\operatorname{sen}(ks)\dot{n}(s)}{n^2(s)} \\
\tfrac{d}{ds}(\tau(s)\xi(s)n^{-1}(s)) &= \tfrac{\dot{\tau}(s)\xi(s)}{n(s)} + \tfrac{\tau(s)\dot{\xi}(s)}{n(s)} - \tfrac{\tau(s)\xi(s)\dot{n}(s)}{n^2(s)}
\end{aligned}$$

donde segue que

$$\begin{aligned}
\tfrac{d}{ds}(\tau(s)\cos(ks)n^{-1}(s))\big|_{s=0} &= \tfrac{\dot{\tau}(0)}{n(0)} - \tfrac{\tau(0)\,\dot{n}(0)}{n^2(0)} = \tfrac{\dot{\tau}(0)}{\beta} - \tfrac{\beta\,\dot{\tau}(0)}{\beta^2} = 0\,, \\
\tfrac{d}{ds}(-\tau(s)\operatorname{sen}(ks)n^{-1}(s))\big|_{s=0} &= -\tfrac{k\,\tau(0)}{n(0)} = -\tfrac{k\,\beta}{\beta} = -k \\
\tfrac{d}{ds}(\tau(s)\xi(s)n^{-1}(s))\big|_{s=0} &= \tfrac{\tau(0)\,\dot{\xi}(0)}{n(0)} = \tfrac{\beta\,\dot{\xi}(0)}{\beta} = \dot{\xi}(0)
\end{aligned}$$

Substituindo as funções implícitas $\tau(s), \xi(s)$ na primeira equação do sistema (15) e derivando em ordem a s, obtém-se para $s = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial x_{n+1}}(\beta, 0, \ldots, 0)\,(\dot{\tau}(0)\xi(0) + \tau(0)\dot{\xi}(0)) = 0 \Leftrightarrow \eta\beta\dot{\xi}(0) = 0 \Leftrightarrow \dot{\xi}(0) = 0.$$

Tem-se então

$$\dot{C}_k(0) = (0, (0, -k, 0, \ldots, 0)) = \left(0, k\frac{\ddot{\gamma}(t_0)}{\|\ddot{\gamma}(t_0)\|}\right) = \dot{L}_k(0)\,,$$

o que implica que $T_{\Lambda(t_0)}\Lambda \subset T_{\Lambda(t_0)}Z_i$. Conclui-se que $\Lambda(t) \in Z_i$ para todo o $t \in \mathbb{R}$, pelo que o valor de λ_i é constante ao longo de geodésicas em E_0, para qualquer $i \in \{1, \ldots, n-1\}$. $\square$

CAPíTULO 3

Sistemas Completamente Integráveis

Dada uma variedade diferenciável M, designemos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto de todos os campos vectoriais de classe C^∞ em M e por $\Omega^k(M)$ o conjunto de todas as formas diferenciais de grau k em M ($k \in \mathbb{N}$).

Seja M uma variedade diferenciável, $X \in \mathcal{X}(M)$ um campo vectorial e $\omega \in \Omega^k(M)$ uma forma-k com $k \geq 1$. Define-se a *contracção de X com ω* como sendo a forma $X \rfloor \omega \in \Omega^{k-1}(M)$ dada por

$$X \rfloor \omega(Y_1, \ldots, Y_{k-1}) = \omega(X, Y_1, \ldots, Y_{k-1})$$

onde $Y_1, \ldots, Y_{k-1} \in \mathcal{X}(M)$.

Uma forma-2 $\omega \in \Omega^2(M)$ diz-se *não-degenerada* se $v_p \rfloor \omega = 0$ para todo o $v_p \in T_pM$ implica $v_p = 0$.

Definição 3.1. Uma *variedade simpléctica* é um par (M, ω), onde M é uma variedade diferenciável e $\omega \in \Omega^2(M)$ é uma forma fechada ($d\omega = 0$) e não-degenerada.

Dada uma variedade simpléctica (M, ω), a matriz W que representa a forma simpléctica ω num dado ponto p, é anti-simétrica, portanto

$$\det W = (-1)^{\dim M} \det W \,. \tag{17}$$

Se a dimensão de M for ímpar, obtemos $\det W = 0$, o que contradiz a definição de variedade simpléctica. Concluímos que a dimensão de uma variedade simpléctica é par.

Definição 3.2. O *campo Hamiltoniano* gerado por $H \in C^\infty(M)$ é o único campo vectorial $X_H \in \mathcal{X}(M)$ tal que

$$X_H \rfloor \omega = -dH \,.$$

Definição 3.3. Seja M uma variedade diferenciável e $X \in \mathcal{X}(M)$ um campo vectorial. O *fluxo ϕ^X definido pelo campo vectorial X* é a aplicação $\phi^X \colon M \times \mathbb{R} \to M$ determinada pela solução $\phi^X_t(p)$ do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\phi^X_t(p) = X_{\phi^X_t(p)} \\ \phi^X_0(p) = p \end{cases}$$

O *fluxo Hamiltoniano* gerado por $H \in C^\infty(M)$ é o fluxo ϕ^{X_H} determinado pelo campo hamiltoniano X_H. Recorde-se que um campo vectorial $X \in \mathcal{X}(M)$ se diz *completo* se o seu fluxo Φ_t^X está definido para todo o $t \in \mathbb{R}$.

DEFINIÇÃO 3.4. Sejam $F, G \in C^\infty(M)$. O seu *parêntesis de Poisson* é definido por $\{F, G\} := X_F \cdot G$.

Dada uma variedade simpléctica (M, ω), escolhemos uma função fixa $H \in C^\infty(M)$, dita o *Hamiltoniano*, cujo fluxo Hamiltoniano pretendemos estudar. Uma função $F \in C^\infty(M)$ diz-se um um *primeiro integral* do Hamiltoniano H se $\{H, F\} = 0$.

DEFINIÇÃO 3.5. $F_1, \ldots, F_m \in C^\infty(M)$ dizem-se

1. *em involução* se $\{F_i, F_j\} = 0$ para todo o $i, j = 1, \ldots, m$;
2. *independentes em* $p \in M$ se $(dF_1)_p, \ldots, (dF_m)_p \in T_p^*M$ são covectores linearmente independentes.

DEFINIÇÃO 3.6. Seja (M, ω) uma variedade simpléctica com dimensão $2n$. Um sistema (M, ω, H) diz-se *completamente integrável* se existem n primeiros integrais $F_1, \ldots, F_n$ em involução independentes num aberto denso $U \subset M$.

LEMA 3.7. *Seja (M, ω) uma variedade simpléctica, $\lambda \in C^\infty(M)$, c um valor regular de λ e $\Sigma = \lambda^{-1}(c)$. Então $\omega|_\Sigma$ é degenerada,* $\dim \ker \omega|_\Sigma = 1$ *e as curvas integrais do campo hamiltoniano X_λ são as curvas integrais da distribuição definida por* $\ker \omega|_\Sigma$.

DEMONSTRAÇÃO. Tendo em conta que

$$0 = \omega(X_\lambda, X_\lambda) = -d\lambda(X_\lambda) = X_\lambda \cdot \lambda$$

vemos que Σ é invariante para o fluxo de X_λ. Assim, X_λ é tangente a Σ.

Facilmente se prova que $\ker \omega|_\Sigma$ tem dimensão 1. Basta observar que $\dim \Sigma = \dim M - 1$, pelo que Σ tem dimensão ímpar, e portanto, por (17), ω é degenerada em Σ. Considerem-se agora dois vectores não nulos $v_1, v_2 \in T_p\Sigma$, $p \in \Sigma$, tais que

$$\omega(v_1, v) = 0 \quad \text{e} \quad \omega(v_2, v) = 0$$

para todo o vector $v \in T_p\Sigma$. Como ω é não-degenerada em M, podemos tomar um vector $u \in T_pM \setminus T_p\Sigma$ tal que

$$\omega(v_1, u) = 1 \quad \text{e} \quad \omega(v_2, u) = \alpha \neq 0\,.$$

Assim,

$$\alpha\omega(v_1, u) - \omega(v_2, u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega(\alpha v_1 - v_2, u) = 0\,.$$

Tendo em conta que qualquer vector $v \in T_pM$ pode ser escrito univocamente na forma $v = w_1 + w_2$ onde $w_1 \in T_p\Sigma$ e $w_2 = cu$ com $c \in \mathbb{R}$, e que ω é não-degenerada em M, concluímos que $\alpha v_1 - v_2 = 0$, pelo que $v_2 = \alpha v_1$. Portanto $\ker \omega|_\Sigma$ tem dimensão 1.

Por outro lado tem-se que

$$X_\lambda \rfloor (\omega|_\Sigma) = -d\lambda|_\Sigma = 0$$

pois λ é constante em Σ. Concluímos que $X_\lambda \in \ker(\omega|_\Sigma)$ e portanto, como $\dim \omega|_\Sigma = 1$, as curvas integrais de X_λ em Σ são as curvas integrais de $\ker(\omega|_\Sigma)$ (a menos de reparametrização). $\square$

Considere-se a projecção canónica

$$\begin{array}{rcl} \pi\colon T^*\mathbb{R}^{n+1} & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ (q,p) & \mapsto & q\,. \end{array}$$

Define-se a *1-forma canónica* (ou *1-forma tautológica* ou *potencial simpléctico canónico*) $\theta \in \Omega^1(T^*\mathbb{R}^{n+1})$ através de

$$\theta(\alpha_p) = \pi^*\alpha_p$$

para todo o $\alpha_p \in T^*\mathbb{R}^{n+1}$. A forma $\omega \in \Omega^2(T^*\mathbb{R}^{n+1})$ dada por

$$\omega = d\theta$$

designa-se por *forma simpléctica canónica*. Em coordenadas locais,

$$\theta = \textstyle\sum_{i=0}^n p_i dq^i\,,$$
$$\omega = \textstyle\sum_{i=0}^n dp_i \wedge dq^i\,.$$

Considere-se a variedade simpléctica $(T^*\mathbb{R}^{n+1}, \omega)$ onde ω é a forma simpléctica canónica, munida do sistema de coordenadas $(q^0, \dots, q^n, p_0, \dots, p_n)$. Por simplificação de notação, escreve-se (q,p).

Seja E o elipsóide E_0 da família de elipsóides confocais E_λ considerada no capítulo anterior e seja D_n o conjunto das rectas orientadas em $\mathbb{R}^{n+1}$, definido em (14).

Considere-se em T^*E o Hamiltoniano dado por $H = \frac{1}{2}\langle p, p\rangle$ e seja $\Sigma = ST^*E$. Tem-se que $\Sigma = H^{-1}(1/2)$. Por outro lado, considerando o mergulho de Σ em D_n dado por

$$\begin{array}{rcl} \psi\colon \Sigma & \to & D_n \\ (q,p) & \mapsto & (q - \langle p, q\rangle p, p) \end{array} \tag{18}$$

temos que Σ também pode ser interpretado como o conjunto das rectas orientadas tangentes a E. Então, como já foi referido no capítulo anterior, o conjunto de valores $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ para cada um dos elementos de Σ inclui necessariamente o valor 0 e sem perda de generalidade, podemos ordenar os valores de λ de forma que $\lambda_n = 0$ em Σ. Por outras palavras, Σ é o subconjunto de D_n dado por $\Sigma = \lambda_n^{-1}(0)$.

Note-se que (T^*E, ω_1) e (D_n, ω_2) são ambas subvariedades simplécticas de $(T^*\mathbb{R}^{n+1}, \omega)$, onde ω_1 é a restrição de ω a T^*E e ω_2 é a restrição de ω a D_n. Assim, sendo Σ subvariedade de T^*E, podemos definir em Σ a forma ξ induzida em Σ por ω_1. Por outro lado, Σ é também subvariedade de D_n, pelo que podemos definir a forma η induzida em Σ por ω_2.

Para os cálculos que se seguem, convém mostrar que as formas ξ e η são a mesma. De (18) segue que

$$\begin{aligned} d\psi\colon T\Sigma &\to TD_n \\ (v, w) &\mapsto (v - \langle q, w\rangle p - \langle p, v\rangle p - \langle p, q\rangle w, w)\,. \end{aligned}$$

Sejam $(v_1, w_1), (v_2, w_2) \in T_{(q,p)}\Sigma$. Então

$$\xi((v_1, w_1), (v_2, w_2)) = \langle w_1, v_2\rangle - \langle v_1, w_2\rangle\,.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \eta(d\psi(v_1, w_1), d\psi(v_2, w_2)) &= \langle w_1, v_2 - \langle q, w_2\rangle p - \langle p, v_2\rangle p - \langle p, q\rangle w_2\rangle - \\ &\quad -\langle v_1 - \langle q, w_1\rangle p - \langle p, v_1\rangle p - \langle p, q\rangle w_1, w_2\rangle \\ &= \langle w_1, v_2\rangle - \langle v_1, w_2\rangle - \\ &\quad -\langle q, w_2\rangle\langle w_1, p\rangle - \langle p, v_2\rangle\langle w_1, p\rangle \\ &\quad +\langle q, w_1\rangle\langle p, w_2\rangle + \langle p, v_1\rangle\langle p, w_2\rangle \\ &= \langle w_1, v_2\rangle - \langle v_1, w_2\rangle \end{aligned}$$

pois

$$\|p\|^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \langle p, \dot{p}\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle p, w\rangle = 0\,.$$

PROPOSIÇÃO 3.8. *As funções λ_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$ são primeiros integrais em involução e independentes do fluxo geodésico do elipsóide E em D_n.*

DEMONSTRAÇÃO. Do Lema 3.7 e da igualdade entre as formas simplécticas ξ e η em Σ segue-se que o fluxo geodésico de E é dado pelo fluxo Hamiltoniano gerado por λ_n. Pelo Teorema de Chasles temos que ao longo de qualquer geodésica de E

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = 0 \Leftrightarrow X_{\lambda_n} \cdot \lambda_i = 0 \Leftrightarrow \{\lambda_n, \lambda_i\} = 0,$$

pelo que as funções λ_i são primeiros integrais do Hamiltoniano λ_n. Para provar que estão em involução, basta observar que dado um elemento genérico $(q, p) \in D_n$, então $\lambda_i(q, p) = \alpha$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, que significa que (q, p) é em particular tangente ao elipsóide E_α. Pelo mesmo argumento usado acima, o fluxo geodésico de E_α é o fluxo Hamiltoniano gerado por λ_i, e novamente pelo Teorema de Chasles $\{\lambda_i, \lambda_j\} = 0$ para $j = 1, \ldots, n$. Concluímos que $\{\lambda_i, \lambda_j\}(p, q) = 0$.

Vamos agora provar que $(d\lambda_1)|_{(q,p)}, \ldots, (d\lambda_n)|_{(q,p)}$ são linearmente independentes, para um ponto genérico $(q, p) \in D_n$. Note-se que os covectores $(d\lambda_1)|_{(q,p)}, \ldots, (d\lambda_n)|_{(q,p)}$ são linearmente independentes se e só se $X_{\lambda_1}(q, p), \ldots, X_{\lambda_n}(q, p)$ são linearmente independentes.

Seja $\mathcal{B} \subset D_n$ o aberto denso tal que, para qualquer $(q, p) \in \mathcal{B}$, os valores $c_1 := \lambda_1(q, p), \ldots, c_n := \lambda_n(q, p)$ existem e são distintos. Para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$, tem-se que

$$X_{\lambda_i}(q, p) = \alpha_i(\dot{q}_i(0), \dot{p}_i(0)),$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $(q_i(t), p_i(t))$ é um caminho[1] de rectas tangentes a uma determinada geodésica $\gamma_i : \mathbb{R} \to E_{c_i}$, tal que $(q_i(0), p_i(0)) = (q, p)$.

Uma vez que $p_i = \dot{\gamma}_i$, então $\dot{p}_i = \ddot{\gamma}_i$, donde segue que $\dot{p}_i(0)$ é a aceleração da geodésica γ_i em $t = 0$, e portanto é não-nulo e perpendicular a E_{c_i}. Pelo Lema 2.2, temos que $\langle \dot{p}_i(0), \dot{p}_j(0) \rangle = 0$ para $i \neq j$. Então, os vectores

$$(\dot{q}_1(0), \dot{p}_1(0)), \ldots, (\dot{q}_n(0), \dot{p}_n(0))$$

são linearmente independentes. Daqui se conclui que também

$$X_{\lambda_1}(q, p), \ldots, X_{\lambda_n}(q, p)$$

são linearmente independentes, o que termina a demonstração. □

Fica assim demonstrado que as funções $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são n primeiros integrais em involução e independentes do Hamiltoniano λ_n, donde se segue que o fluxo geodésico num elipsóide é completamente integrável.

[1] O índice i não se refere a coordenadas do caminho, mas sim ao índice do campo hamiltoniano em causa, X_{λ_i}.

Bibliografia

[1] Ron Donagi, Eyal Markman, *Spectral covers, algebraically completely integrable, hamiltonian systems, and moduli of bundles*, 1995.

[2] George A. Jennings, *Modern Geometry with Applications*, Springer, 1994.

[3] Vladimir Igorevich Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, 1980.

[4] Karen E. Smith, Lauri Kahapää, Pekka Kekäläinen, William Traves, *An Invitation to Algebraic Geometry*, Springer, 2000.

[5] Michèle Audin, *Les systèmes hamiltoniens et leur intégrabilité*, Société Mathématique de France, 2001.

[6] Nigel Hitchin, *Projective Geometry*, Oxford, 2003.

[7] William Fulton, *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*, Addison-Wesley Publishing Co. Inc., 1989.

[8] Joe Harris, *Algebraic geometry: a first course*, Springer-Verlag, 1992.

[9] Serge Lang, *Algebra*, Addison-Wesley, 1993.