

VIAGENS NO TEMPO EM RELATIVIDADE GERAL

Sara Sal Santos

Fevereiro 2019

Desde pequena que o Cosmos me cativa. De entre todos os mistérios do Universo, a possibilidade de viajar no tempo e no espaço sempre foi algo que me fascinou. Ao surgir a oportunidade de abordar tal tema na cadeira de Projecto de Licenciatura, decidi saciar a minha curiosidade de infância e procurar responder à pergunta, *É possível viajar para trás no tempo?*

1	Conceitos Fundamentais	1
1.1	Geometria de Minkowski	1
1.2	Paradoxo dos Gémeos	2
1.3	Dilatação do Tempo	4
1.4	<i>Wormhole</i>	4
2	Problema	7
2.1	Apresentação do Problema	7
2.2	Interpretação da Solução Geral	8
2.3	Densidade de Energia	9
2.4	Condições de Fronteira	9
2.5	Resolução do Problema	10
2.6	Conclusão e Observações Finais	11

1 Conceitos Fundamentais

1.1 Geometria de Minkowski

Um diagrama espaço-tempo consiste numa representação geométrica do espaço e do tempo na Teoria da Relatividade. Estes diagramas permitem representar acontecimentos como pontos do plano com coordenadas cartesianas (t, x) .

A história de uma partícula corresponde ao movimento desta no espaço e no tempo, podendo ser representada no diagrama por uma linha.

Na figura 1, (a) representa uma partícula em repouso num determinado ponto do espaço, (b) uma partícula que se movimenta a velocidade constante, (c) um raio luminoso ou uma partícula sem

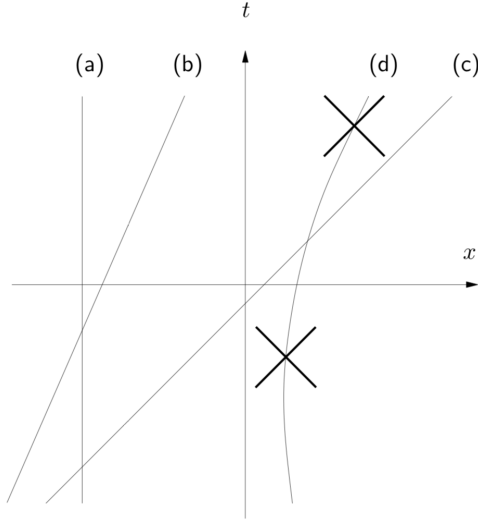


Figura 1: Diagrama de espaço-tempo

massa intrínseca a movimentar-se à velocidade da luz e (d) uma partícula com velocidade variável.

A história de um raio de luz é descrita por uma linha reta com declive ± 1 . Como a velocidade da luz, c , é a mesma para todos os observadores, sem perda de generalidade, consideramos unidades nas quais $c = 1$.

É possível tomar partido dos diagramas de espaço-tempo para calcular *distâncias* entre acontecimentos, encarando a Relatividade Restrita como o estudo de uma geometria denominada de Minkowski. Esta geometria é diferente da habitual Geometria Euclidiana, sendo a principal diferença a métrica utilizada para calcular a *distância* entre dois pontos

$$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$$

onde $\Delta\tau^2$ é o intervalo entre dois acontecimentos, também denominado por tempo próprio. Para mais detalhes ver [2]

1.2 Paradoxo dos Gémeos

Consideremos a seguinte situação:

Dois gémeos, a Alice e o Bernardo, separam-se no seu 20^o aniversário - a Alice permanece na Terra e o Bernardo viaja para o Planeta X com uma velocidade de cerca de 80% da velocidade da luz. Este planeta localiza-se a 8 anos-luz da Terra e, portanto, o Bernardo chega ao planeta ao fim de 10 anos. Após uma curta estadia, o gémeo regressa à Terra, novamente a 80% da velocidade da luz, demorando outros 10 anos de viagem.

Evidentemente, a Alice tem 40 anos quando se reencontra com o irmão. Mas que idade terá o Bernardo?

Podemos esquematizar este problema com um diagrama de espaço-tempo, representando os acontecimentos descritos como pontos com coordenadas Cartesianas (t, x) .

Consideremos que, num dado momento no tempo t , a Terra encontra-se nas coordenadas $(t, 0)$ e o Planeta X nas coordenadas $(t, 8)$, a 8 anos-luz da Terra. Escolhendo como referencial inercial o referencial da Terra, temos que tanto esta como o Planeta X estão em repouso. Deste modo, as histórias da Terra e do Planeta X são dadas por retas paralelas ao eixo dos tt , $x = 0$ e $x = 8$, respetivamente.

A Alice permanece em estática na Terra, por isso a sua história coincide com a da Terra. No entanto, o Bernardo viaja até ao Planeta X e regressa. A sua viagem até ao Planeta X pode ser representada por uma linha reta entre os pontos $O = (0, 0)$ e $P = (10, 8)$, e a viagem de regresso como uma linha entre os pontos $P = (10, 8)$ e $Q = (20, 0)$, como esquematizado no diagrama abaixo.

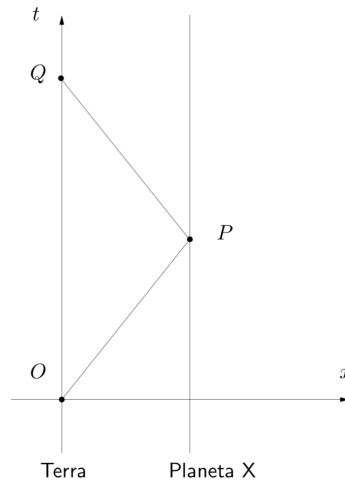


Figura 2: Paradoxo dos Gémeos

Para descobrir a idade do Bernardo quando este chega à Terra, apenas temos de calcular o comprimento dos segmentos de reta OP e PQ . Para tal precisamos de utilizar a métrica da geometria de Minkowski.

Concluimos que o comprimento do segmento OP é dado por, $\overline{OP}^2 = \Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 = 10^2 - 8^2 = 36$. Portanto $\overline{OP} = 6$, o que significa que a viagem desde a Terra até ao Planeta X para o Bernardo demorou 6 anos.

Logo, o Bernardo terá $20 + 6 + 6 = 32$ anos quando regressa à Terra.

1.3 Dilatação do Tempo

Generalizando o paradoxo dos gêmeos, consideramos que o Bernardo parte da Terra a uma velocidade v , significativa quando comparada com a velocidade da luz. O tempo próprio que o Bernardo demoraria desde a Terra até ao Planeta X será dado por

$$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2 \Leftrightarrow \Delta\tau^2 = \Delta t^2 - v^2\Delta t^2 \Leftrightarrow \Delta\tau^2 = \Delta t^2(1 - v^2).$$

onde $\Delta x = v\Delta t$, pois $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Portanto, $\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - v^2} < \Delta t$. Assim, para a Alice passou-se intervalo de tempo Δt , enquanto para o Bernardo se passou $\Delta t\sqrt{1 - v^2}$.

Na verdade, esta diferença de tempo entre a Alice e o Bernardo é uma consequência de um fenómeno conhecido como dilatação do tempo, geralmente enunciado como:

$$\Delta t' = \Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

onde c é a velocidade da luz e v a velocidade do observador em movimento. Para a dilatação do tempo ocorrer, é necessário que os valores de v sejam significativos quando comparados com c .

Este fenómeno vai ser crucial para a definição do modelo de *wormhole* apresentado abaixo.

1.4 Wormhole

Um *wormhole* é uma característica topológica do espaço-tempo que liga dois pontos diferentes do espaço.

Esta estrutura pode ser visualizada como um túnel com duas entradas, as gargantas do *wormhole*, que se encontram em diferentes pontos do espaço-tempo (tanto do espaço como do tempo). Por outras palavras, um *wormhole* é como que um atalho, um caminho alternativo e mais curto entre estes dois pontos.

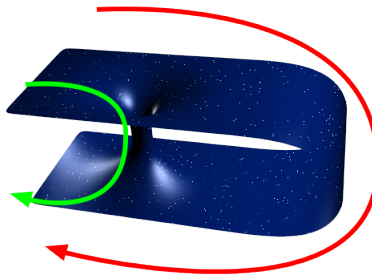


Figura 3: *Wormhole* [3]

A figura esquematiza a ideia de *wormhole*, sendo que a verde temos um caminho mais curto utilizando um *wormhole* e a vermelho o caminho usual pelo espaço-tempo. A existência de *wormholes* ainda não está provada, no entanto estes são consistentes com a teoria da relatividade geral.

De modo a simplificar o conceito de *wormhole*, consideremos o seguinte diagrama espaço-tempo.

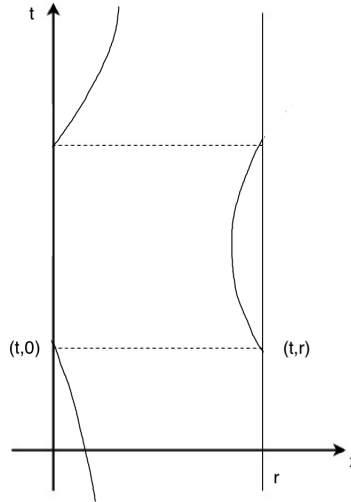


Figura 4: *Wormhole* sincronizado

Ao identificarmos o ponto $(t,0)$ com o ponto (t,r) , estamos a identificar diferentes pontos do espaço para um dado instante de tempo, e a criar um *wormhole* sincronizado. As linhas não tracejadas são o exemplo de uma possível trajetória de um corpo a navegar no espaço ao longo do tempo, e que entra numa das gargantas do *wormhole* em $(t,0)$ saindo posteriormente em (t,r) noutra ponto do espaço. O corpo volta novamente a entrar numa das gargantas do *wormhole*, voltando a sair noutra ponto do espaço-tempo.

Observe-se que as retas $x = 0$ e $x = r$ representam as gargantas do *wormhole* ao longo do tempo.

No entanto, este modelo de *wormhole* não permite viajar para trás no tempo. Para tal ser possível temos de dessincronizar o *wormhole*.

A ideia é tomar partido da dilatação do tempo e fazer com que o tempo passe mais devagar numa das gargantas. Do mesmo modo que o gêmeo que andou a viajar pelo espaço e envelheceu menos que o gêmeo que permaneceu estacionário, podemos forçar o tempo a passar mais devagar numa das gargantas.

Tal pode ser concretizado, acelerando uma das pontas do *wormhole* o suficiente para que a sua velocidade seja significativa quando comparada com a velocidade da luz. Ou, alternativamente,

movendo a garganta do *wormhole* para um campo gravitacional superior ao da outra ponta, i.e., por exemplo movendo uma das gargantas para as imediações de um buraco negro.

Independentemente do método escolhido, a dilatação do tempo faz com que, para um observador externo, a garganta do *wormhole* que foi movimentada 'envelheça' menos do que a garganta que ficou parada. Portanto, para este observador, é como se o tempo na garganta que foi movimentada passasse mais devagar do que na outra ponta do *wormhole*.

Esquemáticamente podemos representar este *wormhole* com o seguinte diagrama, sendo que a garganta em movimento será a em $x = 0$ e a garganta que permanece estática a $x = r$. Observe-se que apesar da garganta em $x = 0$ estar em movimento, esta pode manter aproximadamente a mesma posição, por exemplo se a garganta se movimentar numa trajetória circular de raio pequeno. Daí assumirmos sem perda de generalidade que a garganta se encontra em $x = 0$.

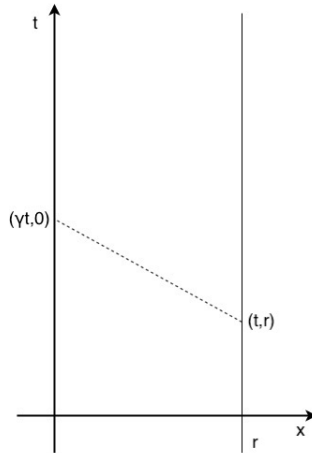


Figura 5: *Wormhole* dessincronizado

Neste diagrama, como é evidente, estamos a identificar pontos diferentes do espaço e do tempo. Note-se que γ é uma constante maior que 1.

É importante salientar que pelo interior do *wormhole* o tempo funciona de forma diferente - para um observador a passar pelo túnel do *wormhole*, relógios sincronizados em ambas as pontas vão permanecer sincronizados independentemente de como as duas pontas se movimentam.

Deste modo, um observador que entrasse na garganta em movimento, sairia na garganta imóvel no mesmo instante em que tinha entrado. Sendo que poderia efetivamente regressar ao seu passado, viajando pelo espaço até ao ponto onde tinha entrado no *wormhole*.

É de evidenciar que a máquina do tempo apenas é criada quando a diferença da dessincronização é suficiente para permitir que um raio de luz - que viaja à velocidade mais rápida que é possível

atingir - consiga chegar ao seu passado em $x = 0$ após ter saído na garganta estática do *wormhole* em $x = r$, efetuando assim um ciclo.

Logo, a máquina do tempo apenas é criada quando a discrepância entre os dois pontos identificados do *wormhole* tem uma inclinação de 45° , i.e., a inclinação de um raio de luz na geometria de Minkowski.

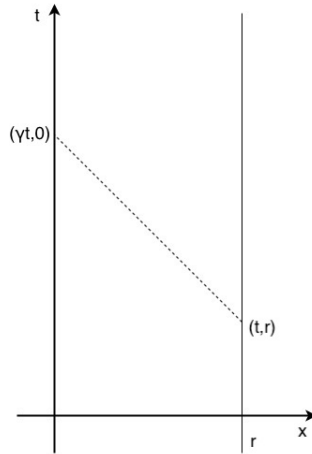


Figura 6: Horizonte da Máquina do Tempo

Chamamos à linha a tracejado o horizonte da máquina do tempo, visto que só é possível viajar para trás no tempo a partir deste momento.

Observe-se que, pela dilatação do tempo, temos $\Delta t' = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Como, por convenção, $c = 1$, então $t' = t\sqrt{1 - v^2} \Leftrightarrow t = \frac{t'}{\gamma}$, onde $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} > 1$.

2 Problema

2.1 Apresentação do Problema

Podemos pensar no que acontece no horizonte do *wormhole*. Imaginemos um *wormhole* como o enunciado acima, onde denominamos a garganta em movimento por A, e a garganta que permanece estática por B.

Consideremos um raio luz que entra na garganta A e sai na outra ponta do *wormhole* em B, viajando depois pelo espaço até A e voltando a entrar nesta garganta. Este raio de luz pode potencialmente permanecer indefinidamente neste ciclo, entrado na garganta A e saindo em B, criando uma concentração de energia no horizonte.

O objetivo é mostrar que, de facto, algo de errado acontece no instante em que a máquina do tempo é criada. Mais especificamente que, a densidade de energia tende para infinito na região dos

wormholes.

Para concretizar o enunciado, consideramos como modelo de matéria um campo escalar $\phi(t, x)$ que satisfaça a equação das ondas. Este campo pode representar, por exemplo, o campo eletromagnético, se ignorarmos a estrutura vetorial deste último.

Em primeiro lugar, pretendemos encontrar soluções da equação de ondas, isto é, encontrar soluções da equação:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

Portanto,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\right)\phi = 0$$

e efetuando uma mudança de variável tal que $u = t - x$ e $v = t + x$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)\phi = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial v} = G(v) \Leftrightarrow \phi(u, v) = g(v) + f(u)$$

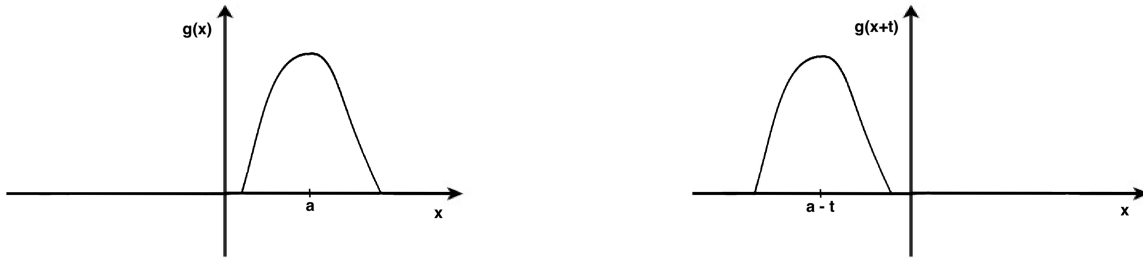
A solução geral da equação das ondas é dada por,

$$\phi(t, x) = g(t + x) + f(t - x)$$

2.2 Interpretação da Solução Geral

As soluções da equação das ondas são combinações lineares de $g(t + x)$ e $f(t - x)$. Considere-se apenas as soluções do tipo $g(t + x)$. Para $t = 0$ e $x = a$ temos que $\phi(0, a) = g(a)$. Ao fim de t unidades de tempo, temos que $\phi(t, a - t) = g(a)$.

Portanto, verificamos que $g(t + x)$ representa uma onda que se está a deslocar para a esquerda.



Analogamente, as soluções do tipo $f(t - x)$ são ondas que se deslocam para a direita.

No modelo esquematizado do *wormhole* dessincronizado, consideramos que o raio de luz entra na garganta em movimento em $x = 0$ e sai na garganta estática em $x = r$, viajando depois pelo espaço, para a esquerda, até $x = 0$. Portanto, intuitivamente as soluções do tipo $g(t + x)$ devem ser as que procuramos, visto que estas ondas se deslocam para a esquerda.

Concluimos que as soluções da equação das ondas que nos interessam são

$$\phi(t, x) = g(t + x)$$

2.3 Densidade de Energia

A densidade de energia é a quantidade de energia de um sistema ou região do espaço por unidade de volume. Definimos esta quantidade como:

$$\rho(t, x) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2$$

Deste modo, a energia num dado instante de tempo é dada por

$$E(t) = \int_0^R \rho(t, x) dx$$

Por definição a energia é uma quantidade conservada. Assim pretendemos verificar se a energia do campo é conservada i.e, se $\frac{dE}{dt}(t) = 0$.

Evidentemente que

$$\frac{dE}{dt}(t) = \int_0^R \frac{\partial \rho}{\partial t}(t, x) dx = \int_0^R \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} \right) dx$$

Como $\rho(t, x)$ satisfaz a equação das ondas, temos que $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$ e portanto, substituindo a igualdade acima,

$$\int_0^R \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} \right) dx = \int_0^R \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right) dx = \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right]_{x=0}^{x=R} = 0$$

se assumirmos, por exemplo, que $\phi(t, 0) = \phi(t, R) = 0$.

Concluimos que

$$E(t) = \int_0^R \rho(t, x) dx \Rightarrow \frac{dE}{dt}(t) = 0$$

Portanto a energia do campo é conservada.

2.4 Condições de Fronteira

As condições de fronteira no caso de um *wormhole* sincronizado, como o da figura 4, são dadas por $\phi(t, 0) = \phi(t, R)$, visto que os pontos em $(t, 0)$ são identificados com os de (t, R) .

De igual modo, no *wormhole* dessincronizado, como por exemplo o da figura 6, estamos a identificar pontos $(\gamma t, 0)$ com pontos (t, R) .

Como queremos descobrir o que acontece no horizonte da máquina do tempo, as condições de fronteira serão dadas por

$$\phi(\gamma t, 0) = \phi(t, R)$$

2.5 Resolução do Problema

Queremos, a partir da solução geral encontrada, $\phi(t, x) = g(t + x)$, e das condições de fronteira definidas, verificar que quando os raios de luz se aproximam do horizonte da máquina do tempo a densidade de energia explode, isto é, tende para infinito.

Observe-se que, na geometria de Minkowski, a história de um raio de luz é uma linha reta de declive ± 1 . Neste caso, em particular, os raios de luz que consideramos têm declive -1 e, portanto a equação do horizonte da máquina do tempo é dada por $t + x = \alpha$.

Se os pontos $(\gamma t, 0)$ e (t, r) pertencem ao horizonte então $\gamma t - t = -r \Leftrightarrow t = \frac{r}{\gamma-1}$. Substituindo t na expressão $t + x = \alpha$, obtemos

$$\alpha = \frac{r}{\gamma-1} + r = \frac{\gamma}{\gamma-1}r$$

Considere-se a equação $\phi(t, x) = g(t + x)$ e as condições de fronteira do *wormhole* dessincronizado dadas por $\phi(\gamma t, 0) = \phi(t, r)$.

Temos, então

$$g(\gamma t - 0) = g(t + r) \Leftrightarrow g(\gamma t) = g(t + r) \quad (\dagger)$$

onde $0 \leq t < \frac{r}{\gamma-1}$.

Observe-se que $\rho(t, x) = \frac{1}{2}(\frac{\partial\phi}{\partial t})^2 + \frac{1}{2}(\frac{\partial\phi}{\partial x})^2 = (g'(t + r))^2$. Portanto, a partir de $g'(t + r)$ podemos tirar conclusões sobre a densidade de energia, $\rho(t, x)$.

Derivando \dagger , obtemos $g(\gamma t) = g(t + r) \Rightarrow \gamma g'(\gamma t) = g'(t + r)$.

Consideremos a igualdade $g'(t + r) = \gamma g'(\gamma t)$.

Para $t = 0$, a expressão acima toma a forma

$$g'(t + r) = \gamma g'(\gamma t) \Rightarrow g'(r) = \gamma g'(0)$$

Para $t = \frac{r}{\gamma}$, obtemos a igualdade

$$g'(t + r) = \gamma g'(\gamma t) \Rightarrow g'(\frac{r}{\gamma} + r) = \gamma g'(\gamma \frac{r}{\gamma}) = \gamma g'(r)$$

Visto que $g'(r) = \gamma g'(0)$, obtemos substituindo que $\gamma g'(r) = \gamma(\gamma g'(0))$, e concluímos que

$$g'(t + r) = \gamma g'(\gamma t) \Rightarrow g'((1 + \frac{1}{\gamma})r) = \gamma^2 g'(0)$$

Repetindo este algoritmo para $t = \frac{(1+\frac{1}{\gamma})r}{\gamma}$, obtemos

$$g'(t + r) = \gamma g'(\gamma t) \Rightarrow g'(\frac{(1+\frac{1}{\gamma})r}{\gamma} + r) = \gamma g'(\gamma \frac{(1+\frac{1}{\gamma})r}{\gamma})$$

$$g'(t + r) = \gamma g'(\gamma t) \Rightarrow g'((1 + \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2})r) = \gamma^3 g'(0)$$

Portanto, verificamos que a fórmula geral do consequente é dada por,

$$g'((1 + \frac{1}{\gamma} + \dots + \frac{1}{\gamma^n})r) = \gamma^{n+1} g'(0)$$

Sabemos que $\sum_{k=0}^n ar^k = \frac{a(1-r^{n+1})}{1-r}$, desde que $r \neq 1$.

Observe-se que $1 + \frac{1}{\gamma} + \dots + \frac{1}{\gamma^n}$ é uma progressão geométrica, onde $r = \frac{1}{\gamma}$. É evidente que $|\frac{1}{\gamma}| \neq 1$ visto que $\gamma > 1$, como enunciado anteriormente.

Deste modo, podemos rescrever a equação anterior como $g'(\frac{1-(\frac{1}{\gamma})^{n+1}}{1-\frac{1}{\gamma}})r = \gamma^{n+1}g'(0)$, ou seja,

$$g'(\frac{\gamma-\frac{1}{\gamma^n}}{\gamma-1})r = \gamma^{n+1}g'(0)$$

Em suma, como γ é uma quantidade maior que 1, observamos que $\gamma^{n+1}g'(0)$ aumenta progressivamente a cada iteração. Portanto a densidade de energia das soluções de $\phi(t, x) = g(t+x)$ tendem para infinito quando $t+x = (\frac{\gamma-\frac{1}{\gamma^n}}{\gamma-1})r$ tende para $(\frac{\gamma}{\gamma-1})r = \alpha$, isto é, quando nos aproximamos do horizonte da máquina do tempo.

Portanto, a densidade de energia $\rho(t, x) = \frac{1}{2}(\frac{\partial\phi}{\partial t})^2 + \frac{1}{2}(\frac{\partial\phi}{\partial x})^2$, tenderá para infinito à medida que nos aproximamos do horizonte.

2.6 Conclusão e Observações Finais

Verificámos que, quando os raios de luz se aproximam do horizonte da máquina do tempo, a densidade de energia explode, isto é, tende para infinito.

Portanto, sabemos que algo de errado ocorre quando a máquina do tempo é criada, o que, de certa forma, impede a sua formação.

O que, neste caso simples, está de acordo com os resultados de Hawking [1], que afirmam que o espaço-tempo resiste à criação do horizonte.

Pela famosa equação de Einstein, $G_{\mu\nu} = 8\pi\frac{G}{c^4}T_{\mu\nu}$, onde $G_{\mu\nu}$ é denominada a curvatura de Einstein e $T_{\mu\nu}$ o tensor de energia momento, podemos intuitivamente conjecturar que a curvatura do espaço pode criar uma singularidade.

Tal acontece pois, quando densidade de energia tende para infinito, sabemos que $T_{\mu\nu}$ - que descreve o fluxo de energia e momento - tenderá para infinito. E conseqüentemente, pela equação de Einstein, que $G_{\mu\nu}$ tenderá também para infinito, ou seja, a curvatura do espaço irá para infinito.

No entanto, os cálculos efetuados não nos garantem que esta singularidade existe. A única conclusão à qual podemos chegar é que, no momento de criação da máquina do tempo, algo de errado acontece que impede a sua formação. O que conseqüentemente, resulta na impossibilidade de viajar para o passado.

Referências

- [1] S. W. Hawking. The chronology projection conjecture. *Phys. Rev.*, 46(2):603–611, 1991.
- [2] José Natário. *General Relativity Without Calculus*. Springer, 2011.
- [3] Panzi. <https://commons.wikimedia.org/wiki/file:wormhole-demo.png>.