

# A Conjectura de Censura Cósmica de A a B<sup>\*</sup>

R.F.B. PINTO

**SUMÁRIO.** Expomos as noções matemáticas básicas referentes à estrutura geométrica e causal do espaço-tempo, necessárias para se compreender os teoremas de formação de singularidades, que discutimos. De seguida, apresentamos os fundamentos da caracterização de hipersuperfícies e da evolução dinâmica destas, ditada pelas equações de Einstein para, depois, apresentarmos as diferentes formulações da conjectura da censura cósmica. Concluimos com uma apresentação de alguns tópicos de investigação cujos resultados nos levam a crer na validade desta conjectura ainda não provada.

## ÍNDICE:

Introdução	3
1. Topologia e geometria diferencial	8
Espaços topológicos	8
Aplicações	9
Variedades	10
Vectores e tensores	11
Aplicações em variedades	12
Métrica e espaço-tempo	13
2. Geodésicas e curvatura	16
Condições sobre a energia	16
Geodésicas	17
Congruência de geodésicas temporais	19
Congruência de geodésicas nulas	20
Coordenadas de Fermi	21
3. Estrutura causal	23
Cones de luz	23
Futuros e passados	24
Limites de curvas	25
Condições de causalidade	26
Domínios de dependência	27
Espaço-tempo globalmente hiperbólico	29
Existência de geodésicas	30
Horizontes de Cauchy	31
4. Comportamento assintótico	33
Estrutura conforme do espaço-tempo de Minkowski	33
Horizontes	37
Pontos ideais do espaço-tempo	39
Espaços assintoticamente planos	41
Estrutura conforme do espaço-tempo de Schwarzschild	43

---

\* Trabalho final da disciplina de Tópicos em Física de Partículas (Mestrado Integrado em Engenharia Física Tecnológica, 5.º ano), realizado sob a orientação do professor José Natário (Departamento de Matemática do IST).

Estrutura conforme do espaço-tempo de Reissner-Nordström	47
5. Singularidades	50
Pontos singulares	50
Superfície prisioneira fechada	52
Pontos conjugados	53
Teoremas de singularidades	55
6. Hipersuperfícies	58
Métrica induzida	58
Curvatura extrínseca	58
Equações de Gauss-Codazzi	59
7. O problema do valor inicial	60
Equações de constrangimento	60
Decomposição 3+1 do espaço-tempo	61
Aspectos globais	63
8. Censura cósmica I. Abordagem assintótica	64
Colapso gravitacional	64
Censura cósmica	65
Horizonte de acontecimentos	67
9. Censura cósmica II. Abordagem causal	69
Singularidades nuas	69
Censura cósmica	70
10. Censura cósmica III. Abordagem evolutiva	72
Censura cósmica fraca	72
Censura cósmica forte	75
11. Desafiando a censura cósmica I. Estabilidade	78
Extensão máxima do espaço-tempo RN	78
Horizontes de Cauchy do espaço-tempo RN	81
Instabilidade do horizonte de Cauchy	82
Sistema Einstein-Maxwell-campo escalar	83
12. Desafiando a censura cósmica II. Desigualdade	85
Argumento original	85
Formulação lagrangiana e hamiltoniana da Relatividade Geral	87
Massa total em Relatividade Geral	89
Desigualdade de Penrose riemanniana	90
Apêndice. A conjectura do arco	93
Epílogo	95
Referências	96
Créditos das figuras	98

## Introdução

No final dos anos sessenta e início dos anos setenta do século XX foi desenvolvido o ‘modelo standard’ dos buracos negros, às mãos de físicos como Roger Penrose, Stephen Hawking, Robert Geroch, Brandon Carter, Werner Israel e muitos outros. Na construção deste modelo, foi absolutamente fundamental o estudo das equações de Einstein sujeitas a simetria esférica, começando logo após a génese da Relatividade Geral com Schwarzschild e Eddington, e sendo clarificada apenas no final dos anos cinquenta por Finkelstein, Kruskal e outros, assim como a investigação da inevitabilidade do colapso gravitacional, pelos pioneiros Landau, Chandrasekhar, Oppenheimer e Wheeler. Do esforço conjunto destas mentes surgiu então um corpo de ideias que descrevem, com um grau de consistência interna notável, as condições, mecanismos e resultado final do colapso gravitacional, assim como a própria estrutura do espaço-tempo e a caracterização das chamadas ‘singularidades’.

Todas as teorias físicas têm um âmbito de aplicação limitado, e a teoria da Relatividade Geral é notável no sentido em que a sua própria estrutura interna prevê as condições em que deixará de ser válida. Em situações de concentrações de massa extremas que levam valores limite da curvatura do espaço-tempo e pressão da matéria, os dois lados das equações de Einstein cairão por terra, pois ambos os modelos existentes actualmente, quer para a geometria do espaço-tempo, quer para a estrutura da matéria, deixam provavelmente de ser válidos. A previsão de ‘singularidades’ significa, então, que a Relatividade Geral não é uma teoria completa. Mas é precisamente o estudo destas situações extremas que leva a teoria ao seu limite que nos permite assim estender o nosso conhecimento até à sua fronteira actual e ‘espreitar’ um pouco o futuro da física e, conseqüentemente, da própria humanidade.

O ponto mais alto alcançado nesta batalha pelo conhecimento foi, provavelmente, o estabelecimento dos chamados ‘teoremas de singularidades’ estabelecidos por Hawking e Penrose. Entre 1965 e 1970, estes físicos utilizaram técnicas matemáticas inovadoras (ver capítulo 4) para demonstrarem uma série de teoremas baseados no modelo clássico da estrutura do espaço-tempo (ver capítulo 1) que previam, a verificarem-se determinadas condições, a ocorrência de ‘singularidades’ na estrutura do espaço-tempo. Estes teoremas incorporam três tipos de condições. Em primeiro lugar, uma condição sobre a energia (ou, equivalentemente, sobre a matéria), pondo restrições razoáveis sobre as ‘fontes’ das equações de Einstein (ver capítulo 2). Em segundo lugar, uma condição global sobre a estrutura causal do espaço-tempo, impondo restrições na relação causal entre eventos (ver capítulo 3). Finalmente, uma condição que imponha que a gravidade fosse tão forte numa dada região que nada pudesse escapar (ver capítulo 5). Nestas condições, os teoremas prevêem a ocorrência de ‘pontos singulares’ que têm de ser retirados da variedade do espaço-tempo, não sendo possível definir neles as equações de campo e não sendo, portanto, possível prever, com base apenas na teoria clássica, o que pode surgir a partir de uma ‘singularidade’.

É aqui que é necessário invocar a hipótese da censura cósmica de modo a obter-se, de facto, o ‘modelo standard’ do colapso gravitacional. O resultado final do colapso é uma singularidade mas um buraco negro só surge se a singularidade aparecer rodeada por um horizonte de acontecimentos, isto é, a fronteira de uma região que não pode enviar sinais para o infinito exterior (ver capítulo 8). Ora os teoremas de ‘singularidades’ não dizem se estas estarão necessariamente escondidas atrás de um

horizonte de eventos<sup>\*</sup>. A hipótese da censura cósmica afirma exactamente isto: não é possível observar a ‘singularidade’ em si a partir do exterior.

Penrose foi o primeiro a avançar com esta hipótese, ainda que baseado apenas em princípios heurísticos, da seguinte forma:<sup>†</sup>

*‘Somos então confrontados com a que é, talvez, a questão não respondida mais fundamental da teoria do colapso em relatividade geral, isto é: existe um “censor cósmico” que proíbe a aparição de singularidades nuas, cobrindo cada uma delas com um horizonte de eventos absoluto? De certa forma, pode mostrar-se que um “censor cósmico” não existe. Pois, segue de um teorema de Hawking que a singularidade do “big bang” é, em princípio, observável. Mas não se sabe se as singularidades que resultam de um colapso genérico, partindo de um estado inicial razoável não singular, serão observáveis a partir do exterior’.*

Mais concretamente:

*A formulação usual [da hipótese de censura cósmica] envolve uma afirmação do tipo:*

*Um sistema que evolui, de acordo com a relatividade geral clássica com equações de estado razoáveis, a partir de dados iniciais não singulares genéricos numa hypersuperfície de Cauchy apropriada, não desenvolve nenhuma singularidade do espaço-tempo que seja visível do infinito.<sup>‡</sup>*

Esta conjectura viria a ficar conhecida como a de censura cósmica ‘fraca’ e foi abordada desde logo por Hawking, mas de uma forma pouco geral. Esta formulação será o tema do nosso capítulo 8.

Penrose foi também o primeiro a avançar, nos anos setenta, com a hipótese da conjectura cósmica ‘forte’<sup>§</sup>. Voltemos às suas palavras:

*[...] parece-me bastante pouco razoável supor que a física numa região comparativamente local do espaço-tempo se deva ‘importar’ se um raio de luz que parta de uma singularidade deva, em última instância, escapar para o infinito ou não. Por outras palavras, um observador (linha-mundo do tipo temporal) pode interceptar o raio de luz e ver a singularidade como ‘nua’, mesmo que ele não esteja realmente situado no infinito (nenhum observador real estaria aí situado de qualquer forma). O observador poderia estar próximo da singularidade e ele próprio possivelmente preso, por exemplo dentro do buraco negro da figura [ver figura 1]. A imprevisibilidade inerente à presença de singularidades nuas, que é tão repelente para muitas pessoas, estaria tão presente para este observador local – observando uma singularidade ‘localmente nua’ – como para um observador no infinito.*

*Parece-me comparativamente pouco importante se o observador pode ele próprio escapar para o infinito. A relatividade geral clássica é uma teoria independente da escala, por isso se singularidades localmente nuas ocorrem a uma escala muito pequena, também deverão, em princípio, ocorrer numa escala muito grande, em que o observador poderia ter dias ou mesmo anos para ponderar nas implicações das incertezas introduzidas pela sua observação de tal singularidade [...] De facto, para habitantes de universos fechados que irão recolapsar (como possivelmente nós somos) não existe um ‘infinito’, de modo que a questão de estar localmente ‘preso’ é mais uma questão de grau do que de princípio.*

---

<sup>\*</sup> No caso da não existência de horizonte, a singularidade diz-se ‘nua’.

<sup>†</sup> Penrose (1969), pág. 1162.

<sup>‡</sup> Penrose (1979), pág. 618.

<sup>§</sup> Penrose apresentou a conjectura numa série de diferentes palestras em 1974 e 1978. Aqui, seguimos Penrose (1979).



fascinante, encontra-se fora do âmbito do nosso trabalho, que apenas se restringe à teoria clássica da Relatividade Geral.

No capítulo 11, discutiremos uma abordagem que se baseia no estudo da estabilidade (nomeadamente dos horizontes de Cauchy), usando o exemplo da solução de Reissner-Nordström. Este ponto de vista tem dado origem recentemente a resultados promissores que nos levam a acreditar que, um dia (ainda que não a curto prazo) será possível chegar-se a uma prova da conjectura. Discutiremos em particular o trabalho de um aluno de Christodoulou, Mihalis Dafermos.

No capítulo 12, analisaremos a primeira tentativa (falhada) de refutação da conjectura, por parte do próprio Penrose e suas ramificações, nomeadamente na definição de massa em Relatividade Geral, assim como alguns desenvolvimentos recentes.

No apêndice, discutiremos de uma forma breve uma outra conjectura, a chamada conjectura do arco, que tem sido objecto de intensa investigação recente cujos resultados, mais uma vez, levam a crer que a censura cósmica será válida num contexto clássico genérico.

A um nível pessoal, gostaríamos de agradecer ao Professor Vítor Cardoso, pelo seu encorajamento inicial e pela sua disponibilidade em tratar este tema com um pouco mais de profundidade do que aquela que inicialmente se pretendia num trabalho de final de semestre. Infelizmente, por motivos de ausência do Professor no estrangeiro, não nos foi possível levar adiante essa colaboração. Gostaríamos ainda de agradecer ao Professor José Natário, pela sua orientação preciosa e pela disponibilidade demonstrada, ainda que não estivesse oficialmente ligado à docência desta disciplina. Sem a sua generosa ajuda, este trabalho não teria sido possível.

*‘As teorias, do meu ponto de vista, consistem num enorme número de ideias, argumentos, palpites, sentimentos vagos, juízos de valor, etc., tudo numa grande confusão. Estes vários ingredientes interligam-se de uma forma complicada. É toda esta enorme quantidade de material que é «a teoria». A nossa imagem mental da teoria é esta massa nebulosa tomada como um todo. Porém, ao apresentar a teoria não podemos ousar fazê-lo como «uma massa nebulosa tomada como um todo». Somos assim forçados a modificar a disposição de tudo isto de modo a torná-lo linear, consistindo em um ponto a seguir a outro, cada um ligado ao seu antecessor de uma forma mais ou menos directa. O que deve acontecer é que aquele que aprende a teoria, apresentada deste modo linear, passe a formar então a sua própria «massa nebulosa tomada como um todo». As questões são todas reorganizadas, são introduzidas inúmeras novas ligações entre esses pontos, irrompem palpites e pressentimentos menos consistentes, e assim por diante.’*

Geroch (1996)

# 1. Topologia e geometria diferencial

O nosso objectivo, neste primeiro capítulo, é apresentar as noções matemáticas básicas, no domínio da topologia e da geometria diferencial, que serão usadas no resto do texto. O conceito mais importante neste domínio é a descrição matemática do próprio espaço-tempo, o ‘pano de fundo’ para toda a ‘acção’ física. Pano de fundo, sim, mas espectador estático, não. O que distingue a Relatividade Geral de todas as outras teorias físicas é que o seu ‘pano de fundo’ é parte integrante da dinâmica física e tem um papel fundamental na modelação dos acontecimentos físicos. Resumindo, nas palavras de John Wheeler, ‘*O espaço actua na matéria, dizendo-lhe como se deve mover; a matéria reage actuando no espaço, dizendo-lhe como se deve curvar*’.

Mas qual o modelo matemático que deve ser usado para descrever a estrutura do espaço-tempo? A resposta a esta pergunta deverá depender da escala de distâncias em que estamos interessados. Aqui iremos restringir-nos à escala local do espaço-tempo. Pondo de lado assim o estudo da estrutura microscópica (da ordem do comprimento de Planck, entenda-se) e da topologia cósmica do espaço-tempo, o modelo matemático mais bem sucedido, uma gama enorme de distâncias, e que corresponde às nossas ideias intuitivas da continuidade do espaço e do tempo, é a de uma variedade diferenciável.

O modelo matemático do espaço-tempo costuma então ser resumido numa frase: “Consideremos o espaço-tempo uma variedade  $C^\infty$  4-dimensional  $\mathcal{M}$  sem fronteira, conexa, Hausdorff e com uma métrica lorentziana  $g$ .”

A compreensão gradual desta frase breve, mas plena de significados e pressupostos, será a ‘espinha dorsal’ da estrutura deste capítulo. Primeiro, estabeleceremos a ideia de espaço-tempo como um todo na forma de um espaço topológico, cuja única estrutura é a ideia de ‘proximidade’. A seguir, introduziremos sistemas de coordenadas locais que transformam esse espaço numa variedade, assim como os objectos geométricos cuja definição depende da estrutura da variedade. Finalmente, estabelecemos o modelo matemático que representará o espaço-tempo a uma escala local.

## ***Espaços topológicos***

Um espaço topológico é um par  $(X, \mathcal{F})$  que consiste de um conjunto  $X$  e uma família  $\mathcal{F}$  de subconjuntos de  $X$  tal que:

1. O conjunto vazio  $\emptyset$  e o conjunto  $X$  pertencem a  $\mathcal{F}$ ;
2. A união de qualquer número de elementos de  $\mathcal{F}$  é um elemento de  $\mathcal{F}$ ;
3. A intersecção de um qualquer número finito de elementos de  $\mathcal{F}$  é um elemento de  $\mathcal{F}$ .

Diz-se que  $\mathcal{F}$  forma uma topologia em  $X$  e os seus elementos são os conjuntos abertos de  $X$ .

Seja  $C_\alpha$  um elemento geral de  $\mathcal{F}$ ; se  $Y$  for um subconjunto de  $X$ , a família  $\mathcal{F}' = \{C_\alpha \cap Y\}$  é uma topologia em  $Y$ , designada como a topologia induzida em  $Y$ .



Uma vizinhança de um ponto (elemento)  $p$  de  $X$  é um conjunto  $C(p)$  que contém um conjunto aberto ao qual  $p$  pertence.

Um subconjunto  $C$  de  $X$  diz-se fechado se o seu complemento,  $X - C \equiv \{x \in X \mid x \notin C\}$ , é aberto. A intersecção de qualquer número de conjuntos fechados é um conjunto fechado e a união de qualquer número finito de conjuntos fechados é também um conjunto fechado. É de notar que um conjunto pode ser, ao mesmo tempo, fechado e aberto (por exemplo, todos os subconjuntos de uma topologia discreta) e que também pode ser nem aberto nem fechado.

O fecho de  $C$ ,  $\overline{C}$ , é a intersecção de todos os conjuntos fechados que contêm  $C$ .  $\overline{C}$  é fechado, contém  $C$ , e é igual a  $C$  se, e só se,  $C$  for fechado. O interior de  $C$ ,  $\text{int}(C)$ , é a união de todos os conjuntos abertos contidos em  $C$ . O  $\text{int}(C)$  é aberto, está contido em  $C$  e é igual a  $C$  se, e só se,  $C$  for aberto. A fronteira de  $C$ ,  $\dot{C}$ , consiste em todos os pontos que estão contidos em  $\overline{C}$  mas não no  $\text{int}(C)$ .

Uma família  $\{C_\alpha\}$  de conjuntos (abertos) de  $X$  forma uma cobertura (aberta) de  $X$  se  $\bigcup_\alpha C_\alpha = X$ . Uma cobertura é finita se  $\{C_\alpha\}$  contém um número finito de elementos; uma cobertura é localmente finita se qualquer ponto  $p$  em  $X$  tem uma vizinhança que intersecta, no máximo, um número finito de elementos da cobertura.

Um espaço topológico diz-se conexo se não for possível escrever  $X = A \cup B$ , com  $A, B \in \mathcal{F}$  e  $A \cap B = \emptyset$ .

Um espaço topológico diz-se Hausdorff (ou separado) se quaisquer dois pontos distintos tiverem vizinhanças disjuntas (isto é, que não tenham pontos em comum).

Um espaço topológico diz-se compacto se qualquer cobertura aberta de  $X$  contém uma cobertura finita de  $X$ .

Um espaço topológico diz-se paracompacto se para qualquer cobertura aberta  $R$  de  $X$  existe uma cobertura localmente finita  $R'$  de  $X$  tal que todo o elemento de  $R'$  está contido em algum elemento de  $R$ .

## Aplicações

Dados dois conjuntos  $U$  e  $U'$ , a aplicação  $\Phi: U \rightarrow U'$  associa, a cada ponto  $p \in U$ , um ponto  $p' \in U'$ , a imagem de  $p$  sob  $\Phi$ ,  $p' = \Phi(p)$  e, da mesma forma, o conjunto  $\Phi(U) \equiv \{\Phi(p): p \in U\}$  é a imagem em  $U'$  de  $U$ .

Se para todos os  $p' \in \Phi(U)$  existir apenas um ponto  $p \in U$  tal que  $p' = \Phi(p)$ , então a aplicação  $\Phi$  diz-se injectiva ('um para um').

Se  $\Phi(U) = U'$ , a aplicação diz-se sobrejectiva (aplicando  $U$  em  $U'$ ) e, se for sobrejectiva e injectiva, diz-se uma aplicação bijectiva.

Dadas duas aplicações  $\Phi: U \rightarrow U'$  e  $\Psi: U' \rightarrow U''$ , então a aplicação  $\Psi \circ \Phi: U \rightarrow U''$ , definida como aplicando  $\Phi$  e em seguida  $\Psi$  é a chamada composição de  $\Phi$  com  $\Psi$ .

Se  $\Phi: U \rightarrow U'$  for injectiva, então pode definir-se a aplicação  $\Phi^{-1}: \Phi(U) \rightarrow U$  que satisfaz  $\Phi \circ \Phi^{-1} = I_{\Phi(U)}$  e  $\Phi^{-1} \circ \Phi = I_U$ , em que  $I_U$  é a aplicação identidade em  $U$ .

Dados dois espaços topológicos  $(U, \mathcal{t})$  e  $(U', \mathcal{t}')$ , uma aplicação  $\Phi: U \rightarrow U'$  diz-se contínua num ponto  $p \in U$  se  $\Phi^{-1}(W')$  for uma vizinhança de  $p$  para cada vizinhança  $W'$

de  $\Phi(p) \in U'$ . A aplicação diz-se contínua em  $U$  se for contínua em todos os pontos de  $U$ : isto acontece quando  $\Phi^{-1}(W')$  é aberto para qualquer aberto  $W'$  em  $U'$ .

Se  $\Phi: U \rightarrow U'$  for injectiva e se  $\Phi$  e  $\Phi^{-1}$  forem contínuas, com respeito à topologia induzida em  $\Phi(U)$ , então  $\Phi$  diz-se um homeomorfismo em  $\Phi(U)$ .

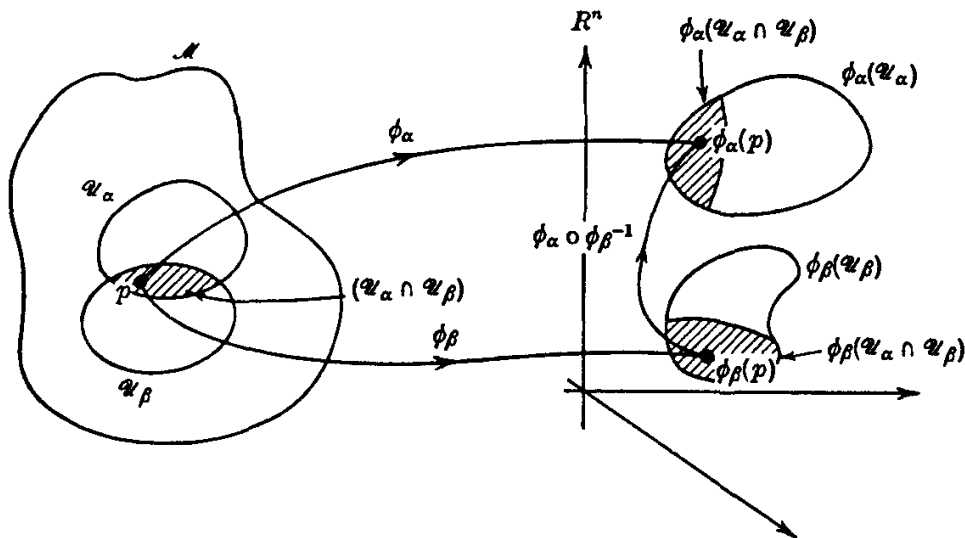
Se  $\Phi: U \rightarrow U'$  for bijectiva e se  $\Phi$  e  $\Phi^{-1}$  forem contínuas, então  $\Phi$  diz-se um homeomorfismo e  $U$  e  $U'$  dizem-se homeomorfos.

## Variedades

Dado um espaço topológico  $(M, \mathcal{F})$  define-se uma vizinhança de coordenadas (também designada carta local) de  $M$  como sendo o par  $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)$ , em que  $\mathcal{U}_\alpha$  é um elemento de  $\mathcal{F}$  e  $\phi_\alpha$  é um homeomorfismo de  $\mathcal{U}_\alpha$  num conjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Os números que constituem a imagem  $\{x^i\}_{i=1,2,\dots,n}$  de um ponto  $p \in \mathcal{U}_\alpha$  sob a aplicação  $\phi_\alpha$  são as chamadas coordenadas locais de  $p$ . Uma família de cartas locais em  $M$  forma um atlas em  $M$  se  $\bigcup_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha = M$ .

Sejam  $(\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha)$  e  $(\mathcal{U}_\beta, \phi_\beta)$  duas cartas locais em  $M$  com  $\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta \neq \emptyset$ . Um ponto  $p \in \mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta$  pode ser expresso em termos das suas duas imagens em  $\mathbb{R}^n$  como:

$p = \phi_\alpha^{-1}(x) = \phi_\beta^{-1}(x')$ , onde  $x \equiv \{x^i\}$  e  $x' \equiv \{x'^i\}$ . Pode verificar-se que a aplicação  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}: \phi_\alpha(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta) \rightarrow \phi_\beta(\mathcal{U}_\alpha \cap \mathcal{U}_\beta)$  é um homeomorfismo entre conjuntos abertos de  $\mathbb{R}^n$  (ver figura 1.1), sendo a sua inversa dada por  $(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1})^{-1} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1}$ .



**Figura 1.1** Na intersecção das cartas locais  $\mathcal{U}_\alpha$  e  $\mathcal{U}_\beta$ , as coordenadas estão relacionadas por uma aplicação  $C^r$ .

Um atlas em  $\mathcal{M}$  diz-se um atlas  $C^r$  se  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$  e a sua inversa, para qualquer par  $(\alpha, \beta)$ , é uma função  $C^r$  em  $\mathbb{R}^n$ , isto é, com derivadas de ordem  $r$  contínuas.\*

Define-se, então, uma variedade diferenciável de classe  $C^r$  e dimensão  $n$  como um espaço topológico Hausdorff com um atlas  $C^r$ .

Um atlas  $\{\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha\}$  é localmente finito se qualquer ponto  $p \in \mathcal{M}$  tem uma vizinhança aberta que intersecta, no máximo, um número finito de elementos  $\mathcal{U}_\alpha$ .  $\mathcal{M}$  diz-se paracompacto se para todos os atlas  $\{\mathcal{U}_\alpha, \phi_\alpha\}$  existe um atlas localmente finito  $\{\mathcal{V}_\beta, \psi_\beta\}$  com cada  $\mathcal{V}_\beta$  contido em algum  $\mathcal{U}_\alpha$ . Pode provar-se que uma variedade Hausdorff conexa é paracompacta se, e só se, tiver uma base numerável, isto é, se existir uma colecção enumerável de conjuntos abertos tais que qualquer conjunto aberto pode ser expresso como a união de membros desta colecção.

Daqui para a frente, se nada for dito em contrário, todas as variedades consideradas serão variedades  $C^\infty$  paracompactas, conexas, Hausdorff e sem fronteira.

## Vectores e tensores

Um vector  $\mathbf{X}$  (dito vector contravariante) é um operador (um funcional linear) que atribui a cada função diferenciável  $f$  em  $\mathcal{M}$  um número real  $\mathbf{X}(f)$ . Um vector tangente é uma derivada direcciona ao longo de uma curva que passa em  $p$ :  $\mathbf{X}(f) \equiv \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\lambda|_p} = \frac{dx^j}{dt} \left( \frac{\partial f}{\partial x^j} \right)_{\lambda(t_0)}$ , ou seja, podemos escrever  $\mathbf{X} = X^i \mathbf{E}_i$ , em que os coeficientes

$X^i$  são os componentes de  $\mathbf{X}$  em  $p$  em relação a um sistema de coordenadas local  $\{x^i\}_{i=1, 2, \dots, n}$ . As derivadas direccionais ao longo das linhas de coordenadas em  $p$  formam a base de um espaço vectorial  $n$ -dimensional cujos elementos são os vectores tangentes em  $p$ . Este espaço é chamado o espaço tangente em  $p$ ,  $T_p$  e  $\{\mathbf{E}_i\}_{i=1, 2, \dots, n}$  será a base de  $T_p$ .

Uma 1-forma  $\eta$  (dito vector covariante) é uma aplicação linear no espaço  $T_p$ , que aplica um vector  $\mathbf{X}$  num número real, a contracção  $\langle \eta, \mathbf{X} \rangle$ . Dada a base  $\{\mathbf{E}_i\}$  de vectores em  $p$ , podemos definir um conjunto único de  $n$  1-formas,  $\{\mathbf{E}^i\}$ , pela condição  $\langle \mathbf{E}^i, \mathbf{X} \rangle = X^i$ . Em particular, temos que  $\langle \mathbf{E}^i, \mathbf{E}_j \rangle = \delta^i_j$ .  $\{\mathbf{E}^i\}_{i=1, 2, \dots, n}$  formam a base de um espaço vectorial  $n$ -dimensional cujos elementos são as 1-formas em  $p$ . Este espaço é o chamado espaço dual do espaço tangente  $T_p$ ,  $T_p^*$ , e podemos então escrever  $\eta = \eta_i \mathbf{E}^i$ . Daqui também se conclui que  $\langle \eta, \mathbf{X} \rangle = \eta_i X^i$ .

A partir dos espaços  $T_p$  e  $T_p^*$ , podemos formar o produto cartesiano

$$\Pi_r^s = \underbrace{T_p^* \times \dots \times T_p^*}_{(r \text{ factores})} \times \underbrace{T_p \times \dots \times T_p}_{(s \text{ factores})}$$

isto é, o conjunto ordenado  $(\eta^1, \dots, \eta^r, X_1, \dots, X_s)$ , em que  $\eta$ s e  $X$ s são 1-formas e vectores arbitrários em  $p$ , respectivamente.

---

\* Se a aplicação é  $C^r$  para todo o  $r \geq 0$ , então diz-se  $C^\infty$ . Entende-se uma aplicação  $C^0$  como sendo uma aplicação contínua.

Um tensor  $\mathbf{T}$  do tipo  $(r, s)$  é uma função em  $\Pi_r^s$  que é linear em cada um dos argumentos e que aplica o elemento  $(\eta^1, \dots, \eta^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s)$  de  $\Pi_r^s$  em  $T(\eta^1, \dots, \eta^r, \mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s)$ . O espaço de todos esses tensores é o produto tensorial

$$T_s^r(p) = T_p \otimes \dots \otimes T_p \otimes T_p^* \otimes \dots \otimes T_p^* \\ (r \text{ factores}) \quad (s \text{ factores})$$

e, em particular,  $T_0^1(p) = T_p$  e  $T_1^0(p) = T_p^*$ .  $\{\mathbf{E}_{a1} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}_{ar} \otimes \mathbf{E}^{b1} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}^{bs}\}$  será uma base de  $T_s^r(p)$  e um tensor arbitrário  $\mathbf{T} \in T_s^r(p)$  pode ser expresso em termos desta base como  $\mathbf{T} = T^{a1 \dots ar}_{b1 \dots bs} \mathbf{E}_{a1} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}_{ar} \otimes \mathbf{E}^{b1} \otimes \dots \otimes \mathbf{E}^{bs}$ , em que  $T^{a1 \dots ar}_{b1 \dots bs} = T(\mathbf{E}^{a1}, \dots, \mathbf{E}^{ar}, \mathbf{E}_{b1}, \dots, \mathbf{E}_{bs})$  são as componentes de  $\mathbf{T}$  em relação às bases duais  $\{\mathbf{E}_a\}, \{\mathbf{E}^a\}$ .

## Aplicações em variedades

Como vimos, uma variedade é localmente homeomorfa a um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ , sendo que cada ponto  $p \in \mathcal{M}$  pode ser expresso nas coordenadas locais definidas por uma carta local. Da mesma forma, qualquer relação entre variedades pode ser convenientemente expressa em termos de coordenadas locais.

Uma aplicação  $\phi$  de uma variedade  $n$ -dimensional  $\mathcal{M}$  numa variedade  $n'$ -dimensional  $\mathcal{M}'$  é uma aplicação  $C^r$  se, para qualquer sistema de coordenadas locais em  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{M}'$ , as coordenadas da imagem  $\phi(p)$  em  $\mathcal{M}'$  são funções  $C^r$  das coordenadas de  $p$  em  $\mathcal{M}$ . Se  $f$  for uma função em  $\mathcal{M}'$ , a aplicação  $\phi$  define a função  $\phi*f$  em  $\mathcal{M}$  como sendo a função cujo valor no ponto  $p$  de  $\mathcal{M}$  é o valor de  $f$  em  $\phi(p)$ , ou seja,  $\phi*f(p) = f(\phi(p))$ .

Se  $\lambda(t)$  é uma curva que passa em  $p$ , então a curva imagem  $\phi(\lambda(t))$  passa pelo ponto  $\phi(p)$ . O vector tangente a esta curva, em  $\phi(p)$ , será designado por  $\phi_* \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_\lambda \Big|_{\phi(p)}$ , em que  $\phi_*$  é uma aplicação linear entre os espaços tangentes em  $p$  e  $\phi(p)$ ,  $T_p(\mathcal{M})$  e  $T_{\phi(p)}(\mathcal{M}')$ . Partindo da definição de um vector, a aplicação linear  $\phi_*$  pode ser caracterizada pela relação: para cada função  $f$  em  $\phi(p)$  e vector  $\mathbf{X}$  em  $p$ ,  $\mathbf{X}(\phi*f)|_p = \phi_* \mathbf{X}(f)|_{\phi(p)}$ .

Uma aplicação  $C^r$   $\phi$  diz-se uma imersão se  $\phi_*$  for injectiva em todos os pontos  $p \in \mathcal{M}$ . A imagem  $\phi(\mathcal{M})$  diz-se subvariedade  $n$ -dimensional imersa em  $\mathcal{M}'$ .  $\phi$  pode não ser 'um para um' de  $\mathcal{M}$  para  $\phi(\mathcal{M})$  embora o seja se nos restringirmos a uma vizinhança suficientemente pequena de  $\mathcal{M}$ . Uma imersão diz-se um mergulho se for um homeomorfismo na sua imagem, com a topologia induzida de  $\mathcal{M}'$ . A imagem  $\phi(\mathcal{M})$  sob um mergulho  $\phi$  diz-se subvariedade  $n$ -dimensional mergulhada em  $\mathcal{M}'$ .

Uma aplicação  $C^r$   $\phi$  diz-se um difeomorfismo  $C^r$  se for um homeomorfismo com  $\phi$  e  $\phi^{-1}$  aplicações diferenciáveis  $C^r$ .

---

\* Um tensor  $\mathbf{T} \in T_0^r(p)$  diz-se um tensor contravariante e um tensor  $\mathbf{T} \in T_s^0(p)$  diz-se um tensor covariante.

A aplicação linear  $\phi_*$  pode ser generalizada a uma aplicação de tensores contravariantes  $T$  da seguinte forma:  $\phi_* : T \in T_0^r(p) \rightarrow \phi_* T \in T_0^r(\phi(p))$ , sendo que para qualquer  $\eta^i \in T_{\phi(p)}^*$ , o espaço dual de  $T_p$ ,  $\phi_* T(\eta^1, \dots, \eta^r)|_{\phi(p)} = T(\phi^* \eta^1, \dots, \phi^* \eta^r)|_p$ . Também podemos generalizar a aplicação linear  $\phi^* : T \in T_s^0(\phi(p)) \rightarrow \phi^* T \in T_s^0(p)$ , sendo que para qualquer  $X_i \in T_p$ ,  $\phi^* T(X_1, \dots, X_s)|_p = T(\phi_* X_1, \dots, \phi_* X_s)|_{\phi(p)}$ .

Quando a aplicação  $\phi$  é um difeomorfismo  $C^r$ ,  $\phi_*$  aplica  $T_p$  em  $T_{\phi(p)}$  e  $(\phi^1)^*$  aplica  $T_p^*$  em  $T_{\phi(p)}^*$ . Podemos então definir a aplicação  $\phi_* : T \in T_s^r(p) \rightarrow \phi_* T \in T_s^r(\phi(p))$  por  $\phi_* T((\phi^1)^* \eta^1, \dots, (\phi^1)^* \eta^s, \phi_* X_1, \dots, \phi_* X_r)|_{\phi(p)} = T(\eta^1, \dots, \eta^s, X_1, \dots, X_r)|_p$ .

Usando os conceitos introduzidos nesta secção e na anterior, é possível definir operadores diferenciais numa variedade, nomeadamente a derivada de Lie de um tensor. Introduzindo uma estrutura extra na variedade, a conexão, é possível definir a noção de derivada covariante de um tensor, que leva à definição de tensor de curvatura, o tensor de Riemann. Não apresentaremos, no entanto, os detalhes aqui\*.

## Métrica e espaço-tempo

O tensor da métrica  $g$  num ponto  $p \in \mathcal{M}$  é um tensor simétrico do tipo (0,2) em  $p$ , que atribui uma ‘magnitude’  $(g(X, X))^{\frac{1}{2}}$  a cada vector  $X \in T_p$  e define um ‘ângulo entre quaisquer dois vectores, sendo que  $X$  e  $Y$  serão ortogonais se  $g(X, Y) = 0$ . As componentes de  $g$  em relação a uma base vectorial do espaço tangente  $\{E_a\}$  são dadas por  $g_{ab} = g(E_a, E_b)$ . A métrica diz-se não degenerada se não existir nenhum vector diferente de zero  $X \in T_p$  tal que  $g(X, Y) = 0$  para todos os vectores  $Y \in T_p$ . A assinatura de  $g$  em  $p$  é o número de valores próprios positivos da matriz  $(g_{ab})$  em  $p$ , menos o número de valores próprios negativos da matriz  $(g_{ab})$ . Se  $g$  for não degenerada e contínua, a sua assinatura será constante em  $\mathcal{M}$ . Uma métrica lorentziana é uma métrica de assinatura  $n-2$ . Escolhendo convenientemente a base  $\{E_a\}$ , as componentes da métrica podem ser sempre reduzidas à forma diagonalizada.

Com uma métrica lorentziana em  $\mathcal{M}$ , os vectores não nulos em  $p$  podem ser divididos em três classes: um vector  $X \in T_p$  diz-se do tipo temporal, nulo ou espacial, se  $g(X, X)$  é negativo, zero ou positivo, respectivamente. No capítulo 3 veremos que os vectores nulos formam um cone duplo em  $T_p$  que separa os vectores do tipo temporal dos do tipo espacial.

Um difeomorfismo  $\phi: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  diz-se uma isometria se transporta a métrica em si própria, isto é, se  $\phi_* g$  é igual a  $g$  em todos os pontos. Então a aplicação  $\phi_* : T_p \rightarrow T_{\phi(p)}$  preservará os produtos escalares,  $g(X, Y)|_p = g(\phi_* X, \phi_* Y)|_{\phi(p)}$ .

Como modelo do espaço-tempo, a colecção de todos os eventos físicos, tomamos um par  $(\mathcal{M}, g)$  em que  $\mathcal{M}$  é uma variedade com as características já discutidas e  $g$  é uma métrica lorentziana de forma diagonalizada  $g_{ab} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$ .

Num dado ponto  $p \in \mathcal{M}$  o conjunto de todos os vectores do tipo temporal podem ser divididos em duas classes, uma das quais pode ser designada (neste momento, de uma forma arbitrária) como o conjunto de vectores do tipo temporal dirigidos para o

\* Ver, por exemplo, Hawking e Ellis (1973), caps.2.4 e 2.5.

futuro, a outra o conjunto daqueles dirigidos para o passado. Da mesma forma, o conjunto das tríades de vectores do tipo espacial, unitários e ortogonais entre si, podem ser divididas em duas classes, designadas por direitas e esquerdas. Fisicamente, a designação de vectores do tipo temporal dirigidos para o futuro e para o passado corresponde a uma escolha da direcção da seta do tempo\*, enquanto que a designação de tríades de vectores do tipo espacial direitas e esquerdas corresponde a uma escolha da paridade. Estas designações podem ser feitas em qualquer ponto e, por continuidade, podem ser alargadas a qualquer vizinhança suficientemente pequena desse ponto. A questão da orientabilidade do espaço-tempo surge quando nos perguntamos se estas designações podem ser feitas globalmente, sobre todo o espaço-tempo.

Um espaço-tempo diz-se orientável no tempo se a designação de vectores do tipo temporal dirigidos para o futuro e para o passado puder ser feita em todos os pontos desse espaço-tempo, sendo esta designação contínua de ponto para ponto ao longo de todo o espaço-tempo. Se for este o caso, existem duas designações possíveis: a original e a reversa, em que futuro e passado estão invertidos. Cada uma destas designações diz-se uma orientação do tempo, e um espaço-tempo é orientável no tempo se e só se a direcção no tempo puder ser substituída por um campo vectorial do tipo temporal. De forma análoga, podemos definir um espaço-tempo orientável no espaço e uma orientação do espaço.

Pode mostrar-se† que a orientabilidade de um espaço-tempo está relacionada com o comportamento da direcção (temporal ou espacial) ao longo de curvas fechadas. Assim, um espaço-tempo  $\mathcal{M}$  é orientável no tempo (respectivamente, espaço) se e só se qualquer curva fechada  $\gamma$  que passe num determinado ponto  $p \in \mathcal{M}$  preserve a orientação do tempo (respectivamente, do espaço), isto é, transportando a orientação ao longo de  $\gamma$ , partindo de  $p$ , obtém-se a mesma orientação quando se chega a  $p$ . Pode mostrar-se que, se considerarmos duas curvas fechadas homotópicas‡, ambas preservam a orientação ou ambas a reverterem. Diz-se que uma curva fechada  $\gamma$  que passe num determinado ponto  $p \in \mathcal{M}$  preserva totalmente a orientação se preserva a orientação do espaço e do tempo, ou nenhuma delas. A consideração de simetrias nas interacções entre partículas parece indicar que o nosso espaço-tempo é totalmente orientável.§

Devemos impor ainda alguma condição no nosso modelo  $(\mathcal{M}, g)$  de modo a assegurar que inclui todos os pontos não-singulares do espaço-tempo. O par  $C^r(\mathcal{M}', g')$  é uma extensão- $C^r$  de  $(\mathcal{M}, g)$  se:

- existe um mergulho  $C^r \mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ ;
- $\mu$  é uma isometria de  $(\mathcal{M}, g)$  em  $(\mu(\mathcal{M}), g|_{\mu(\mathcal{M})})$ ;
- $\mu(\mathcal{M}) \neq \mathcal{M}'$ .

---

\* Na nossa vizinhança do espaço-tempo existe uma seta do tempo bem definida, dada pela direcção do aumento da entropia de sistemas termodinâmicos quasi-isolados. No entanto, ainda hoje não é claro qual a relação entre esta seta e outras setas do tempo definidas, por exemplo, pela expansão do universo ou pela direcção da radiação electrodinâmica.

† Ver Geroch e Horowitz (1979), 5.2.

‡ Diz-se que duas curvas fechadas,  $\gamma$  e  $\gamma'$ , são homotópicas se  $\gamma$  puder ser deformada, de uma forma contínua, em  $\gamma'$ . Um espaço-tempo diz-se simplesmente conexo se quaisquer duas curvas fechadas que passam em  $p$  são homotópicas.

§ Ver discussão em Geroch e Horowitz, *op. cit.* e em Hawking e Ellis (1973), cap.6.1.

Isto é, se existe um espaço-tempo  $\mathcal{M}'$  no qual  $\mathcal{M}$  pode ser mergulhado e uma métrica lorentziana adequada  $\mathbf{g}'$  em  $\mathcal{M}'$  que coincida com  $\mathbf{g}$  na imagem de  $\mathcal{M}$ , devemos considerar os pontos de  $\mathcal{M}'$  como também sendo pontos do espaço-tempo. Parece razoável supor que se um espaço-tempo tem a possibilidade de se estender, o fará, ou seja, parece natural impor que um espaço-tempo ‘razoável’ seja inextensível.

Devemos então exigir que o modelo  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  seja  $C^r$ -inextendível, ou seja, que não exista nenhuma extensão- $C^r$   $(\mathcal{M}', \mathbf{g}')$  de  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  em que  $\mu(\mathcal{M})$  não seja igual a  $\mathcal{M}'$ . Pode mostrar-se que qualquer espaço-tempo pode ser estendido até mais nenhuma extensão ser possível obtendo-se, então, um espaço-tempo dito máximo.

## 2. Geodésicas e curvatura

Neste capítulo, iremos desenvolver técnicas relacionadas com o estudo de geodésicas e a influência que a energia (pela curvatura do espaço-tempo) tem sobre elas. As equações resultantes serão essenciais na compreensão dos teoremas de ‘singularidades’ discutidos no capítulo 5. Outra questão fundamental no estabelecimento destes teoremas são as restrições impostas sobre o tensor de energia-momento, que descrevemos também aqui. Por fim, analisaremos a construção de um sistema de coordenadas que está intimamente ligado às geodésicas e que será usado em diversas ocasiões mais à frente.

### **Condições sobre a energia**

No universo o tensor de energia-momento terá a contribuição de um grande número de campos de matéria e, por isso, seria extremamente complexo descrever este tensor de uma forma exacta, mesmo que se conhecessem a forma exacta da contribuição de cada campo e as equações do movimento que o governam. Na verdade, o comportamento da matéria, em condições extremas de pressão e densidade, só agora começa a ser um pouco compreendido. Deste modo, pareceria que teríamos poucas esperanças de prever, a partir das equações de Einstein, a ocorrência de singularidades no universo, uma vez que desconhecemos o lado direito dessas equações. No entanto, existem certas desigualdades sobre as quais será fisicamente razoável supor que se aplicam ao tensor de energia-momento, de uma forma genérica. A seguir, iremos supor, sem grande perda de generalidade, que o tensor de energia-momento pode ser diagonalizado numa base ortonormal  $\hat{e}_\mu^\alpha$  (ou seja, verificam-se as relações  $g_{\alpha\beta} \hat{e}_\mu^\alpha \hat{e}_\nu^\beta = \eta_{\mu\nu}$ ), de modo que podemos escrever

$$T^{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix}$$

Algumas condições sobre a energia são formuladas em termos de um vector  $v^\alpha$  do tipo temporal, normalizado e dirigido para o futuro, mas de resto arbitrário, representando a 4-velocidade de um observador arbitrário no espaço-tempo. Este vector pode ser decomposto como  $v^\alpha = \gamma(\hat{e}_0^\alpha + a\hat{e}_1^\alpha + b\hat{e}_2^\alpha + c\hat{e}_3^\alpha)$ , onde  $\gamma = (1 - a^2 - b^2 - c^2)^{-1/2}$ , sendo  $a$ ,  $b$  e  $c$  funções arbitrárias das coordenadas, obedecendo à condição  $a^2 + b^2 + c^2 < 1$ . Também precisaremos de vector  $k^\alpha$  arbitrário do tipo nulo dirigido para o futuro que pode expresso como  $k^\alpha = \hat{e}_0^\alpha + a'\hat{e}_1^\alpha + b'\hat{e}_2^\alpha + c'\hat{e}_3^\alpha$ , sendo  $a'$ ,  $b'$  e  $c'$  funções arbitrárias das coordenadas, obedecendo à condição  $a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1$ .

A condição de energia nula (CEN) afirma que se verifica a relação  $T^{\alpha\beta}k^\alpha k^\beta \geq 0$  e pode mostrar-se\* que é equivalente a que  $\forall i, \rho + p_i \geq 0$ .

---

\* Em relação a estas afirmações e às que se seguem, ver Poisson (2004), cap.2.1.



A condição de energia fraca (CEFA) afirma que se verifica a relação  $T^{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta \geq 0$  e pode mostrar-se que é equivalente a  $\rho \geq 0$  e  $\forall i, \rho + p_i > 0$ . De acordo com esta condição\*, verifica-se, então, que a densidade de energia, medida por um qualquer observador no espaço-tempo com 4-velocidade  $v^\alpha$ , deve ser não negativa.

A condição de energia forte (CEFO) afirma que se verifica a relação  $(T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta}) v^\alpha v^\beta \geq 0$ , onde  $T \equiv g_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta}$ . Uma vez que das equações de Einstein,  $T^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} T g_{\alpha\beta} = \frac{1}{8\pi} R_{\alpha\beta}$ , então esta condição é, na realidade, uma condição sobre o tensor de Ricci, e pode mostrar-se que é equivalente a  $\rho + \sum_i p_i \geq 0$  e  $\forall i, \rho + p_i \geq 0$ .†

A condição de energia dominante (CED) afirma que  $-T^\alpha_\beta v^\beta$  é um vector do tipo temporal ou nulo. Esta condição diz-nos que a densidade de momento, medida por um qualquer observador no espaço-tempo com 4-velocidade  $v^\alpha$ , não pode ser do tipo espacial e pode mostrar-se que é equivalente a  $\rho \geq 0$  e  $\forall i, \rho \geq |p_i|$ .

Apesar do seu carácter genérico, a verdade é que existem muitos exemplos de sistemas físicos que violam uma, ou mais, destas condições. Vamos aqui apenas mencionar algumas.‡ Por exemplo, um campo escalar clássico§  $\phi$ , com um tensor de energia-momento da forma  $T^{\alpha\beta} = \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} (\phi_{,\mu} \phi_{,\nu} g^{\mu\nu} + m^2 \phi^2)$ , viola a CED mas obedece a todas as outras. Outro exemplo interessante, e com aplicações à cosmologia, é o de uma constante cosmológica,  $\Lambda$ , diferente de zero. Neste caso, o tensor de energia-momento tem uma nova contribuição proporcional a  $-\Lambda g^{\alpha\beta}$ , de onde se vê que uma constante cosmológica positiva corresponde a uma densidade de energia do vácuo positiva e uma pressão do vácuo negativa. Pode verificar-se que, por si só, uma constante cosmológica positiva viola a CEFO, mas obedece às outras condições, enquanto que uma constante cosmológica negativa viola a CEFA e a CED, mas obedece às outras condições.

## Geodésicas

Considere-se uma curva  $C^r \lambda(t)$  com vector tangente  $\mathbf{X}$ . Esta diz-se uma curva geodésica se a derivada covariante do vector  $X$  ao longo de  $\lambda(t)$ ,  $\nabla_X X \equiv \frac{D}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)_\lambda$  for paralela a  $X$ , ou seja, se existir uma função  $f$  (que pode ser nula) tal que  $X^a_{;b} X^b = f X^a$ . Para tal curva, é possível encontrar um novo parâmetro  $v(t)$ , designado como um parâmetro afim, ao longo da curva tal que  $\frac{D}{dv} \left( \frac{\partial}{\partial v} \right)_\lambda = 0$ , sendo que o vector  $V \equiv \left( \frac{\partial}{\partial v} \right)_\lambda$  é paralelo a  $X$ , obedece às equações  $V^a_{;b} V^b = 0$  e tem a sua escala determinada por  $V(v) = 1$ . Uma curva parametrizada por um parâmetro afim diz-se uma geodésica. O

\* Deve notar-se que a CEFA, como se aplica a um vector do tipo temporal arbitrário, por continuidade, implica a CEN.

† É de notar que a CEFO implica a CEN mas não a CEFA.

‡ Para mais exemplos e detalhes, ver Visser (1996), cap.12.3 e referências aí citadas.

§ Um exemplo físico é o (ainda não observado) campo de Higgs.

parâmetro afim que parametriza uma geodésica temporal é designado por tempo próprio com símbolo  $\tau$ .

Dada uma conexão  $C^r$ , os teoremas de existência das equações diferenciais, aplicados à equação da geodésica, mostram que para qualquer ponto  $p \in \mathcal{M}$  e qualquer vector  $\mathbf{X}_p$  em  $p$ , existe uma geodésica  $\gamma_{\mathbf{X}}(v)$  em  $\mathcal{M}$ , com início em  $p$  e direcção inicial  $\mathbf{X}_p$ , ou seja, de modo que  $\gamma_{\mathbf{X}}(0) = p$  e  $(\partial/\partial v)\gamma|_{v=0} = \mathbf{X}_p$ .

Se  $r \geq 1$ , pode definir-se a aplicação exponencial  $C^r \exp: T_p \rightarrow \mathcal{M}$ , onde para cada  $\mathbf{X} \in T_p$ ,  $\exp(\mathbf{X})$  é o ponto em  $\mathcal{M}$  a uma distância de  $p$  unitária (parametrizada) ao longo da geodésica  $\gamma_{\mathbf{X}}$ .

Pode mostrar-se que existe uma vizinhança aberta  $\mathcal{N}_0$  da origem em  $T_p$  e uma vizinhança aberta  $\mathcal{N}_p$  de  $p$  em  $\mathcal{M}$  de modo que a aplicação exponencial é um difeomorfismo  $C^r$  de  $\mathcal{N}_0$  em  $\mathcal{N}_p$ . A vizinhança  $\mathcal{N}_p$  diz-se uma vizinhança normal de  $p$ , e podemos tomá-la como sendo convexa se qualquer ponto  $q \in \mathcal{N}_p$  pode ser ligado a qualquer outro ponto  $r \in \mathcal{N}_p$  por uma geodésica única que começa em  $q$  e está totalmente contida em  $\mathcal{N}_p$ . Neste tipo de vizinhança, podemos definir as chamadas coordenadas normais, baseadas em  $q$ ,  $(x^1, \dots, x^n)$  escolhendo uma base  $\{\mathbf{E}_a\}$  de  $T_p$ , e definindo as coordenadas do ponto  $r$  pela relação  $r = \exp(x^a \mathbf{E}_a)$ , isto é, atribuímos a  $r$  as coordenadas, na base  $\{\mathbf{E}_a\}$ , do ponto  $\exp^{-1}(r)$  em  $T_q$ . Nestas coordenadas,  $(\partial/\partial x^i)|_q = \mathbf{E}_i$  e  $\Gamma^i_{(jk)}|_q = 0$ .

A aplicação  $\exp$  pode não ser definida para todos os  $\mathbf{X} \in T_p$ , uma vez que a geodésica  $\gamma_{\mathbf{X}}(v)$  pode não ser definida para todos os  $v$ . Se um segmento geodésico puder ser estendido indefinidamente, ou seja, se o parâmetro afim puder tomar valores arbitrariamente grandes, essa geodésica diz-se uma geodésica completa e, se todas as geodésicas em  $\mathcal{M}$  forem completas (isto é, se a aplicação  $\exp$  é definida para todos os  $T_p$  de todos os pontos  $p \in \mathcal{M}$ ), a variedade diz-se geodesicamente completa.

A ligação entre extensibilidade de um espaço-tempo (discutida no capítulo 1) e a existência de geodésicas incompletas é expressa pelo resultado seguinte: se  $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$  tem uma extensão  $\theta: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$ , então existe uma geodésica  $\gamma$  temporal incompleta tal que  $\theta \circ \gamma$  é extensível.

As magnitudes no espaço tangente, definidas pela métrica e pelo produto escalar, estão relacionadas com as magnitudes na variedade pela definição: o comprimento de arco entre dois pontos  $p = \gamma(a)$  e  $q = \gamma(b)$  ao longo de uma curva  $\gamma(t) \in C^0$ , diferenciável por partes, com vector tangente  $(\partial/\partial t)\gamma$  tal que  $\mathbf{g}(\partial/\partial t, \partial/\partial t)$  tem o mesmo sinal em

todos os pontos ao longo de  $\gamma(t)$ , é a quantidade  $L(p, q; \gamma) = \int_a^b |g(\partial/\partial t, \partial/\partial t)|^{\frac{1}{2}} dt$ .

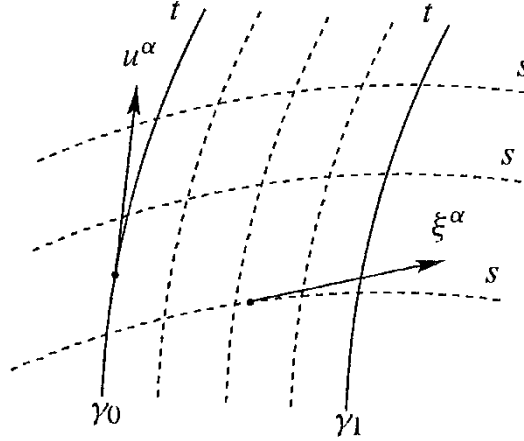
## Congruência de geodésicas temporais

Uma congruência é uma família de curvas num conjunto aberto  $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$  tal que por cada ponto de  $\mathcal{U}$  passa apenas uma curva dessa família. Estamos interessados em descrever a evolução desta congruência ao longo do tempo. De uma forma mais precisa, queremos determinar o comportamento do vector desvio  $\xi^\alpha$  entre duas geodésicas vizinhas (ver figura 2.1). Sendo  $u^\alpha$  tangente às geodésicas, verificam-se as seguintes equações:  $u^\alpha u_\alpha = -1$ ;  $u^\alpha_{;\beta} u^\beta = 0$ ;  $u^\alpha_{;\beta} \xi^\beta = \xi^\alpha_{;\beta} u^\beta$ ;  $u^\alpha \xi_\alpha = 0$  e

$$\frac{D^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = -R^\alpha_{\beta\gamma\delta} u^\beta \xi^\gamma u^\delta, \quad (2.1)$$

sendo esta última a chamada equação do desvio geodésico e que mostra que a curvatura provoca uma aceleração relativa entre geodésicas vizinhas.

Dada uma congruência e o campo vectorial associado  $u^\alpha$ , a métrica  $g_{\alpha\beta}$  pode ser decomposta numa parte longitudinal e numa transversal, sendo esta última dada por  $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + u_\alpha u_\beta$ . Podemos introduzir o campo tensorial  $B_{\alpha\beta} \equiv u_{\alpha;\beta}$ . Tal como  $h_{\alpha\beta}$ , este tensor é ortogonal ( $u^\alpha B_{\alpha\beta} = 0 = B_{\alpha\beta} u^\beta$ ) e é uma medida da falha de  $\xi^\alpha$  em ser transportado paralelamente ao longo da congruência pois verifica-se que  $\xi^\alpha_{;\beta} u^\beta = B^\alpha_{\beta} \xi^\beta$ .



**Figura 2.1** Vector desvio entre duas geodésicas vizinhas.

Podemos decompor  $B_{\alpha\beta}$  nas suas componentes simétrica e anti-simétrica  $B_{\alpha\beta} \equiv \theta_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta}$ , em que  $\theta_{\alpha\beta} = B_{(\alpha\beta)}$  é o chamado tensor de expansão e  $\omega_{\alpha\beta} = B_{[\alpha\beta]}$  é o chamado tensor de rotação. Pode ainda dividir-se  $\theta_{\alpha\beta}$  no seu traço e numa componente com traço nulo:  $\theta_{\alpha\beta} = \sigma_{\alpha\beta} + \frac{1}{3} \theta h_{\alpha\beta}$ , em que  $\sigma_{\alpha\beta}$  é o chamado tensor de distorção e  $\theta = u^\alpha_{;\alpha}$  é o escalar de expansão. Como os próprios nomes indicam, o efeito destes tensores tem o seguinte significado:  $\sigma_{\alpha\beta}$  representa uma distorção sem alteração de volume ( $\sigma^\alpha_{\alpha} = 0$ ),  $\omega_{\alpha\beta}$  representa uma mudança de orientação sem mudança de forma ou volume enquanto que  $\theta$  representa uma expansão pura (sem distorção ou rotação). Em particular, a congruência será divergente (geodésicas que se afastam) se  $\theta > 0$  e será convergente (geodésicas que se aproximam) se  $\theta < 0$ .

Uma congruência em que  $\omega_{\alpha\beta} = 0$  diz-se ortogonal a hipersuperfícies pois as suas geodésicas serão ortogonais a uma família de hipersuperfícies espaciais nas quais é possível folhear  $\mathcal{U}$ .

Usando a equação de desvio geodésico pode deduzir-se a seguinte relação  $B_{\alpha\beta;\mu}u^\mu = -B_{\alpha\mu}B^\mu_\beta - R_{\alpha\mu\beta\nu}u^\mu u^\nu$ . Uma equação de evolução para  $\theta$  pode ser obtida se tomarmos o traço desta equação, obtendo:  $\frac{d\theta}{d\tau} = -B^{\alpha\beta}B_{\beta\alpha} - R_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta$ . Usando o facto de que  $B^{\alpha\beta}B_{\beta\alpha} = \frac{1}{3}\theta^2 + \sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} - \omega^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta}$  ( $\sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} \geq 0$ ,  $\omega^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta} \geq 0$ ) chegamos à chamada equação de Raychaudhuri (para geodésicas temporais):

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} + \omega^{\alpha\beta}\omega_{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta. \quad (2.2)$$

Consideremos uma congruência ortogonal a hipersuperfícies e que se verifica a condição forte sobre a energia. Então a equação de Raychaudhuri implica que

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{3}\theta^2 - \sigma^{\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta \leq 0. \text{ A expansão deve então diminuir ao longo da}$$

evolução da congruência e, em particular,  $\frac{d\theta}{d\tau} \leq -\frac{1}{3}\theta^2$ , que pode ser integrada dando

$\theta^{-1}(\tau) \geq \theta_0^{-1} + \tau/3$ , onde  $\theta_0 \equiv \theta(0)$ . Isto mostra que se a congruência estiver inicialmente a convergir ( $\theta_0 < 0$ ) então  $\theta(\tau) \rightarrow -\infty$  num tempo próprio  $\tau \leq 3/|\theta_0|$ . Este resultado será útil no estabelecimento dos teoremas de singularidades, como veremos no capítulo 5.

## ***Congruência de geodésicas nulas***

A configuração geométrica é a mesma que na secção anterior excepto que, agora, o campo vectorial tangente  $k^\alpha$  é nulo. Supomos que as geodésicas têm um parâmetro afim  $\lambda$  de modo que um deslocamento ao longo de um membro da congruência é dado por  $dx^\alpha = k^\alpha d\lambda$ . Verificam-se então as seguintes equações:  $k^\alpha k_\alpha = 0$ ;  $k^\alpha_{;\beta}k^\beta = 0$ ;  $k^\alpha_{;\beta}\xi^\beta = \xi^\alpha_{;\beta}k^\beta$ ;  $k^\alpha \xi_\alpha = 0$ . É de notar que, agora, a condição  $k^\alpha \xi_\alpha = 0$  falha em remover uma eventual componente de  $\xi^\alpha$  na direcção de  $k^\alpha$ . A parte transversal da métrica  $g_{\alpha\beta}$  será dada agora por\*  $h_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + k_\alpha N_\beta + N_\alpha k_\beta$ , em que  $N_\alpha$  é um campo vectorial nulo auxiliar normalizado de tal modo que  $k^\alpha N_\alpha = -1$  e sendo  $h_{\alpha\beta}$  transversal a  $k^\alpha$  e a  $N^\alpha$  e bidimensional.

Podemos introduzir o campo tensorial  $B_{\alpha\beta} \equiv k_{\alpha;\beta}$ . Este tensor é ortogonal a  $k^\alpha$  ( $k^\alpha B_{\alpha\beta} = 0 = B_{\alpha\beta}k^\beta$ ) mas não é ortogonal a  $N^\alpha$ , e é uma medida da falha de  $\xi^\alpha$  em ser transportado paralelamente ao longo da congruência pois verifica-se que  $\xi^\alpha_{;\beta}k^\beta = B^\alpha_\beta \xi^\beta$ . Deve isolar-se a componente puramente ortogonal de  $\xi^\alpha$  que designaremos por  $\tilde{\xi}^\alpha \equiv h^\alpha_\mu \xi^\mu$ . A derivada covariante desta componente ao longo de  $k^\alpha$  representa a velocidade relativa de duas geodésicas vizinhas e pode obter-se a seguinte equação:

$$(\tilde{\xi}^\alpha_{;\beta}k^\beta)^\sim = \tilde{B}^\alpha_\beta \tilde{\xi}^\beta \text{ onde } \tilde{B}^\alpha_\beta = h^\mu_\alpha h^\nu_\beta B_{\mu\nu}.$$

---

\* Para mais pormenores, ver Poisson (2004), cap.2.

Podemos decompor  $\tilde{B}_{\alpha\beta}$  nas suas componentes irreduzíveis

$\tilde{B}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \theta h_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} + \omega_{\alpha\beta}$ , onde  $\theta = \tilde{B}^{\alpha}_{\alpha} = k^{\alpha}_{;\alpha}$  é o escalar de expansão e é a taxa de mudança fraccionária – por unidade de distância do parâmetro afim – da área da secção recta da congruência.

A dedução da equação de Raychaudhuri (para geodésicas nulas) segue os mesmos passos que no caso de geodésicas temporais. Em particular, obtém-se a seguinte equação:  $\frac{d\theta}{d\lambda} = -B^{\alpha\beta} B_{\beta\alpha} - R_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta}$ . Usando o facto de que  $B^{\alpha\beta} B_{\beta\alpha} = \frac{1}{2} \theta^2 + \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} - \omega^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta}$ , chegamos à equação de Raychaudhuri (para geodésicas nulas):

$$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{2} \theta^2 - \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + \omega^{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta}. \quad (2.3)$$

Consideremos uma congruência ortogonal a hipersuperfícies e que se verifica a condição nula sobre a energia. Então a equação de Raychaudhuri implica que

$\frac{d\theta}{d\tau} = -\frac{1}{2} \theta^2 - \sigma^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} - R_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} \leq 0$ . A expansão deve então diminuir ao longo da evolução da congruência e, em particular,  $\frac{d\theta}{d\tau} \leq -\frac{1}{2} \theta^2$ , que pode ser integrada dando  $\theta^{-1}(\lambda) \geq \theta_0^{-1} + \lambda/2$ , onde  $\theta_0 \equiv \theta(0)$ . Isto mostra que se a congruência estiver inicialmente a convergir ( $\theta_0 < 0$ ) então  $\theta(\lambda) \rightarrow -\infty$  num parâmetro afim  $\lambda \leq 2/|\theta_0|$ .

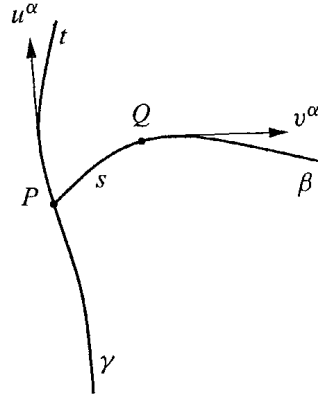
## Coordenadas de Fermi

Vimos, já neste capítulo, que existe sempre uma vizinhança da origem de  $T_p$  de modo que a aplicação exponencial é um difeomorfismo  $C^r$  de  $\mathcal{N}_0$  em  $\mathcal{N}_p$ . Uma vez que o espaço tangente é um espaço vectorial  $n$ -dimensional, podemos identificá-lo com  $\mathfrak{R}^n$  e estabelecer um sistema de coordenadas que faz a aplicação de geodésicas que passam por  $p$  em linhas rectas que passam pela origem de  $\mathfrak{R}^n$ . Estas são as também chamadas coordenadas normais de Riemann, sendo que são caracterizadas por  $g_{\alpha\beta}(x_p) = \eta_{\alpha\beta}$  e  $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}|_p = 0$  e, conseqüentemente, a equação das geodésicas toma a mesma forma da

equação para uma partícula livre no espaço plano:  $\left. \frac{d^2 x^{\alpha}}{d\tau^2} \right|_p = 0$ . Este sistema de coordenadas constitui, assim, um referencial local inercial.

Mas esta não é a única forma de construir um referencial deste tipo. O princípio de equivalência indica-nos que podemos ir mais longe do que anular os termos da conexão num determinado ponto. Ele sugere que a equação das geodésicas deve tomar a forma da equação da partícula livre, no referencial de uma vizinhança suficientemente pequena de um observador em queda livre, ao longo de um intervalo de tempo. A idealização matemática deste referencial é um sistema de coordenadas em que os termos da conexão se anulam ao longo de uma geodésica e não apenas num ponto dela. Este sistema de coordenadas constitui, assim, um referencial local inercial ao longo da geodésica (um referencial em queda livre) e são designadas por coordenadas de Fermi.

Para a construção deste referencial procede-se da seguinte forma\*. Considere-se uma geodésica temporal  $\gamma$  com vector tangente  $u^{\alpha'}$  e seja  $\tau$  o tempo próprio ao longo da geodésica†. Selecciona-se na geodésica um ponto O, para o qual  $\tau = 0$  e no qual se escolhe três eixos espaciais ortogonais entre si que, em conjunto com a 4-velocidade do observador, constituem, por transporte paralelo, uma base ortonormal para cada ponto ao longo da geodésica, sendo esta a origem das três coordenadas espaciais. Designaremos esta base por  $\hat{e}_{\mu}^{\alpha'}$ , que satisfaz as equações  $\hat{e}_{\mu}^{\alpha'};_{\beta'} u^{\beta'} = 0$ ,  $\hat{e}_0^{\alpha'} = u^{\alpha'}$  e  $g_{\alpha'\beta'} \hat{e}_{\mu}^{\alpha'} \hat{e}_{\nu}^{\beta'} = \eta_{\mu\nu}$ . Considere-se agora uma geodésica espacial  $\beta$  com origem no ponto P, caracterizado por tempo próprio  $\tau$ , e com vector tangente  $v^{\alpha'}$ . Seja  $s$  a distância própria ao longo desta geodésica sendo que  $s_P = 0$  (ver figura 2.2). Supomos que, em P,  $v^{\alpha'}$  é ortogonal a  $u^{\alpha'}$ , ou seja, admite a decomposição  $v^{\alpha'}|_P = \Omega^a \hat{e}_a^{\alpha'}$ . Escolhendo coeficientes  $\Omega^a$  diferentes pode construir-se novas geodésicas ortogonais a  $\gamma$  em P.



**Figura 2.2** Construção geométrica das coordenadas normais de Fermi.

As coordenadas de Fermi de um ponto Q em  $\beta$ , a uma distância  $s$  de P, são dadas por  $x^{\alpha} = (\tau, \Omega^a s_Q)$ . Pode mostrar-se que este sistema de coordenadas está relacionado com o sistema original pela equação  $\partial x^{\alpha'}/\partial x^{\mu} = \hat{e}_{\mu}^{\alpha'}$  e que tem as seguintes propriedades:

$$g_{\alpha\beta}|_{\gamma} = \eta_{\alpha\beta}, \quad g_{\alpha\beta,\delta}|_{\gamma} = 0, \quad \frac{d}{d\tau} \hat{e}_{\mu}^{\alpha} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{d^2 x^{\alpha}}{ds^2} = 0.$$

As segundas derivadas da métrica também podem ser determinadas em função das componentes do tensor de Riemann. Verifica-se que apenas as segundas derivadas espaciais são diferentes de zero, uma vez que a métrica é de Minkowski ao longo de  $\gamma$ .

De modo a determinar o tensor de Riemann em  $\gamma$ , precisamos apenas da transformação de coordenadas em  $\gamma$  que é dada pela equação  $\partial x^{\alpha'}/\partial x^{\mu} = \hat{e}_{\mu}^{\alpha'}$ . A parte difícil deste cálculo é a determinação da base ortonormal que é transportada paralelamente ao longo de  $\gamma$ . Uma vez conhecida esta, as componentes do tensor de Riemann nas coordenadas de Fermi são obtidas por projecção, expressas em função de  $\tau$ ,

$$R_{\tau abc}(\tau) = R_{\mu'\alpha'\beta'\delta'} \hat{e}_{\tau}^{\mu'} \hat{e}_a^{\alpha'} \hat{e}_b^{\beta'} \hat{e}_c^{\delta'} \quad (2.4)$$

\* Aqui seguimos Poisson (2004), cap.1.11.

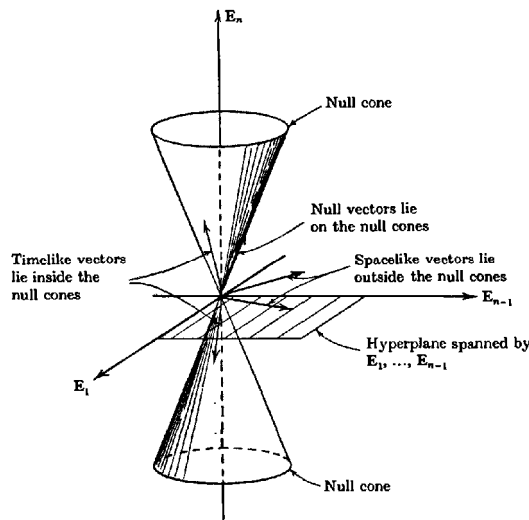
† As coordenadas de Fermi serão designadas por  $x^{\alpha} = (\tau, x^a)$  enquanto que  $x^{\alpha'}$  se refere a um sistema de coordenadas arbitrário.

### 3. Estrutura causal

O tema deste capítulo é a estrutura causal do espaço-tempo. A formalização das relações causais entre eventos físicos é fundamental em todas as teorias físicas, especialmente nas relativistas. Aqui iremos desenvolver conceitos matemáticos essenciais na compreensão da estrutura dos buracos negros (e no estabelecimento dos teoremas de singularidades), assim como nas formulações gerais da conjectura da censura cósmica, apresentada nos capítulos 8 a 10.

#### ***Cones de luz***

Seja  $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$  um espaço-tempo. Em cada evento  $p \in \mathcal{M}$ , o espaço tangente é isomorfo ao espaço-tempo de Minkowski, o qual tem uma estrutura causal ditada pelos cones de luz passado e futuro (ver figura 3.1).



**Figura 3.1** Cones nulos definidos pela métrica de Lorentz.

Os cones de luz passado e futuro são subconjuntos de  $\mathcal{M}$ , gerados pelas geodésicas de tipo nulo que passam por  $p$ . Os cones nulos são subconjuntos de  $T_p$  formados por vectores nulos que constituem cones duplos que separam os vectores temporais dos vectores espaciais.

O postulado de causalidade local<sup>\*</sup> afirma que as equações que governam os campos de matéria devem ser tais que, se  $\mathcal{U}$  é uma vizinhança normal convexa e  $p$  e  $q$  são pontos em  $\mathcal{U}$ , então podemos mandar um sinal em  $\mathcal{U}$ , entre  $p$  e  $q$ , se e só se  $p$  e  $q$  puderem ser ligados por uma curva  $C^1$  inteiramente contida em  $\mathcal{U}$ , cujo vector tangente é do tipo temporal ou nulo (ou seja, uma curva não-espacial<sup>†</sup>).

<sup>\*</sup> Ver Hawking e Ellis (1973), cap.3.2.

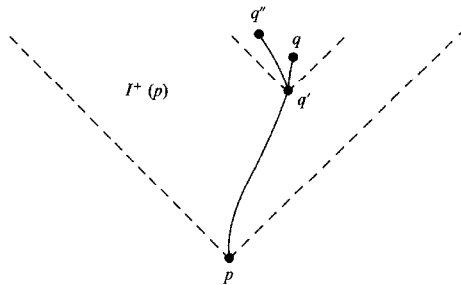
<sup>†</sup> Também denominada por curva causal.

É este postulado que diferencia a métrica  $g$  de todos os outros campos em  $\mathcal{M}$  e lhe dá um carácter distintamente geométrico. Se  $\{x^a\}$  são coordenadas normais em  $\mathcal{U}$ , em redor de  $p$ , é intuitivo que os pontos que podem ser atingidos a partir de  $p$  por curvas não-espaciais em  $\mathcal{M}$  são aqueles cujas coordenadas satisfazem  $-(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 \leq 0$ . A fronteira desses pontos é formado pela imagem do cone nulo de  $p$  sob a aplicação exponencial, isto é, o conjunto de todas as geodésicas nulas que passam por  $p$ . Assim, observando quais os pontos que podem comunicar com  $p$ , podemos determinar o cone nulo em  $T_p$ .<sup>\*</sup>

## Futuros e passados

Dizemos que  $p$  precede  $q$  (cronologicamente) se existe uma curva temporal, dirigida para o futuro<sup>†</sup>, que começa em  $p$  e acaba em  $q$ . Pode mostrar-se que, se  $p$  precede  $q$  e  $q$  precede  $r$ , então  $p$  precede  $r$ .

Para qualquer ponto  $p \in \mathcal{M}$ , o passado cronológico (ou domínio de influência passado) de  $p$ ,  $\Gamma(p)$  é o conjunto de todos os pontos que precedem  $p$  e, de uma forma análoga,  $\Gamma^+(p)$  é o conjunto de todos os pontos que  $p$  precede, o futuro cronológico de  $p$ . No espaço-tempo de Minkowski, estes conjuntos são o interior dos cones de luz passado e futuro, respectivamente. Estes conjuntos são sempre conjuntos abertos (ver figura 3.2). Para qualquer subconjunto  $S \subset \mathcal{M}$ , define-se  $\Gamma^+(S) = \bigcup_{p \in S} \Gamma^+(p)$ .



**Figura 3.2**  $\Gamma^+(p)$  é um conjunto aberto. O conjunto de todos os pontos  $q''$  precedidos por  $q'$  forma uma vizinhança de  $q$  inteiramente contida em  $\Gamma^+(p)$ .

Os futuros e passados cronológicos têm muitas propriedades que são úteis na caracterização causal de um espaço-tempo.<sup>‡</sup> Uma delas é que a ideia intuitiva da fronteira de  $\Gamma(p)$ ,  $\dot{\Gamma}^+(p)$ , ser gerada por geodésicas nulas, dirigidas para o futuro começando em  $p$ , é, em geral, falsa. No entanto, localmente, esta ideia permanece válida

<sup>\*</sup> Uma vez sabido este, a métrica em  $p$  pode ser determinada até um factor conforme (multiplicativo). Este factor pode ser determinado pelo postuldo da conservação local de energia e momento. Ver Hawking e Ellis (1973), cap.3.2.

<sup>†</sup> Ou seja, uma curva em que, para cada um dos seus pontos, o vector tangente é um vector do tipo temporal e dirigido para o futuro. Ver definição mais geral na secção seguinte.

<sup>‡</sup> Para mais detalhes e provas, ver Geroch e Horowitz (1979), 5.2.



sendo que existe sempre uma vizinhança normal convexa  $\mathcal{U}$  de  $p$  de modo que  $\dot{I}^+(p)|_{\mathcal{U}}$ , a fronteira do futuro cronológico de  $p$  em  $(\mathcal{U}, \mathbf{g})$ , é gerada pelas geodésicas nulas dirigidas para o futuro que emanam de  $p$ .

Pode mostrar-se\* também que  $\dot{I}^+(S)$  é uma subvariedade  $C^0$ , 3-dimensional e semi-espacial, mergulhada em  $\mathcal{M}$ , sendo que um subconjunto  $S \subset \mathcal{M}$  é semi-espacial† se  $I^+(S) \cap S = \emptyset$ , isto é, se não existirem  $p, q \in S$  tais que  $q \in I^+(p)$ .

O futuro causal de  $p$ ,  $J^+(p)$ , é definido como sendo o conjunto de pontos que podem ser atingidos por uma curva causal dirigida para o futuro partindo de  $p$ . (analogamente para  $J^-(p)$ ). No espaço-tempo plano,  $J^+(p)$  é um conjunto fechado. Para qualquer subconjunto  $S \subset \mathcal{M}$ , define-se  $J^+(S) = \bigcup_{p \in S} J^+(p)$  (analogamente para  $J^-(S)$ ).

Pode mostrar-se que  $I^+(S) = \text{int}[J^+(S)]$ ,  $\overline{J^+(S)} = \overline{I^+(S)}$  e  $\dot{I}^+(S) = \dot{J}^+(S)$ .

## Limites de curvas

Uma curva contínua  $\gamma: F \rightarrow \mathcal{M}$ , em que  $F$  é um intervalo conexo de  $R^1$ , é dirigida para o futuro e não-espacial se para todo o  $t \in F$  existe uma vizinhança  $G$  de  $t$  em  $F$  e uma vizinhança convexa normal  $\mathcal{U}$  de  $\gamma(t)$  em  $\mathcal{M}$  tal que para todo  $t_1 \in G$ ,  $\gamma(t_1) \in J^-(\gamma(t), \mathcal{U}) - \gamma(t)$  se  $t_1 < t$  e  $\gamma(t_1) \in J^+(\gamma(t), \mathcal{U}) - \gamma(t)$  se  $t < t_1$ . Ou seja, podemos dizer que uma curva contínua, mesmo que não tenha um vector tangente, é não-espacial se localmente quaisquer dois pontos da curva puderem ser ligados por uma curva causal diferenciável por partes.  $\gamma$  diz-se uma curva temporal dirigida para o futuro se as mesmas condições são válidas com  $J$  substituído por  $I$ .

Um ponto  $p$  diz-se um ponto final futuro de uma curva não-espacial, dirigida para o futuro,  $\gamma: F \rightarrow \mathcal{M}$  se, para qualquer vizinhança  $\mathcal{V}$  de  $p$  existe um  $t \in F$  tal que  $\gamma(t_1) \in \mathcal{V}$  para todo  $t_1 \in F$  com  $t_1 \geq t$ .

Uma curva não-espacial é inextensível no futuro num conjunto  $\mathcal{S}$  se não tiver um ponto final futuro nesse em  $\mathcal{S}$ .

Um ponto  $p$  diz-se um ponto de convergência de uma sequência infinita de curvas não-espaciais  $\lambda_n$  se para qualquer vizinhança de  $p$  existe um  $N$  tal que a vizinhança intersecta  $\lambda_n$ , para todo o  $n > N$ . Uma curva não-espacial  $\lambda$  é a curva de convergência da sequência  $\lambda_n$  se todos os  $p \in \lambda$  são pontos de convergência.

Um ponto  $p$  diz-se um ponto limite de uma sequência infinita de curvas não-espaciais  $\lambda_n$  se qualquer vizinhança de  $p$  intersecta um número infinito de  $\lambda_n$ . Uma curva não-espacial  $\lambda$  é a curva limite da sequência  $\lambda_n$  se existir uma subsequência  $\lambda'_n$  das  $\lambda_n$  tal que para todos os  $p \in \lambda$ ,  $\lambda'_n$  converge para  $p$ .

---

\* Ver Wald (1984), cap.8.1.

† *Semi-spacelike*, em inglês. Também designado por *achronal*. Também se usa o termo acausal para designar um conjunto  $S$  em que não existe nenhum par de pontos com separação temporal ou nula, isto é, se não existirem  $p, q \in S$  tais que  $q \in J^+(p)$ .

Aplicando teoremas de existência de pontos limite e curvas limite, pode provar-se alguns teoremas que caracterizam a fronteira de futuros cronológicos, nomeadamente\*:

- se  $\gamma$  é uma curva não-espacial, dirigida para o futuro a partir do ponto  $q$ , e não entra em  $I^+(q)$ , então  $\gamma$  é uma geodésica nula;
- sendo  $C$  um subconjunto fechado de  $\mathcal{M}$ , a fronteira de  $I^-(C)$ ,  $\dot{I}^-(C)$ , é nula no seguinte sentido: por qualquer ponto  $p$  de  $\dot{I}^-(C)$ , passa uma geodésica nula dirigida para o futuro que está contida inteiramente nesta fronteira, e tem um ponto final passado em  $C$  ou então é inextensível no passado.

## **Condições de causalidade**

Apesar de um espaço-tempo genérico em relatividade geral ter, localmente, a mesma estrutura causal do espaço-tempo de Minkowski, a verdade é que globalmente podem ocorrer diferenças substanciais, eventualmente dando origem a comportamentos causais «anómalos». Um exemplo paradigmático é a ocorrência de curvas temporais (ou causais) fechadas, isto é, a existência de pontos no espaço-tempo que se precedem a si mesmos. Normalmente, a ocorrência de curvas deste tipo num determinado espaço-tempo é encarada como um indício que este não deve ser fisicamente plausível. É necessário, então, formular condições de causalidade que um espaço-tempo genérico deve obedecer de modo a ser causalmente ‘bem comportado’.

A não existência de curvas temporais (respectivamente, não-espaciais) fechadas num espaço-tempo é designada por condição de cronologia (respectivamente, de causalidade). Pode mostrar-se<sup>†</sup> que se um espaço-tempo é compacto, o conjunto onde a condição de cronologia é violada é não vazio. Por esta razão, um espaço-tempo compacto não é considerado fisicamente plausível<sup>‡</sup>.

Um espaço-tempo  $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$  diz-se fortemente causal se, para todos os pontos  $p \in \mathcal{M}$  e todas as vizinhanças  $O$  de  $p$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$ , contida em  $O$ , tal que nenhuma curva causal intersecta  $V$  mais do que uma vez. Ou seja, se esta condição for violada, por cada vizinhança de um ponto suficientemente pequena existem curvas causais «quase fechadas» que começam e acabam muito perto desse ponto. Neste caso, é sabido que uma modificação da métrica numa vizinhança de dois ou mais pontos pode levar à ocorrência de curvas causais fechadas. Este facto levou à formulação de outra condição, mais forte.

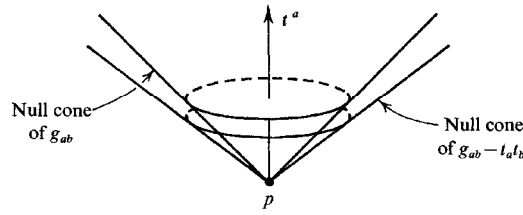
Um espaço-tempo  $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$  diz-se estavelmente causal se existir um campo vectorial temporal  $t^\alpha$  tal que a métrica lorentziana em  $\mathcal{M}$  dada por  $g_{\alpha\beta} - t_\alpha t_\beta$  não admite curvas temporais fechadas. A nova métrica permite excluir os casos em que o espaço-tempo está na iminência de ter curvas causais fechadas, abrindo o cone de luz em cada ponto (ver figura 3.3).

---

\* Ver, por exemplo, Wald (1984), §8.2.

† Ver Hawking e Ellis (1973), prop.6.4.2.

‡ Outro argumento contra este tipo de espaço-tempo é o facto de que qualquer variedade 4-dimensional compacta, com uma métrica lorentziana, não pode ser simplesmente conexa.



**Figura 3.3** Os cones nulos da métrica  $g_{\alpha\beta} - t_\alpha t_\beta$  são mais ‘abertos’ do que os da métrica  $g_{\alpha\beta}$ .

Esta condição exige então que, para um espaço-tempo ser considerado estavelmente causal, este não só não pode conter curvas causais temporais fechadas mas também tem de ser tal que podemos ‘abrir’ os cones nulos por uma quantidade finita em qualquer ponto, em que esta quantidade varia continuamente (mas de resto arbitrariamente) ao longo de  $\mathcal{M}$ , sem encontrarmos curvas temporais fechadas.

Existem algumas consequências extremamente úteis que derivam da verificação desta condição.\* Por exemplo, um espaço-tempo estavelmente causal não pode ser compacto.

Pode também mostrar-se que<sup>†</sup> um espaço-tempo é estavelmente causal se, e só se, existir uma função diferenciável  $f$  em  $\mathcal{M}$  cujo gradiente seja do tipo temporal em todos os pontos. Esta função global do tempo pode ser encarada como um «tempo cósmico», uma vez que aumenta ao longo de qualquer curva causal dirigida para o futuro. O recíproco desta proposição também é verdadeiro.

Por último, um espaço-tempo estavelmente causal admite uma divisão em fatias semi-espaciais, uma vez que uma fatia onde  $f$  é constante é semi-espacial.<sup>‡</sup> Uma fatia é uma subvariedade, 3-dimensional e do tipo espacial, mergulhada em  $\mathcal{M}$ , sendo um subconjunto fechado sem bordo.§

## Domínios de dependência

A ideia básica inerente no conceito de domínio de influência, a de ‘precedência’, reflecte, como já vimos, a capacidade de um evento  $p$  influenciar outro evento  $q$ , por meio de um sinal. Uma questão relacionada prende-se com o saber se a informação numa dada região do espaço-tempo determinará a situação física numa outra região. Esta questão não pode ser respondida com base numa relação apenas entre pontos do espaço-tempo, isto é, para determinar o que acontecerá em  $p$  temos de registar todos os sinais que poderiam influenciar a física em  $p$ . O conceito que engloba estas ideias é o de domínio de dependência.

\* Ver Geroch e Horowitz (1979), 5.2.

† Ver Hawking e Ellis (1973), prop.6.4.9.

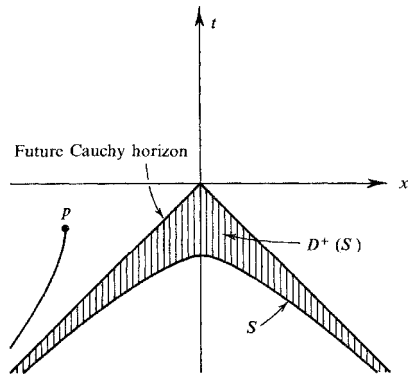
‡ É de notar, no entanto, que existem espaços-tempo estavelmente causais que admitem fatias não semi-espaciais e existem espaços-tempo não estavelmente causais que admitem fatias semi-espaciais.

§ O bordo de um conjunto  $S$  é o conjunto de pontos  $p \in S$  tais que toda a vizinhança aberta de  $p$  contém um ponto  $q \in I^+(p)$ , um ponto  $r \in I^-(p)$  e uma curva temporal que vai de  $r$  a  $q$ , sem intersectar  $S$ .

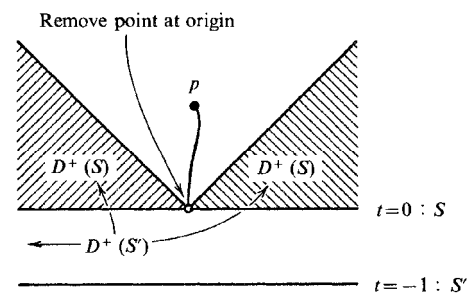
Considere-se um conjunto  $S$  fechado e semi-espacial. O domínio futuro de dependência de  $S$ ,  $D^+(S)$ , é o conjunto de todos os pontos  $p$  tais que todas as curvas causais dirigidas para o passado inextensíveis que passam em  $p$  intersectam  $S$  (analogamente para  $D^-(S)$ ). Verifica-se que  $S \subset D^+(S) \subset \Gamma^+(S)$ . Assim, se tivermos informação sobre as «condições iniciais» em  $S$ , devemos ser capazes de prever o que acontecerá em  $p \in D^+(S)$ . Se  $p \in \Gamma^+(S)$  mas  $p \notin D^+(S)$ , será possível mandar um sinal para  $p$  sem influenciar  $S$  e o conhecimento de condições em  $S$  não será suficiente para determinar as condições em  $p$  (ver figura 3.4). Da mesma forma, se tivermos informação sobre as «condições iniciais» em  $S$ , devemos ser capazes de prever o que aconteceu em  $q \in D^-(S)$ . O domínio de dependência de  $S$  é definido por  $D(S) = D^+(S) \cup D^-(S)$ , representando o conjunto completo nos quais as condições físicas devem ser determinadas por um conhecimento das condições em  $S$ .

Fisicamente, seria de esperar que regiões singulares, ‘buracos’ no espaço-tempo deverão deixar uma ‘sombra’ removida do domínio de dependência correspondendo ao facto de que informação pode ser emitida pelo ‘buraco’ influenciando a física na região de ‘sombra’, informação essa que não foi registada em  $S$  (ver figura 3.5). Da mesma forma, seria de esperar que regiões com violações de causalidade também sejam removidas, uma vez que curvas causais fechadas permitem a propagação de sinais sem serem registados em  $S$ . Estas ideias intuitivas podem ser expressas de uma forma mais precisa.

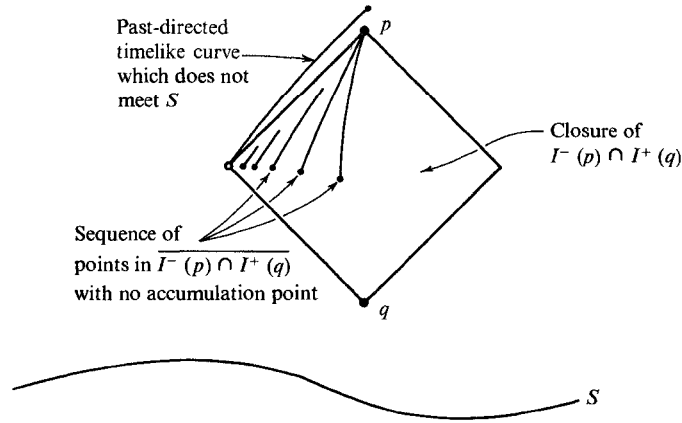
Se  $p \in \text{int}[D^+(S)]$ , pode mostrar-se que se um ponto  $q$  está no futuro de  $S$  e precede  $p$ , então  $q \in \text{int}[D^+(S)]$ . Se  $p, q \in \text{int}[D^+(S)]$ , sendo que  $q$  precede  $p$ , então existe uma geodésica temporal de comprimento extremo de  $p$  a  $q$ . Esta propriedade é um corolário do facto do domínio de dependência ser internamente causalmente compacto, isto é, se  $p, q \in \text{int}[D^+(S)]$ , sendo que  $q$  precede  $p$ , então o fecho de  $\Gamma(p) \cap \Gamma^+(p)$  é compacto (ver figura). Isto corresponde à nossa afirmação anterior que o domínio de dependência deveria excluir «buracos».



**Figura 3.4** Domínio futuro de dependência do hiperbolóide passado no espaço-tempo de Minkowski (2 dimensões espaciais suprimidas). O ponto  $p$  não está contido em  $D^+(S)$  devido à existência da curva temporal dirigida para o passado representada.



**Figura 3.5** Domínio futuro de dependência de duas fatias do espaço-tempo de Minkowski (2 dimensões espaciais suprimidas). O ponto  $p$  não está contido em  $D^+(S)$  devido à existência da curva temporal dirigida para o passado representada.



**Figura 3.6** Sendo  $p, q \in \text{int}[D^+(S)]$ , se  $I^-(p) \cap I^+(q)$  não fosse compacto, poder-se-ia tomar uma sequência de pontos sem ponto de acumulação, e uma sequência de curvas que os ligam a  $p$ , levando à existência de uma curva temporal dirigida para o passado, de um ponto  $\in \text{int}[D^+(S)]$ , que não encontra  $S$  – uma contradição.

## Espaço-tempo globalmente hiperbólico

Um conjunto fechado acausal  $\Sigma$  diz-se uma superfície de Cauchy (global) se  $D(\Sigma) = \mathcal{M}$ . Daqui se retira que o bordo( $\Sigma$ ) =  $\emptyset$ , logo  $\Sigma$  é uma subvariedade  $C^0$  mergulhada em  $\mathcal{M}$ . Qualquer curva causal em  $\mathcal{M}$  intersecta  $\Sigma$  apenas uma vez.\* Por exemplo, o 3-plano  $t=0$  no espaço-tempo de Minkowski é uma superfície de Cauchy, enquanto que o hiperbolóide não é (ver figuras 3.4 e 3.5).

Um espaço-tempo que possua uma superfície de Cauchy diz-se um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Podemos então dizer que, num espaço-tempo que não seja globalmente hiperbólico, o conhecimento das condições ‘num determinado instante de tempo’ não é suficiente para determinar a história completa do espaço-tempo, ou seja, há uma perda de previsibilidade. Assim, em Relatividade Geral, a capacidade de prever o futuro está limitada tanto pela dificuldade de conhecer os dados iniciais de uma forma completa, como pelo facto que, mesmo que estes sejam conhecidos, poderão ser mesmo assim insuficientes. Da mesma forma que a noção de precedência levou à formulação da condição adicional (a impor sobre o espaço-tempo) de ausência de violações de causalidade, a noção de domínio de dependência leva à formulação da condição adicional de ausência de ‘violações de determinismo’. Iremos enumerar algumas propriedades de espaços-tempo globalmente hiperbólicos que nos serão úteis.

Considere-se um espaço-tempo  $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$  globalmente hiperbólico e sejam  $p, q \in \mathcal{M}$ . Seja  $C(p, q)$  o conjunto de curvas contínuas causais dirigidas para o futuro de  $p$  para  $q$ . Defina-se uma topologia  $\mathcal{T}$  em  $C(p, q)$ . Sejam  $U$  conjuntos abertos em  $\mathcal{M}$  e defina-se  $O(U) \subset C(p, q)$  como sendo o conjunto de todas as curvas causais de  $p$  a  $q$  contidas inteiramente em  $U$ . Um subconjunto  $O$  de  $C(p, q)$  será aberto se puder ser expresso como  $O = \bigcup O(U)$ . Pode então provar-se que:†

\* Um conjunto fechado acausal  $\Sigma$  diz-se uma superfície de Cauchy parcial se  $\text{bordo}(\Sigma) = \emptyset$ . Nenhuma curva causal em  $\mathcal{M}$  intersecta  $\Sigma$  mais do que uma vez.

† Ver, por exemplo, Wald (1984), cap.8.3 ou Hawking e Ellis (1973), cap.6.6.

- $C(p, q)$  é compacto;
- $J^-(p) \cap J^+(p)$  é compacto;
- $J^+(S)$  é fechado e  $J^+(S) = \overline{I^+(S)}$ , em que  $S \subset \mathcal{M}$  é um conjunto compacto;
- $J^+(\Sigma) \cap J^-(q)$  é compacto, sendo  $\Sigma$  uma superfície de Cauchy e  $q \in D^+(\Sigma)$ ;
- $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$  é estavelmente causal, podendo ser escolhida uma função de tempo global  $f$  tal que cada superfície de  $f$  constante é uma superfície de Cauchy.

Existem assim várias definições equivalentes de um espaço-tempo hiperbólico.

Nomeadamente, é um espaço-tempo que:

- possui uma superfície de Cauchy;
- é fortemente causal e  $J^-(p) \cap J^+(p)$  é compacto;
- é fortemente causal e  $C(p, q)$  é compacto para todos os  $p, q \in \mathcal{M}$ .

Serão os espaços-tempo realistas globalmente hiperbólicos? Mais tarde veremos que esta questão está intimamente ligada à conjectura da censura cósmica. Por agora, e no que se segue, quando nos referirmos a “um espaço-tempo globalmente hiperbólico”, podemos sempre substituir por “uma região da forma  $\text{int}[D(S)]$ ”, sendo  $S$  um conjunto fechado semi-espacial\*.

## Existência de geodésicas

Seja  $\mathcal{N}$  um conjunto globalmente hiperbólico. A importância desta propriedade para o estabelecimento dos teoremas de singularidades reside no facto de que, para  $p, q \in \mathcal{N}$ , com  $q \in J^+(p)$ , pode provar-se a existência de uma geodésica causal de  $p$  a  $q$  cujo comprimento é maior ou igual ao de qualquer curva causal de  $p$  a  $q$ . Este resultado é tão importante que convém analisá-lo com mais pormenor†.

O espaço  $C(p, q)$  tem um subconjunto denso‡  $C'(p, q)$  que consiste em todas as curvas temporais  $\lambda$  de  $p$  a  $q$ . O comprimento destas curvas é definido, como vimos

no capítulo 2, por  $L[\lambda] = \int_p^q (-g(\partial/\partial t, \partial/\partial t))^{\frac{1}{2}} dt$ . Esta função não é contínua em  $C'(p, q)$

uma vez que qualquer vizinhança de  $\lambda$  contém uma curva quase nula em ‘zig-zag’ de comprimento arbitrariamente pequeno§ (ver figura 3.7). Assim,  $L$  não é semi-contínua inferior mas pode provar-se que  $L$  é semi-contínua superior, isto é, para cada  $\lambda \in C'(p, q)$ , e dado um  $\varepsilon > 0$ , existe uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $\lambda$  tal que para todas as  $\lambda' \in \mathcal{U}$  tem-se

$$L[\lambda'] \leq L[\lambda] + \varepsilon.$$

Seja  $\mathcal{U}$  uma vizinhança de  $\lambda$  em  $C(p, q)$  e seja  $l(\mathcal{U})$  o limite superior mínimo dos comprimentos das curvas temporais em  $\mathcal{U}$  de  $p$  a  $q$ . Então define-se  $L[\lambda]$  como o limite inferior máximo de  $l(\mathcal{U})$  para todas as vizinhanças  $\mathcal{U}$  de  $\lambda$  em  $C(p, q)$ . Esta definição de

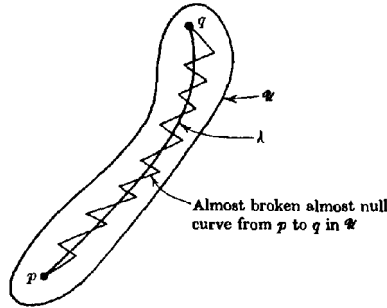
\* Isto porque, tal como se pode inferir das propriedades discutidas na secção anterior, se  $S$  é um conjunto fechado semi-espacial, então  $\text{int}[D(S)]$  é globalmente hiperbólico. Ver Hawking e Ellis (1973), props.6.6.3. e 6.6.7.

† Ver Hawking e Ellis (1973), cap.6.7.

‡ Isto é, qualquer curva temporal que liga  $p$  a  $q$  pode ser expressa como um limite, na topologia de  $C(p, q)$ , de uma sequência de curvas temporais  $C^1$ .

§ Devido à assinatura da métrica, o ‘zig-zag’ numa curva temporal reduz o seu comprimento.

comprimento funcionará para todas as curvas que tenham uma curva temporal  $C^1$  em qualquer vizinhança, ou seja, para todos os pontos em  $C(p, q)$  que estejam contidos no fecho de  $C'(p, q)$ .



**Figura 3.7**  $\mathcal{U}$  é uma vizinhança aberta da curva temporal  $\lambda$  de  $p$  a  $q$ . Existem, em  $\mathcal{U}$ , curvas temporais de  $p$  a  $q$  que se aproximam a curvas nulas quebradas e que têm comprimento arbitrariamente pequeno.

Pode então provar-se<sup>\*</sup> que para pontos  $p$  e  $q$  contidos numa vizinhança normal convexa (ver capítulo 2) que possam ser unidos por uma curva causal, a curva com comprimento máximo será a (única) geodésica causal que liga  $p$  a  $q$ . No caso dos pontos não pertencerem a uma vizinhança normal convexa, mostra-se que, para que a curva tenha o comprimento máximo, é necessário que seja uma geodésica ‘não quebrada’ pois, caso contrário, uma pequena variação produziria uma curva maior. Nesse caso, dir-se-ia que a geodésica não é máxima.<sup>†</sup>

Assim, se  $\overline{C'(p, q)}$  não for vazio conterá, então, um ponto no qual  $L$  atinge o seu valor máximo, ou seja, existirá uma geodésica causal  $\gamma$  de  $p$  a  $q$  cujo comprimento será maior ou igual ao de qualquer outra curva. Pontos em  $C(p, q) - \overline{C'(p, q)}$  são geodésicas nulas não quebradas, cujo comprimento é definido como zero.

Podem obter-se resultados equivalentes quando consideramos uma congruência de geodésicas temporais ortogonais a uma hipersuperfície espacial<sup>‡</sup>,  $\mathcal{H}$ . Neste caso, a condição para que a curva tenha o comprimento máximo é que seja uma geodésica ‘não quebrada’ ortogonal a  $\mathcal{H}$ .

## Horizontes de Cauchy

Define-se horizonte de Cauchy futuro,  $H^+(S)$ , como  $H^+(S) = \overline{D^+(S)} - I[D^+(S)]$ . É o conjunto de todos os pontos que estão em  $D^+(S)$  mas que não precedem nenhum ponto de  $D^+(S)$ , ou seja, o horizonte de Cauchy futuro é a ‘fronteira futura’ de  $D^+(S)$  (analogamente para o horizonte de Cauchy passado) e marca o limite da região que pode ser prevista com base no conhecimento de dados em  $S$ . Um exemplo de horizonte de Cauchy está representado na figura 3.4.  $H^+(S)$  é fechado, uma vez que resulta da

<sup>\*</sup> Ver Hawking e Ellis (1973), prop.4.5.3.

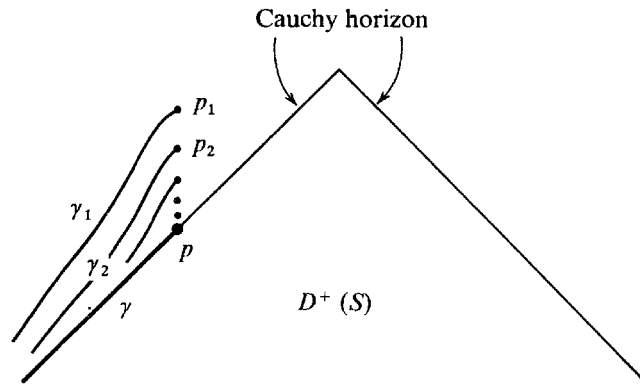
<sup>†</sup> No capítulo 5, voltaremos a este tópico e veremos que o facto de uma geodésica ser máxima está intimamente ligada com a noção de pontos conjugados.

<sup>‡</sup> Ver capítulo 6 para uma caracterização destas.

intersecção entre dois conjuntos fechados,  $\overline{D^+(S)}$  e  $\mathcal{M} - \Gamma[D^+(S)]$  e é semi-espacial, uma vez que  $\Gamma[H^+(S)] (= \Gamma[D^+(S)] ) \cap H^+(S) = \emptyset$ .

O horizonte de Cauchy é definido por  $H^+(S) \cup H^-(S)$  e é uma medida da falha de  $S$  em ser uma superfície de Cauchy, uma vez que uma hipersuperfície  $S$  é uma superfície de Cauchy se, e só se, os horizontes de Cauchy passado e futuro forem ambos vazios.

Assim, se quisermos provar que  $S$  é uma superfície de Cauchy, parte-se do princípio que existe um horizonte de Cauchy não vazio, e tenta-se usar as propriedades deste horizonte para encontrar uma contradição. Uma das mais importantes dessas propriedades\* é que o horizonte de Cauchy é nulo, no seguinte sentido: qualquer ponto  $p \in H^+(S)$  pertence a uma geodésica nula  $\gamma$  contida inteiramente em  $H^+(S)$ , sendo inextensível para o passado ou tendo um ponto final passado no bordo de  $S$  (ver figura 3.8).



**Figura 3.8** Construção de uma geodésica nula no horizonte de Cauchy. Os pontos  $p_i$  aproximam-se de  $p$ , e  $\gamma$  é uma curva limite das curvas temporais, dirigidas para o passado, estendidas de forma máxima, que nunca entram em  $D^+(S)$ .

---

\* Ver Wald, teorema 8.3.5 ou Hawking e Ellis (1973), prop.6.5.3.



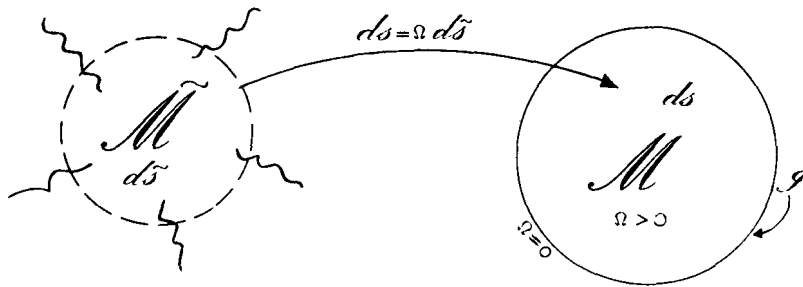
## 4. Comportamento assimpptótico

O estudo do comportamento assimpptótico de um espaço-tempo é o estudo do comportamento ‘na vizinhança do infinito’. A ideia é formalizar um conceito de ‘pontos no infinito’ de modo que eles possam ser englobados no espaço-tempo de uma forma consistente e rigorosa. Estes ‘pontos no infinito’ formarão uma espécie de hipersuperfície constituindo a fronteira do espaço-tempo. Assim, o comportamento assimpptótico não será diferente, na sua essência, do comportamento em qualquer hipersuperfície finita. Esta noção matemática será fundamental para caracterizar o horizonte de eventos, um conceito fundamental na questão da censura cósmica e formação de buracos negros. Neste capítulo, iremos usar o exemplo do espaço-tempo de Minkowski para chegar à descrição de propriedades gerais no ‘infinito’, e depois regressar às soluções exactas das equações de Einstein, a de Schwarzschild e a de Reissner-Nordström.

### *Estrutura conforme do espaço-tempo de Minkowski*

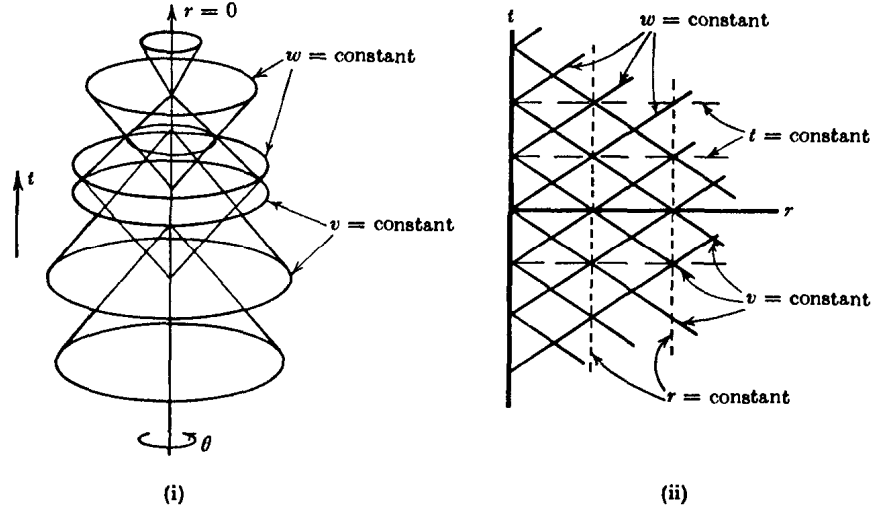
A ferramenta básica neste estudo é o da transformação conforme do espaço-tempo. Esta transformação preserva razões entre distâncias locais infinitesimais ou, de forma equivalente, as posições dos cones de luz.

Seja  $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g}_{ab})$  um espaço-tempo com métrica  $d\tilde{s}$ . A ideia é construir outra variedade  $\mathcal{M}$  ‘não física’ com uma fronteira  $\mathcal{I}$  e métrica  $ds$ , de modo que  $ds = \Omega d\tilde{s}$  (sendo  $\Omega$  um factor conveniente) e que o ‘infinito’ de  $\tilde{\mathcal{M}}$  é representado pela hipersuperfície ‘finita’  $\mathcal{I}$  (ver figura). Esta última propriedade é expressa pela condição que  $\Omega = 0$  em  $\mathcal{I}$ , ou seja, a métrica em  $\mathcal{I}$  é esticada por uma factor infinito na passagem de  $\mathcal{M}$  para  $\tilde{\mathcal{M}}$  de forma que  $\mathcal{I}$  é aplicada no infinito. As propriedades assimpptóticas de  $\tilde{\mathcal{M}}$  e de campos em  $\tilde{\mathcal{M}}$  podem ser agora investigadas estudando  $\mathcal{I}$  e o comportamento local dos campos em  $\mathcal{I}$ , desde que todos os conceitos relevantes possam ser expressos de uma forma covariante e conforme.



**Figura 4.1** O espaço-tempo infinito  $\tilde{\mathcal{M}}$  é aplicado num espaço-tempo ‘finito’ conformemente equivalente  $\mathcal{M}$ , com fronteira  $\mathcal{I}$  correspondendo ao ‘infinito’ de  $\tilde{\mathcal{M}}$ .

Consideremos o caso do espaço-tempo de Minkowski. Usando as chamadas coordenadas nulas avançada e retardada  $v = t+r$  e  $w = t-r$  ( $\Rightarrow v \geq w$ ), a métrica de Minkowski vem transformada em  $d\tilde{s}^2 = -dv dw + \frac{1}{4}(v-w)^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ , onde  $-\infty < v < \infty$ ,  $-\infty < w < \infty$ . A ausência de termos em  $dv^2$  e  $dw^2$  na métrica indica que as superfícies  $\{v = \text{constante}\}$ ,  $\{w = \text{constante}\}$  são nulas, isto é,  $v_{;\alpha}v_{;\beta}g^{\alpha\beta} = 0 = w_{;\alpha}w_{;\beta}g^{\alpha\beta}$  (ver figura 4.2(ii)). Assim, as coordenadas nulas  $v(w)$  podem ser encaradas como ondas esféricas dirigidas para dentro (fora) viajando à velocidade da luz (ver figura 4.2(i)).



**Figura 4.2** Espaço-tempo de Minkowski em coordenadas  $v, w$ .

- (i) As superfícies coordenadas de  $v, w$  (uma dimensão suprimida); a intersecção de uma superfície  $\{v = \text{constante}\}$  com uma superfície  $\{w = \text{constante}\}$  é uma 2-esfera.
- (ii) o plano  $(t, r)$ ; cada ponto representa uma 2-esfera de raio  $r$ .

Escolhendo um factor conforme conveniente  $\Omega = 2(1+v^2)^{-1/2}(1+w^2)^{-1/2}$  e definindo novas coordenadas nas quais os infinitos de  $v, w$  são transformados em valores finitos  $\tan p = v$ ,  $\tan q = w$ ,  $-\frac{1}{2}\pi < p < \frac{1}{2}\pi$ ,  $-\frac{1}{2}\pi < q < \frac{1}{2}\pi$  (e  $p \geq q$ ), a métrica física toma a forma  $d\tilde{s}^2 = \sec^2 p \sec^2 q \{-4 dp dq + \sin^2(p-q)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\}$ . A métrica ‘não física’ pode ser reduzida a uma forma mais usual definindo  $t' = p + q$ ,  $r' = p - q$ , obtendo-se

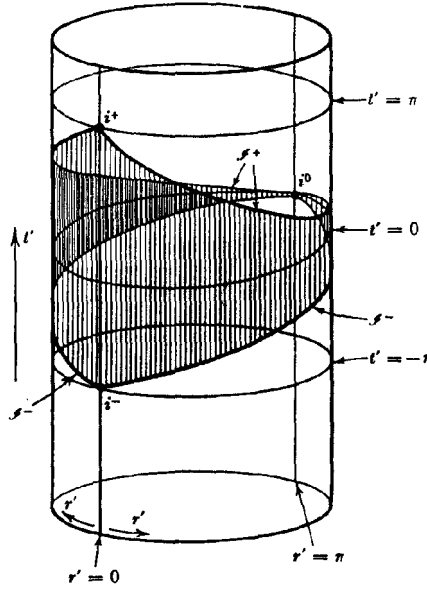
$$ds^2 = -(dt')^2 + (dr')^2 + \sin^2 r' (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (4.1)$$

onde

$$-\pi < t' + r' < \pi, \quad -\pi < t' - r' < \pi \quad (r' \geq 0) \quad (4.2)$$

Esta métrica é localmente idêntica à do universo estático de Einstein, que é um espaço-tempo homogêneo. Pode estender-se analiticamente (4.1) a todo o universo estático de Einstein, isto é, pode estender-se as coordenadas de modo a cobrirem toda a variedade  $R^1 \times S^3$ , onde  $-\infty < t' < \infty$  e  $r, \theta$  e  $\varphi$  são coordenadas em  $S^3$ . Suprimindo duas dimensões, podemos representar o universo estático de Einstein como um cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  mergulhado num espaço-tempo de Minkowski 3-dimensional. Vemos então que o espaço-tempo de Minkowski é conforme à região (4.2) do universo estático de Einstein, isto é, à região sombreada da figura 4.3. A fronteira desta região pode ser encarada como representando a estrutura conforme do infinito do espaço-tempo de Minkowski e consiste nas superfícies  $p = \frac{1}{2}\pi$  (denominada  $\mathcal{I}^+$ ) e  $q = -\frac{1}{2}\pi$  (denominada  $\mathcal{I}^-$ )

conjuntamente com os pontos  $p=\frac{1}{2}\pi$ ,  $q=\frac{1}{2}\pi$  (denominado  $i^+$ ),  $p=\frac{1}{2}\pi$ ,  $q=-\frac{1}{2}\pi$  (denominado  $i^0$ ) e  $p=-\frac{1}{2}\pi$ ,  $q=-\frac{1}{2}\pi$  (denominado  $i^-$ ).



**Figura 4.3** O universo estático de Einstein representado como um cilindro mergulhado; as coordenadas  $\theta$  e  $\varphi$  foram suprimidas. Cada ponto representa metade de uma 2-esfera de área  $4\pi\sin^2 r'$ . A região sombreada é conforme à totalidade do espaço-tempo de Minkowski.

As características destes pontos e superfícies podem ser resumidas da seguinte forma:

$$\left. \begin{array}{l} q = -\frac{1}{2}\pi \\ p = \frac{1}{2}\pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} w \rightarrow -\infty \\ v \rightarrow \infty \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r \rightarrow \infty \\ t \text{ finito} \end{array} \right\} \infty \text{ espacial, } i^0$$

$$\left. \begin{array}{l} q = \frac{1}{2}\pi \\ p = \frac{1}{2}\pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} w \rightarrow +\infty \\ v \rightarrow +\infty \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t \rightarrow +\infty \\ r \text{ finito} \end{array} \right\} \infty \text{ temporal futuro, } i^+$$

$$\left. \begin{array}{l} q = -\frac{1}{2}\pi \\ p = -\frac{1}{2}\pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} w \rightarrow -\infty \\ v \rightarrow -\infty \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} t \rightarrow -\infty \\ r \text{ finito} \end{array} \right\} \infty \text{ temporal futuro, } i^-$$

$$\left. \begin{array}{l} q = -\frac{1}{2}\pi \\ p \neq \pm\frac{1}{2}\pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} w \rightarrow -\infty \\ v \text{ finito} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r \rightarrow \infty \\ t \rightarrow -\infty \\ r+t \text{ finito} \end{array} \right\} \infty \text{ nulo passado, } \mathcal{F}^-$$

$$\left. \begin{array}{l} q \neq \pm\frac{1}{2}\pi \\ p = \frac{1}{2}\pi \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} w \text{ finito} \\ v \rightarrow \infty \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} r \rightarrow \infty \\ t \rightarrow \infty \\ r-t \text{ finito} \end{array} \right\} \infty \text{ nulo futuro, } \mathcal{F}^+$$

Daqui podemos ver que qualquer geodésica temporal dirigida para o futuro (respectivamente, passado) se aproxima de  $i^+$  ( $i^-$ ) para valores positivos (respectivamente, negativos) do seu parâmetro afim indefinidamente grandes, de modo que podemos encarar essa geodésica como começando em  $i^-$  e terminando em  $i^+$ . Da mesma forma, podemos encarar as geodésicas nulas como começando em  $\mathcal{I}^-$  e terminando em  $\mathcal{I}^+$  (ver figura 4.4(i)), enquanto que as geodésicas espaciais começam e terminam em  $i^0$ .<sup>\*</sup> As superfícies  $\{t = \text{constante}\}$  são superfícies de Cauchy; intersectam todas as geodésicas temporais e nulas e chegam sempre à fronteira em  $i^0$  (ver figura 4.4(ii)).

Também é possível representar a estrutura conforme do infinito desenhando um diagrama do plano  $(t', r')$ . Tal como na figura 4.2(ii), cada ponto deste diagrama representa uma esfera  $S^2$  e as geodésicas nulas radiais são representadas por linhas rectas a  $\pm 45^\circ$ . De facto, a estrutura do infinito de qualquer espaço-tempo esfericamente simétrico pode ser representado por um diagrama deste tipo, chamado diagrama de Carter-Penrose ( $CP^\dagger$ ). Nestes diagramas, representaremos o infinito por linhas finas, a origem das coordenadas polares por linhas a tracejado e singularidades da métrica irremovíveis por linhas carregadas ou duplas.

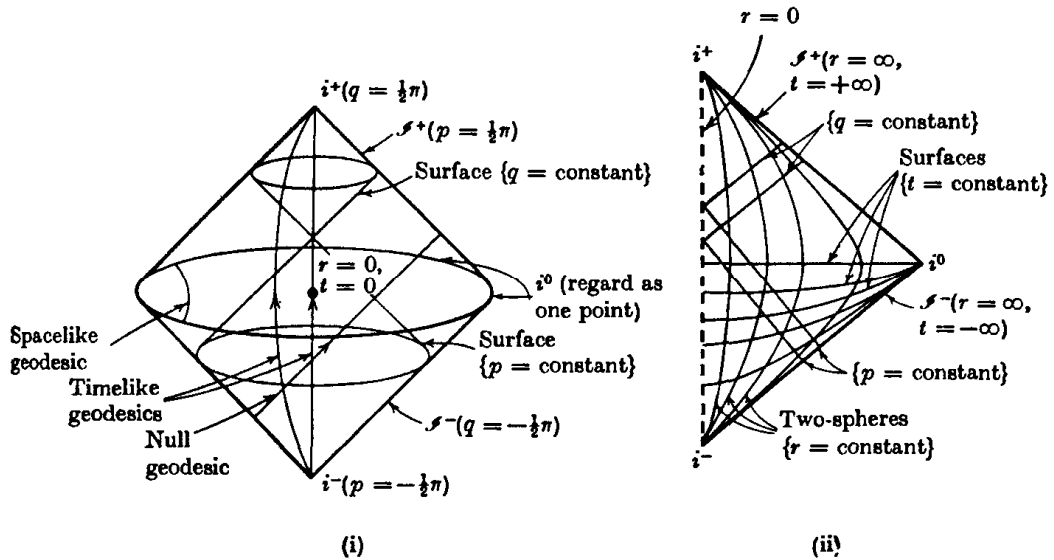


Figura 4.4

- (i) A região sombreada da figura 4.3, com apenas uma dimensão suprimida, representando o espaço-tempo de Minkowski e o seu infinito conforme.
- (ii) O diagrama de Carter-Penrose para o espaço-tempo de Minkowski; cada ponto representa uma 2-esfera, com a excepção de  $i^+$ ,  $i^-$  e  $i^0$ , cada um dos quais é um ponto, e pontos na linha  $r=0$  (onde as coordenadas polares são singulares).

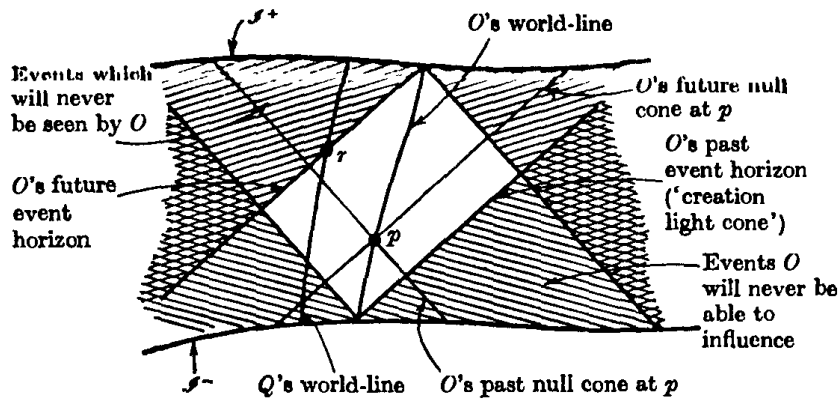
<sup>\*</sup> É de notar que as curvas não geodésicas não obedecem a estas regras; por exemplo, curvas não geodésicas temporais podem começar em  $\mathcal{I}^-$  e terminar em  $\mathcal{I}^+$ .

<sup>†</sup> Em inglês, estas iniciais também coincidem com a designação *Conformal Projection*.

## Horizontes

Se se fizer o estudo, análogo ao que se acabou de fazer, para o espaço-tempo de de Sitter\*, chega-se à conclusão que†, neste caso, o diagrama de Carter-Penrose, obtido com uma transformação conveniente de coordenadas, tem infinitos (futuro e passado) do tipo espacial para geodésicas temporais e nulas, ao contrário do que acontecia no caso do espaço-tempo de Minkowski. Esta diferença leva à existência de horizontes (para famílias de observadores que se movem em geodésicas), um conceito cuja importância é difícil de sobrevalorizar.

Consideremos uma curva temporal  $\gamma$  em  $\mathcal{M}$ . Então o horizonte de partículas de  $\gamma \equiv \dot{I}^+(\gamma)$  e o horizonte de eventos de  $\gamma \equiv \dot{I}^-(\gamma)$ , ou seja, para um observador, num instante  $t_0$ , o horizonte de partículas é a hipersuperfície que divide as partículas que já foram observadas pelo observador até ao instante  $t_0$  daquelas que ainda não o foram, enquanto que o horizonte de acontecimentos (futuro) é a hipersuperfície que divide os eventos que serão observados pelo observador (em algum instante) daqueles que nunca o serão. Se  $\gamma$  tiver um ponto final futuro  $F$ , então o seu horizonte de eventos será simplesmente  $\dot{I}^-(F)$ ; se  $\gamma$  tiver um ponto final passado  $P$ , então o seu horizonte de partículas será simplesmente  $\dot{I}^+(P)$ . Estes casos são os chamados casos triviais. Um exemplo de um espaço-tempo sem horizontes triviais é o universo estático de Einstein. O espaço-tempo de Minkowski tem, no entanto, horizontes não triviais, nomeadamente no caso em que  $\gamma$  representa a curva de um observador com aceleração constante.‡ Existem exemplos de espaços-tempo com horizontes de partículas e de eventos não triviais, aplicados a geodésicas, se estes tiverem um infinito conforme do tipo espacial (ver figuras 4.5 e 4.6).

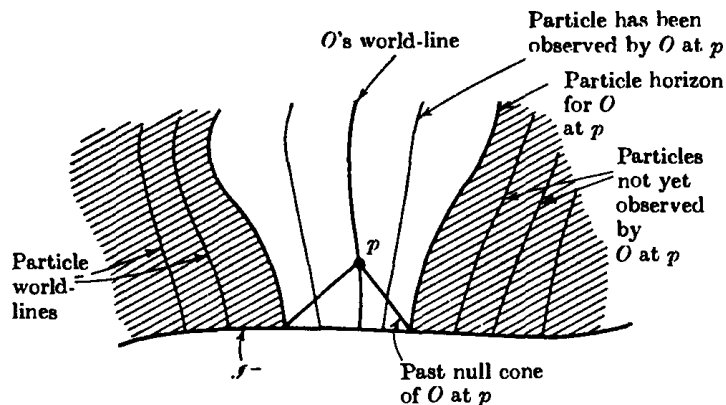


**Figura 4.5** Se  $\mathcal{F}^+$  é espacial, qualquer curva temporal possui um horizonte de acontecimentos futuro; se  $\mathcal{F}^-$  é espacial, qualquer curva temporal possui um horizonte de acontecimentos passado.

\* O espaço-tempo de de Sitter é o espaço-tempo de curvatura constante em que  $R > 0$  (enquanto que o de Minkowski tem  $R = 0$ ) e pode ser 'visualizado' como um hiperbolóide mergulhado num espaço plano 5-dimensional com métrica lorentziana.

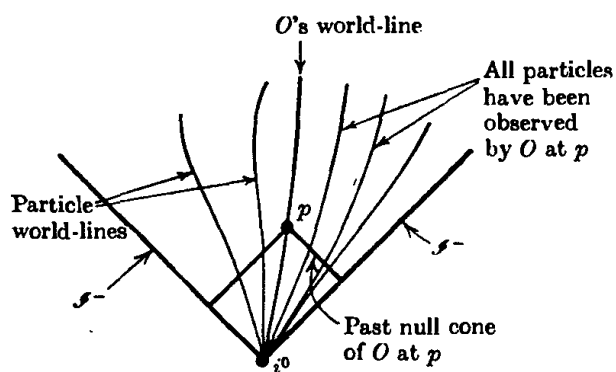
† Ver Hawking e Ellis (1973), pp. 124-34.

‡ Se introduzirmos coordenadas  $X, Y, Z, T$  tais que  $x = X, y = Y, z = Z \cosh T, t = Z \sinh T, ds^2 = -Z^2 dT^2 + X^2 + Y^2 + Z^2$  e se considerarmos  $X = Y = 0, Z = \text{const.} > 0$ , então  $z = t$  será um horizonte de eventos e  $z = -t$  será um horizonte de partículas. Ver figura 4.8.

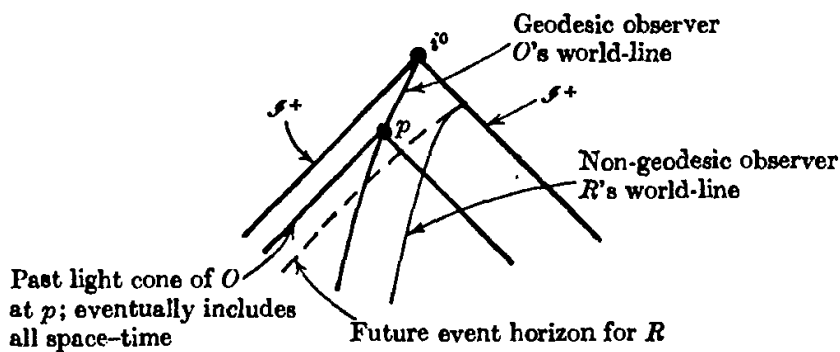


**Figura 4.6** Se  $\mathscr{F}^-$  é espacial, qualquer curva temporal possui um O horizonte de partículas definido por uma congruência de curvas.

Pelo contrário, nenhuma geodésica temporal tem, no espaço-tempo de Minkowski, horizontes de partículas ou de acontecimentos (ver figuras 4.7 e 4.8).

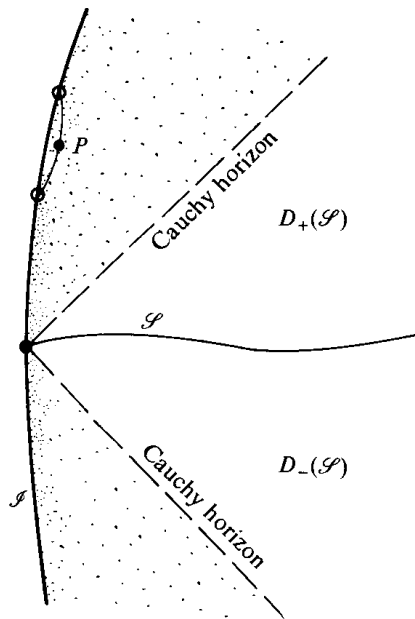


**Figura 4.7** Se  $\mathscr{F}^-$  é nula, não existe um horizonte de partículas.



**Figura 4.8** Se o infinito futuro consiste numa  $\mathscr{F}^+$  nula e  $i^0$ , não existe um horizonte de acontecimentos para um observador geodésico  $O$ . No entanto, um observador acelerado  $R$  tem um horizonte de acontecimentos (futuro)

Se recordarmos a definição de superfície e horizonte de Cauchy dadas no capítulo anterior, é possível ver que um espaço-tempo  $\mathcal{M}$  com um infinito conforme  $\mathcal{I}$  do tipo temporal não será um espaço-tempo globalmente hiperbólico, ou seja, qualquer  $\mathcal{S}$  que seja um conjunto fechado semi-espacial, falhará em ser uma superfície de Cauchy (ver figura 4.9). Qualquer ponto  $P$  perto de  $\mathcal{I}$  pertence a curvas temporais dirigidas para o futuro e para o passado que atingem  $\mathcal{I}$  numa região perto de  $P$ . Assim, qualquer  $\mathcal{S}$  candidata a superfície de Cauchy teria de se aproximar de  $P$ . Como isto se pode aplicar a todos os pontos próximos de  $\mathcal{I}$ , alguns dos quais terão uma separação do tipo temporal entre eles, vemos que qualquer  $\mathcal{S}$  falhará em intersectar todas as curvas temporais inextensíveis em  $\mathcal{M}$ , logo não existe uma superfície de Cauchy e  $H^+(\mathcal{I}) \cup H^-(\mathcal{I})$  será um conjunto não vazio.



**Figura 4.9** Se  $\mathcal{I}$  é temporal, qualquer conjunto semi-espacial possui um horizonte de Cauchy.

## **Pontos ideais do espaço-tempo**

Com o objectivo de tornar a noção de infinito mais precisa, de modo a poder abarcar a ocorrência de uma singularidade do espaço-tempo, Geroch, Kronheimer e Penrose introduziram, em 1972, o conceito de pontos ideais do espaço-tempo.\* Estes pontos podem ser encarados como ‘pontos-extra’ adicionados a um espaço-tempo  $\mathcal{M}$ , podendo tratar-se de ‘singularidades’ ou ‘pontos no infinito’, para os quais as curvas temporais em  $\mathcal{M}$  sem limite no futuro adquirem pontos finais ideais no futuro, assim como as curvas temporais sem limite no passado adquirem pontos finais ideais no

---

\* Aqui seguiremos Penrose (1979) e Penrose (1998).

passado. Consegue-se isto usando os conceitos de conjunto passado (e futuro) indecomponível terminal.\*

Diz-se que um subconjunto de  $\mathcal{M}$  é um conjunto passado quando é igual ao seu próprio passado cronológico. Se este conjunto não puder ser expresso como a união de dois outros conjuntos passados (em que nenhum dos quais conteria o outro), então diz-se um passado indecomponível. Pode mostrar-se que os IPs são os passados de curvas temporais em  $\mathcal{M}$ , assim como os IFs são os seus futuros (diz-se que uma tal curva gera o IP ou IF em questão), que um subconjunto de  $\mathcal{M}$  é da forma  $\Gamma[\gamma]$  para uma curva temporal  $\gamma$  se, e só se, for um conjunto passado indecomponível e que  $\Gamma[\gamma]$  continua a ser um IP se  $\gamma$  for uma curva causal.†

Um IP é denominado de próprio – um PIP – se consistir no conjunto de pontos do passado cronológico de um ponto de  $\mathcal{M}$  (que seria o ponto final futuro de uma curva geradora). Um PIF é, analogamente, o futuro cronológico de um ponto de  $\mathcal{M}$ . Um TIP (TIF) é um IP que não é um PIP (PIF). TIPs e TIFs são então os chamados pontos ideais de  $\mathcal{M}$ , sendo as fronteiras dos primeiros os horizontes de acontecimentos e dos segundos, os horizontes de partículas (ver secção anterior). Dito de outra forma, se  $\gamma$  for uma curva causal, então  $\Gamma[\gamma]$  é assim um PIP,  $\Gamma(p)$ , se, e só se,  $\gamma$  tiver um ponto final futuro  $p$  e, consequentemente,  $\Gamma[\gamma]$  é um TIP se, e só se,  $\gamma$  for uma curva sem limite no futuro.

De modo a evitar situações patológicas, assume-se que  $\mathcal{M}$  distingue futuros e passados, isto é, que se  $p, q \in \mathcal{M}$  e  $p \neq q$ , então  $\Gamma(p) \neq \Gamma(q)$  e  $\Gamma^+(p) \neq \Gamma^+(q)$ ‡. Sejam  $\gamma$  e  $\gamma'$  duas curvas temporais em  $\mathcal{M}$  sem limite no futuro. Então  $\gamma$  e  $\gamma'$  têm o mesmo ponto final ideal futuro se, e só se,  $\Gamma(\gamma) = \Gamma(\gamma')$ . Da mesma forma, se  $\eta$  e  $\eta'$  forem duas curvas temporais em  $\mathcal{M}$  sem limite no passado, então têm o mesmo ponto final ideal passado se, e só se,  $\Gamma^+(\eta) = \Gamma^+(\eta')$  (ver figura 4.10).

É conveniente dividir os pontos ideais em duas classes: uma em que eles representem ‘pontos no infinito’ de  $\mathcal{M}$  e outra em que representam pontos ‘singulares’ de  $\mathcal{M}$ . A maneira mais simples de fazer esta distinção é dizer, por exemplo, que um TIP representa um ponto no infinito futuro – um  $\infty$ -TIP – quando uma curva temporal que o gera tem comprimento próprio infinito para o futuro, enquanto que os restantes TIPs serão designados singulares no sentido de qualquer curva temporal geradora ter comprimento próprio finito para o futuro. De uma forma análoga se distinguem  $\infty$ -TIFs e TIFs singulares.§

---

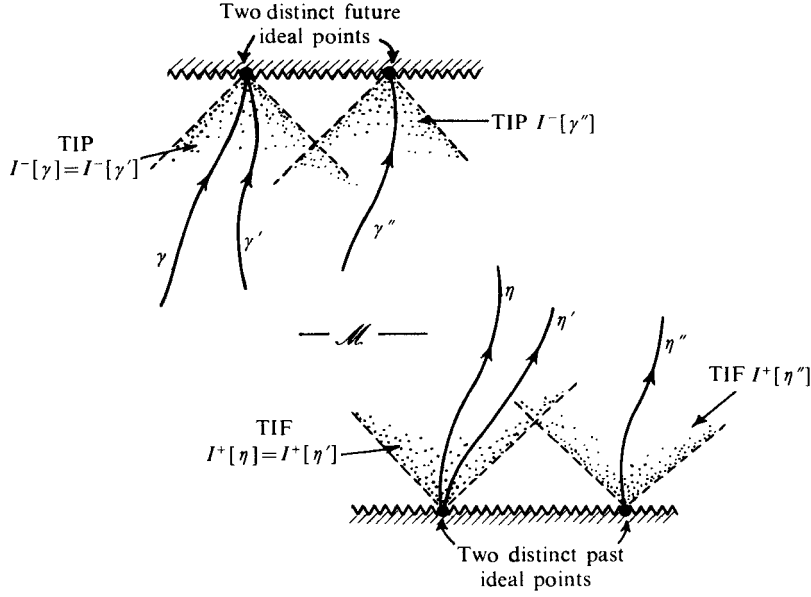
\* Em inglês, *terminal indecomposable past (future)-set*. Iremos, daqui para a frente, usar as siglas correspondentes TIP (TIF) para designar um passado (futuro) indecomponível terminal e IP (IF) para designar um passado (futuro) indecomponível.

† Ver Geroch, Kronheimer e Penrose (1972).

‡ Pode mostrar-se que estas condições são implicadas pela condição de causalidade forte. Ver Hawking e Ellis (1973), corolário à prop.6.4.6.

§ Embora esta distinção seja a mais simples, pode não ser a mais apropriada. De acordo com esta definição, pode ter-se um ‘ponto no infinito’ para o qual a curvatura do espaço-tempo diverge quando nos aproximamos dele. Seria razoável chamar a esse ponto ideal um ‘ponto singular no infinito’, mas seria um  $\infty$ -TIP ou  $\infty$ -TIF, como definidos aqui, e não um TIP ou TIF singular.





**Figura 4.10** TIPs e TIFs que definem pontos ideais de  $\mathcal{M}$  e que constituem a chamada fronteira causal de  $\mathcal{M}$ ,  $\partial\mathcal{M}$ , a união das fronteiras causal futura  $\partial^+\mathcal{M}$  (conjunto dos TIPs) e causal passada  $\partial^-\mathcal{M}$  (conjunto dos TIFs).

Existem uma série de teoremas que demonstram a utilidade dos pontos ideais na caracterização da estrutura causal do espaço-tempo. Por exemplo, pode definir-se uma superfície de Cauchy e um horizonte de Cauchy em termos destes pontos.\* No capítulo 9 será feita a caracterização de singularidades nuas (ver também capítulo seguinte) e a hipótese da censura cósmica em termos destes pontos.

## Espaços assintoticamente planos

De modo a se poder estudar sistemas físicos limitados, tais como estrelas, é conveniente investigar espaços que sejam assintoticamente planos, isto é, que, de uma forma geral, tenham métrica que se aproxime àquela do espaço-tempo de Minkowski para grandes distâncias do sistema. As soluções de Schwarzschild e Reissner-Nordström são exemplos de espaços-tempo que têm regiões assintoticamente planas. Como veremos, a estrutura conforme do infinito nulo destes espaços é similar à do espaço-tempo de Minkowski. Este facto levou Penrose a adoptar isto como a definição de um tipo de planura assintótica.

Um espaço-tempo orientável  $(\mathcal{M}, g)$  diz-se assintoticamente simples se existir um espaço-tempo fortemente causal  $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g})$  e um mergulho  $\theta: \mathcal{M} \rightarrow \tilde{\mathcal{M}}$ , que mergulha  $\mathcal{M}$  como uma variedade com fronteira suave  $\partial\mathcal{M}$  em  $\tilde{\mathcal{M}}$ , de modo que:

1. há uma função suave (pelo menos  $C^3$ )  $\Omega$  em  $\tilde{\mathcal{M}}$  tal que em  $\theta(\mathcal{M})$ ,  $\Omega$  é positiva e  $\Omega^2 g = \theta_*(\tilde{g})$ , isto é,  $\tilde{g}$  é conforme a  $g$  em  $\theta(\mathcal{M})$ ;

\* Ver Geroch, Kronheimer e Penrose (1972).

2. em  $\partial\mathcal{M}$ ,  $\Omega = 0$  e  $d\Omega \neq 0$ ;
3. qualquer geodésica nula em  $\mathcal{M}$  tem dois pontos finais em  $\partial\mathcal{M}$ .

Um espaço-tempo orientável  $(\mathcal{M}, g)$  diz-se assintoticamente simples e vazio se satisfizer as condições 1., 2. e 3. e

4.  $R_{\alpha\beta} = 0$  numa vizinhança aberta de  $\partial\mathcal{M}$  em  $\overline{\mathcal{M}} (\equiv \mathcal{M} \cup \partial\mathcal{M})$ .

A fronteira  $\partial\mathcal{M}$  pode ser encarada como estando no infinito, uma vez que qualquer parâmetro afim na métrica  $g$  numa geodésica nula em  $\mathcal{M}$  não tem valores limitados perto de  $\partial\mathcal{M}^*$ , e é uma hipersuperfície nula que consiste em duas componentes desconexas:  $\mathcal{I}^+$ , na qual as geodésicas nulas em  $\mathcal{M}$  têm os seus pontos finais futuros, e  $\mathcal{I}^-$ , na qual as geodésicas nulas em  $\mathcal{M}$  têm os seus pontos finais passados.

Pode provar-se que um espaço-tempo assintoticamente simples e vazio é globalmente hiperbólico e que nesse espaço-tempo  $\mathcal{I}^+$ ,  $\mathcal{I}^-$  e  $\mathcal{M}$  têm a mesma topologia que no espaço-tempo de Minkowski ( $R^1 \times S^2$  e  $R^4$ , respectivamente).<sup>†</sup>

Os espaços-tempo assintoticamente simples e vazios incluem o espaço-tempo de Minkowski e os espaços-tempo assintoticamente planos que contêm objectos limitados, tais como estrelas que não sofreram colapso gravitacional. No entanto, não incluem os espaços-tempo de Schwarzschild e Reissner-Nordström, uma vez que estes têm geodésicas nulas que não têm pontos finais em  $\mathcal{I}^+$  ou  $\mathcal{I}^-$ . Ainda assim, estes espaços-tempo têm regiões assintoticamente planas que são similares àquelas dos espaços assintoticamente simples e vazios.

Isto sugere que se defina um espaço-tempo  $(\mathcal{M}, g)$  como sendo fracamente assintoticamente simples e vazio se existir um espaço-tempo assintoticamente simples e vazio  $(\mathcal{M}', g')$  e uma vizinhança  $\mathcal{U}'$  de  $\partial\mathcal{M}'$  em  $\mathcal{M}'$  tal que  $\mathcal{U}' \cap \mathcal{M}'$  seja isométrico a um conjunto aberto  $\mathcal{U}$  de  $\mathcal{M}$ . Esta definição cobre os exemplos dados acima. Na realidade, no caso da solução de Reissner-Nordström (e também na de Kerr) existe uma sequência infinita de regiões assintoticamente planas  $\mathcal{U}$  que são isométricas a vizinhanças  $\mathcal{U}'$  de espaços-tempo assintoticamente simples. Assim haverá uma sequência infinita de infinitos nulos  $\mathcal{I}^+$  e  $\mathcal{I}^-$ . No entanto, se considerarmos apenas uma dessas regiões assintoticamente planas nesse espaço, podemos encarar  $(\mathcal{M}, g)$  como estando conformemente mergulhado num espaço-tempo  $(\tilde{\mathcal{M}}, \tilde{g})$  tal que uma vizinhança  $\mathcal{U}$  de  $\partial\mathcal{M}$  em  $\tilde{\mathcal{M}}$  é isométrica a  $\mathcal{U}'$  e a fronteira  $\partial\mathcal{M}$  consistirá de um único par de superfícies nulas  $\mathcal{I}^+$  e  $\mathcal{I}^-$ .

---

\* Isto porque um parâmetro afim  $v$  na métrica  $g$  está relacionado com um parâmetro  $\tilde{v}$  na métrica  $\tilde{g}$  por  $dv/d\tilde{v} = \Omega^{-2}$  e, como  $\Omega = 0$  em  $\partial\mathcal{M}$ , então  $\int dv$  diverge.

<sup>†</sup> Ver Hawking e Ellis (1973), págs. 223-4.

## Estrutura conforme do espaço-tempo de Schwarzschild

A métrica de Schwarzschild representa o espaço-tempo fora de um corpo esfericamente simétrico:  $ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2$ . Este espaço-tempo é estático\* e esfericamente simétrico†.

Normalmente, considera-se esta métrica para  $r$  maior do que um valor  $r_0=2M$  como sendo a solução fora de um corpo esférico, sendo que a métrica dentro do corpo ( $r < r_0$ ) terá uma forma diferente determinada pelo tensor de energia-momento da matéria do corpo. No entanto, é interessante ver o que acontece quando a métrica é encarada como uma solução de espaço vazio para todos os valores de  $r$ .

Se considerarmos a métrica acima, esta é singular quando  $r=0$  e  $r=2M$  e, uma vez que o espaço-tempo deve ser representado por uma variedade de métrica lorentziana, teríamos de remover estes pontos do espaço-tempo. Ora removendo a superfície  $r=2M$ , obteríamos um espaço-tempo desconexo, logo teríamos de escolher pela componente  $r > 2M$ . Pode, então, perguntar-se se este espaço-tempo é extensível quando  $r$  tende para  $2M$ . Um cálculo laborioso, mas directo, indica que, apesar da métrica ser singular em  $r=2M$  no sistema de coordenadas de Schwarzschild ( $t, r, \theta, \varphi$ ) nenhum escalar polinomial da curvatura e da métrica diverge quando  $r \rightarrow 2M$ .‡ Daqui se conclui que a singularidade em  $r=2M$  não é uma verdadeira singularidade, mas sim resultante de uma má escolha de coordenadas.

Para confirmar isto, e mostrar que  $\mathcal{M}$  pode ser estendido, define-se

$r^* \equiv \int \frac{dr}{1 - 2M/r} = r + 2M \log(r - 2M)$ . Então  $v \equiv t + r^*$  é uma coordenada nula avançada e

$w \equiv t - r^*$  é uma coordenada nula retardada. Usando as coordenadas  $(v, r, \theta, \varphi)$  a métrica toma a forma de Eddington-Finkelstein  $\mathbf{g}'$  dada por

$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dv^2 + 2dvdr + r^2d\Omega^2$ . A variedade  $\mathcal{M}$  é a região  $2M < r < \infty$ , mas esta

métrica é não singular e analítica na variedade  $\mathcal{M}'$  na qual  $0 < r < \infty$ . Assim, usando coordenadas diferentes, isto é, considerando uma variedade diferente, conseguimos estender a métrica de Schwarzschild de modo que já não é singular para  $r=2M$ , como se pode ver da comparação das figuras 4.11(i) e (ii).

Esta representação da métrica não é simétrica no tempo, o que seria de esperar pela presença do termo em  $dvdr$  e que é qualitativamente claro no diagrama de Finkelstein. A assimetria mais óbvia é que a superfície  $r=2M$  actua como uma membrana de um só sentido, uma vez que as curvas nulas ou temporais, dirigidas para o futuro, só a podem cruzar da região exterior ( $r > 2M$ ) para a região interior ( $r < 2M$ ).

Nenhuma curva nula ou temporal, dirigida para o passado, atravessa da região exterior para a interior. Nenhuma curva nula ou temporal, dirigida para o passado, dentro de  $r=2M$  se pode aproximar de  $r=0$ . No entanto, qualquer curva nula ou temporal, dirigida para o futuro, que achesse a superfície  $r=2M$  aproxima-se de  $r=0$  numa

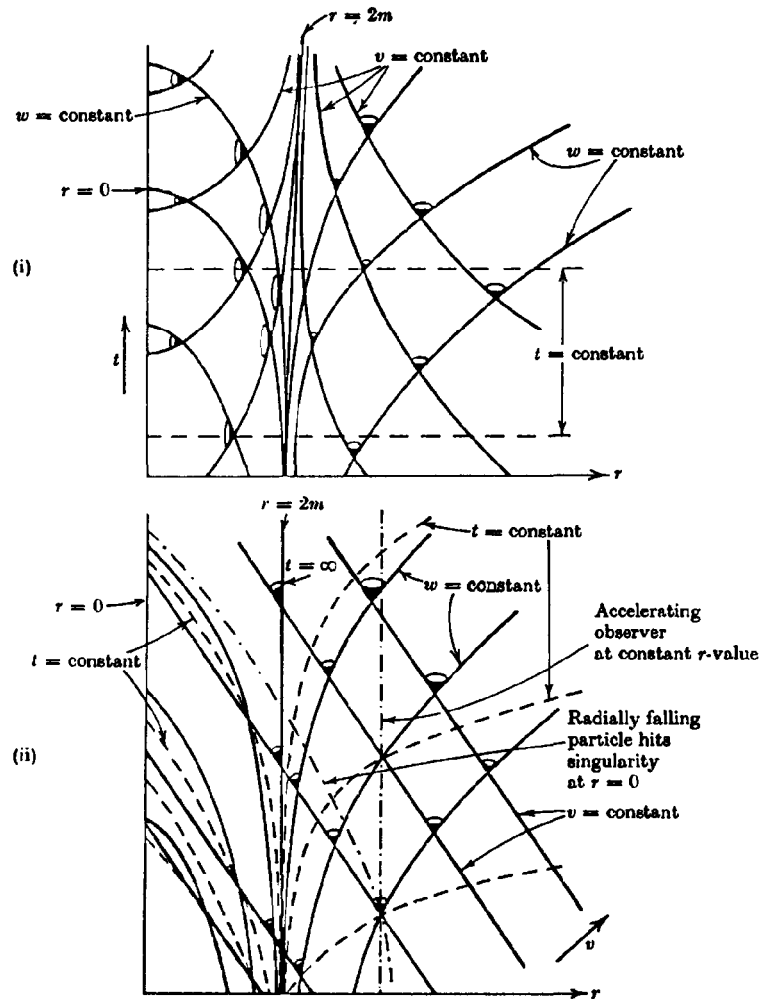
\* Isto é,  $\partial/\partial t$  é um vector de Killing do tipo temporal que é ortogonal a hipersuperfícies.

† Isto é, a métrica é invariante sob o grupo de isometrias  $SO(3)$  que operam nas 2-esferas do tipo espacial  $\{t, r \text{ constantes}\}$ .

‡ Por exemplo, o escalar  $R^{\alpha\beta\gamma\delta}R_{\alpha\beta\gamma\delta} = 48G^2M^2/r^6$ , indicando que o ponto  $r=0$  representa uma singularidade «honesta».

distância afim finita. Sendo  $r=0$  uma singularidade real, o par  $(\mathcal{M}', g')$  não pode ser estendido de uma forma  $C^2$  (ou mesmo  $C^0$ ) de modo a atravessar  $r=0$ .

Se tivesse sido usada a coordenada  $w$  em vez de  $v$ , a métrica tomaria a forma  $g''$  dada por  $ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dw^2 - 2dwdr + r^2d\Omega^2$ . Esta métrica é analítica na variedade  $\mathcal{M}''$  definida pelas coordenadas  $(w, r, \theta, \phi)$ ,  $0 < r < \infty$ . Mais uma vez, a variedade  $\mathcal{M}$  é a região  $2M < r < \infty$  e a nova região  $0 < r < 2M$  é isométrica à região  $0 < r < 2M$  da métrica de Schwarzschild, mas a isometria inverte a direcção do tempo. Na variedade  $\mathcal{M}''$ , a superfície  $r=2M$  é novamente uma superfície nula que actua como uma membrana de um só sentido. No entanto, desta vez actua na direcção oposta do tempo, isto é, as curvas nulas ou temporais, dirigidas para o passado, só a podem cruzar da região exterior ( $r > 2M$ ) para a região interior ( $r < 2M$ ).



**Figura 4.11** Secção  $(\theta, \phi)$  constante da solução de Schwarzschild.

(i) Singularidade aparente em  $r=2M$ , quando são usadas as coordenadas  $(t, r)$ .

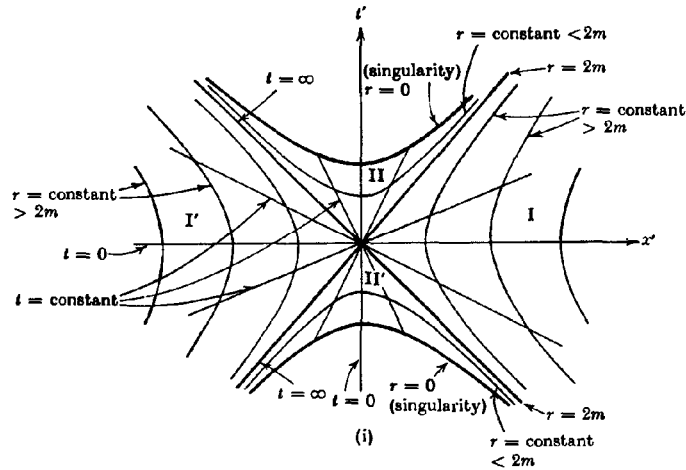
(ii) Diagrama de Finkelstein, obtido usando as coordenadas  $(t^* \equiv v-r, r)$ . Cada ponto representa uma 2-esfera de área  $4\pi r^2$ . as superfícies  $\{t=\text{constante}\}$  estão indicadas;  $t$  torna-se infinito para  $r=2M$ . Por cada ponto do diagrama passam 2 geodésicas nulas radiais: umas dirigidas para dentro, com  $dv=0$ , ou ao longo das rectas  $t^* = -r + \text{const}$  ( $v = \text{const}$ ), orientadas a  $45^\circ$  e que atingem  $r=0$ ; outras, dirigidas para fora, com declive variável  $dv/dr = 2/(1-2M/r)^{-1}$  ( $w = \text{const}$ ), propagando-se para o infinito, se  $r > 2M$ , e dirigidas para dentro, colapsando para  $r=0$ , se  $r < 2M$ .

Na realidade, é possível fazer ambas as extensões  $(\mathcal{M}', g')$  e  $(\mathcal{M}'', g'')$  simultaneamente; isto é, existe uma variedade  $\mathcal{M}^*$  com métrica  $g^*$  na qual  $(\mathcal{M}', g')$  e  $(\mathcal{M}'', g'')$  podem ser isometricamente mergulhados, de modo que coincidam na região  $r > 2M$  que é isométrica a  $(\mathcal{M}, g)$ . A construção desta variedade foi feita por Kruskal, em 1960. Considerando  $(\mathcal{M}, g)$  nas coordenadas  $(v, w, \theta, \varphi)$  a métrica toma a forma:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dvdw + r^2 d\Omega^2, \text{ em que } \frac{1}{2}(v - w) = r + 2M \log(r - 2M). \text{ Isto apresenta o}$$

espaço bidimensional  $(\theta, \varphi \text{ constantes})$  em coordenadas planas conformemente nulas. A transformação de coordenadas mais geral que deixa este espaço bidimensional expresso neste tipo de coordenadas é  $v' = v'(v)$  e  $w' = w'(w)$ , sendo estas funções arbitrárias  $C^1$ . Fazendo a transformação de coordenadas  $x' = \frac{1}{2}(v' - w')$  e  $t' = \frac{1}{2}(v' + w')$ , a métrica toma uma forma correspondente àquela obtida anteriormente para a métrica de Minkowski:  $ds^2 = F^2(t', x')(-dt'^2 + dx'^2) + r^2(t', x')d\Omega^2$ , sendo que a escolha das funções  $v', w'$  determina a forma precisa da métrica. A escolha de Kruskal foi  $v' = \exp(v/4M)$  e  $w' = -\exp(-w/4M)$ , sendo  $r$  determinado pela equação  $(t')^2 - (x')^2 = -(r - 2M)\exp(r/2M)$  e  $F$  dado por  $F^2 = 16M^2/r \exp(-r/2M)$ .

Na variedade  $\mathcal{M}^*$  definida pelas coordenadas  $(t', x', \theta, \varphi)$ , a representação da métrica é dada pelo diagrama de Kruskal (ver figura 4.12). A região I, definida por  $x' > |t'|$ , é isométrica a  $(\mathcal{M}, g)$ , a região na qual  $r > 2M$ . A região definida por  $x' > -t'$  (regiões I e II da figura) é isométrica à extensão avançada de Finkelstein  $(\mathcal{M}', g')$ . Da mesma forma, a região definida por  $x' < -t'$  (regiões I e II' da figura 4.12) é isométrica à extensão retardada de Finkelstein  $(\mathcal{M}'', g'')$ .

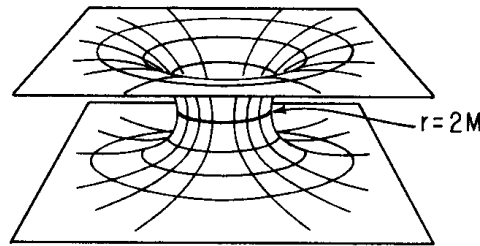


**Figura 4.12** Diagrama de Kruskal, representando a extensão analítica máxima de Schwarzschild. As coordenadas  $\theta, \varphi$  foram suprimidas. Estão representadas as regiões assintoticamente planas I e I' e as regiões II e II', nas quais  $r < 2M$ .

Qualquer curva nula ou temporal, dirigida para o futuro, que atravessasse a parte da superfície  $r = 2M$  representada aqui por  $t' = |x'|$  aproxima-se da singularidade

$t' = (2M + (x')^2)^{\frac{1}{2}}$ , onde  $r=0$ . Da mesma forma, qualquer curva nula ou temporal, dirigida para o passado, que atravessasse a parte da superfície  $r=2M$  representada aqui por  $t' = -|x'|$  aproxima-se de outra singularidade  $t' = -(2M + (x')^2)^{\frac{1}{2}}$ , onde  $r=0$ .

Existe também outra região  $I'$ , definida por  $x' < -|t'|$ , que também é isométrica à solução exterior de Schwarzschild  $(\mathcal{M}, g)$ . Esta pode ser encarada como outro universo assintoticamente plano no outro lado da ‘garganta’ de Schwarzschild (ver figura 4.13). Considere-se a secção  $t=0$ . As 2-esferas  $\{r=\text{constante}\}$  comportam-se como no espaço euclidiano quando  $r$  é grande; no entanto, para  $r$  pequenos, têm uma área que diminui até um valor mínimo ( $16\pi M^2$ ) crescendo novamente quando as esferas se expandem no outro espaço assintoticamente plano. Nenhuma curva temporal ou nula atravessa da região  $I$  para a região  $I'$ .



**Figura 4.13** A geometria espacial da hipersuperfície  $t=0$  do espaço-tempo de Schwarzschild, representado tal como apareceria se mergulhado num espaço plano. Uma dimensão foi suprimida, logo cada círculo representa uma 2-esfera. A parte da superfície acima da ‘garganta’ em  $r=2M$  na figura corresponde à região  $I$  da figura 4.12, enquanto que a parte da superfície abaixo da ‘garganta’ corresponde à região  $I'$  da figura 4.12.

A extensão de Kruskal  $(\mathcal{M}^*, g^*)$  é a única extensão analítica e localmente inextensível da solução de Schwarzschild. Pode construir-se o diagrama CP para esta extensão definindo novas coordenadas nulas avançadas e retardadas:  $v'' = \tan^{-1}(v'/\sqrt{2M})$  e  $w'' = \tan^{-1}(w'/\sqrt{2M})$ , em que  $-\pi < v'' + w'' < \pi$ ,  $-\frac{1}{2}\pi < v'' < \frac{1}{2}\pi$  e  $-\frac{1}{2}\pi < w'' < \frac{1}{2}\pi$ . Teremos infinitos futuro, passado e nulo para cada uma das regiões assintoticamente planas  $I$  e  $I'$  (ver figura 4.14).

Se considerarmos o cone de luz futuro de qualquer ponto exterior a  $r=2M$ , as geodésicas radiais dirigidas para fora chegam ao infinito enquanto que as dirigidas para dentro atingem a singularidade futura; se o ponto está na região interior a  $r=2M$ , ambas as famílias de geodésicas atingem a singularidade e o futuro da partícula acaba na singularidade. Este facto está intimamente ligado ao facto de que cada ponto da região  $II$  representa uma 2-esfera que é uma superfície prisioneira fechada\*. Cada ponto da região  $II'$  representa uma 2-esfera que é uma superfície prisioneira fechada com o sentido do tempo invertido, isto é, todas as partículas nesta região têm de ter as suas linhas de mundo a começar na singularidade.

\* Ver capítulo 5, onde definimos superfícies prisioneiras fechadas e onde veremos que a existência de singularidades lhe está intimamente ligada.

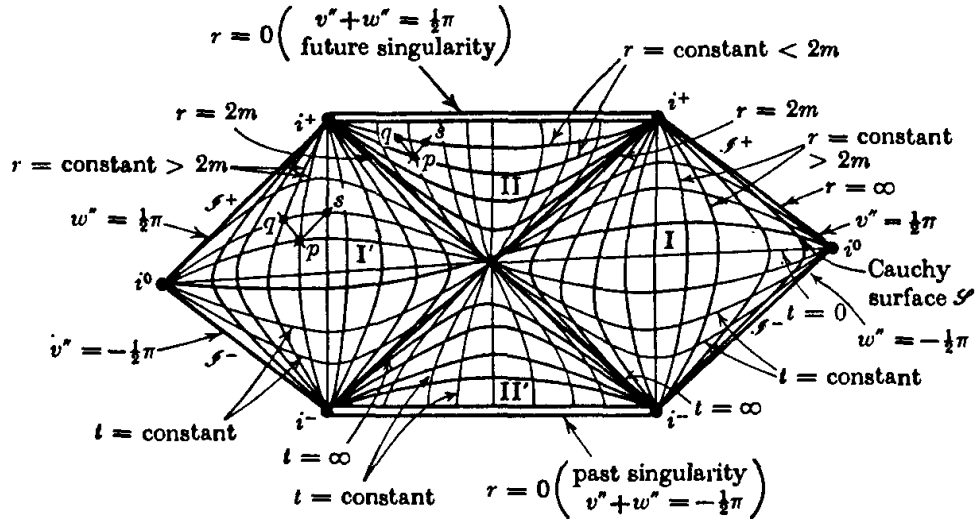


Figura 4.14 Diagrama de Carter-Penrose do espaço-tempo de Schwarzschild, mostrando o infinito conforme e as duas singularidades.

### Estrutura conforme do espaço-tempo de Reissner-Nordström

A solução de Reissner-Nordstrom representa o espaço-tempo no exterior de um corpo esfericamente simétrico e carregado com uma carga eléctrica,  $Q$ . É a única solução no vácuo das equações de Einstein-Maxwell esfericamente simétrica e assintoticamente plana e, em coordenadas  $(t, r, \theta, \phi)$ , toma a forma:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2.$$

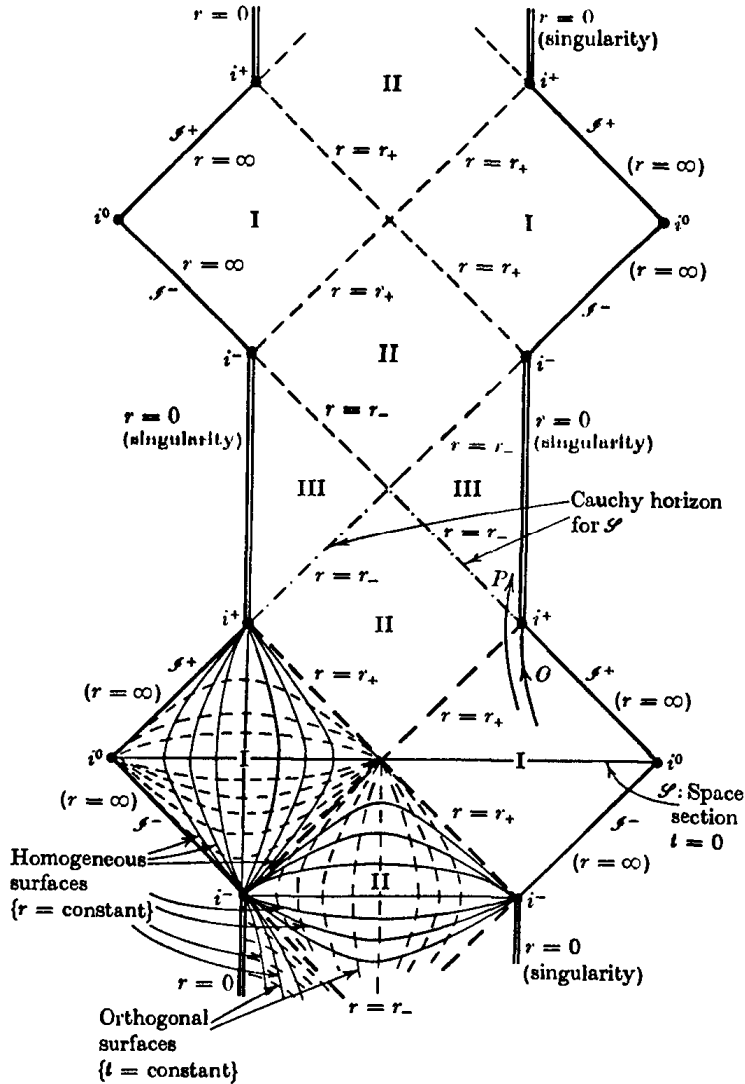
Considera-se normalmente esta métrica como sendo a solução fora de um corpo esférico, sendo que a métrica dentro do corpo terá uma forma diferente determinada pelo tensor de energia-momento da matéria do corpo. No entanto, mais uma vez é interessante ver o que acontece quando a métrica é encarada como uma solução de espaço vazio para todos os valores de  $r$ .

Se  $Q^2 > M^2$ , a métrica é não singular excepto na singularidade irremovível  $r=0$ , que pode ser encarada como a carga pontual que produz o campo. Se  $M^2 \geq Q^2$ , a métrica também tem singularidades em  $r_+$  e  $r_-$ , onde  $r_{\pm} = M \pm (M^2 - Q^2)^{\frac{1}{2}}$  e é regular nas regiões  $\infty > r > r_+$ ,  $r_+ > r > r_-$  e  $r_- > r > 0$  (se  $Q^2 = M^2$ , só a primeira e terceira regiões existem). Tal como no caso de Schwarzschild, estas singularidades podem ser removidas introduzindo coordenadas adequadas e estendendo a variedade de modo a obter uma extensão analítica máxima. Para se obter a extensão máxima, pode proceder-se por passos análogos àqueles da solução de Schwarzschild. Não apresentaremos aqui os pormenores.\*

O diagrama CP dessa extensão, no caso de  $Q^2 < M^2$ , é mostrado na figura 4.15. Existe um número infinito de regiões assintoticamente planas, onde  $r > r_+$ ; estas são designadas por I e são ligadas por regiões intermédias II e III onde  $r_+ > r > r_-$  e  $r_- > r >$

\* Ver, por exemplo, Hawking e Ellis (1973), pág.157. Alguns pormenores desta extensão serão também discutidos no capítulo 11.

0, respectivamente. Existem ainda singularidades irremovíveis nas regiões III mas, ao contrário do caso de Schwarzschild, são do tipo temporal e por isso podem ser evitadas por uma curva temporal dirigida para o futuro vinda da região I e que atravessasse  $r = r_+$ . Tal curva, passaria sucessivamente por regiões do tipo II, III e II, reemergindo noutra região assintoticamente plana I. Os diagramas CP para os restantes casos são apresentados na figura 4.16.



**Figura 4.15** Diagrama de Carter-Penrose para o espaço-tempo de Reissner-Nordstrom estendido de forma máxima ( $Q^2 < M^2$ ). Uma cadeia infinita de regiões assintoticamente planas I ( $\infty > r > r_+$ ) estão ligadas por regiões II ( $r_+ > r > r_-$ ) e III ( $r_- > r > 0$ ); cada região III é limitada por uma singularidade temporal em  $r=0$ .

Em todos estes casos, a singularidade é do tipo temporal. Nunca é de mais notar que este facto implica que curvas temporais e nulas podem sempre evitar as singularidades. De facto, as singularidades parecem ser repulsivas: nenhuma geodésica temporal as atinge, embora curvas temporais não geodésicas e geodésicas nulas radiais o façam. Da discussão numa secção anterior, podemos ver que o carácter das singularidades também implica que não existam superfícies de Cauchy nestes espaços:





## 5. Singularidades

Sabe-se, pelos estudos de Landau, Oppenheimer e Snyder, aperfeiçoados pela investigação de Harrison, Wheeler e Wakano, que uma estrela (não-rotativa) de mais de duas massas solares não tem uma configuração de equilíbrio a baixas temperaturas. Isto quer dizer que a estrela deve sofrer um colapso gravitacional quando esgota o seu combustível nuclear, se não conseguir ejectar matéria suficiente de modo a reduzir a sua massa abaixo de uma massa crítica. Se o colapso for esfericamente simétrico, a métrica no exterior da estrela é a de Schwarzschild e, mesmo que a estrela não seja estática, desde que se mantenha esfericamente simétrica, a solução exterior continuará a ser parte da solução de Schwarzschild cortada pela superfície da estrela.\* Depois da estrela passar para dentro do seu raio de Schwarzschild, então uma singularidade ocorrerá. No entanto, não é óbvio que será este o caso se existirem irregularidades ou uma pequena quantidade de momento angular. De facto, foi sugerido por vários autores que as singularidades eram o resultado das simetrias impostas nos problemas e não uma característica de uma situação física real. Será que as assimetrias nos salvarão da ocorrência de singularidades?

Em 1965 Penrose publicou um artigo que veio revolucionar a abordagem a este tipo de problemas e que veio impulsionar o começo da ‘era dourada’ do estudo de buracos negros. Neste, Penrose mostrou que a singularidade era inevitável, mesmo em soluções sem simetria exacta. Penrose usou o conceito de superfície prisioneira fechada<sup>†</sup> para construir um critério de ‘ponto sem retorno’ equivalente à superfície determinada pelo raio de Schwarzschild na solução esfericamente simétrica.

Neste capítulo iremos abordar alguns conceitos matemáticos usados no estabelecimento dos teoremas, os quais discutimos a seguir.

### ***Pontos singulares***

Na maior parte das áreas da Física lidamos com partículas, campos, etc. num espaço-tempo de Minkowski que serve como ‘pano de fundo’ para os acontecimentos físicos. Nestes casos, uma ‘singularidade’ tem uma definição natural: é um ponto do espaço-tempo onde uma grandeza física se torna infinita. Mas em Relatividade Geral o campo em estudo é a própria métrica do espaço-tempo. Esta teoria é estabelecida com base numa variedade com uma métrica lorentziana diferenciável (ver capítulo 1) por isso não podem existir pontos na variedade nos quais a métrica é singular. É através da métrica que podemos identificar pontos isolados como acontecimentos físicos logo não podemos isolar pontos, como acontecimentos físicos, quando a própria métrica tem um ‘mau comportamento’.

Em vez de se definir ‘pontos singulares’ como pontos onde a curvatura se torna arbitrariamente grande, parece então ser parte da teoria a necessidade de retirar estes pontos da variedade do espaço-tempo, não sendo possível definir neles as equações de campo. Assim, é preferível definir um espaço-tempo não singular como sendo uma variedade estendida de forma máxima na qual a métrica é suficientemente bem comportada. Como já vimos, a condição da totalidade das geodésicas causais ser

---

\* Este é o teorema de Birhoff. Ver prova em Hawking e Ellis (1973), apêndice B.

<sup>†</sup> *Closed trapped surface*, em inglês.

completa significa que qualquer geodésica temporal ou nula pode ser prolongada a valores arbitrariamente grandes do parâmetro afim, tanto para o futuro como para o passado.

Podemos então reconhecer a ocorrência de singularidades pela existência de geodésicas incompletas: um espaço-tempo será singular quando é geodesicamente incompleto para geodésicas temporais ou nulas e não pode ser mergulhado num espaço-tempo maior, isto é, se  $(\mathcal{M}, g)$  contém uma curva  $\gamma: [0, a] \rightarrow \mathcal{M}$  tal que não exista nenhuma extensão  $\theta: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}'$  para a qual  $\theta \circ \gamma$  é extensível. Intuitivamente, esta definição leva a que existam observadores em queda livre cuja história tenham um fim num tempo finito – certamente um comportamento ‘singular’. Formalmente, no entanto, esta definição tem deficiências.

Em primeiro lugar, podemos distinguir três tipos de ‘incompletude’ geodésica: aqueles que se referem a geodésicas temporais, nulas e espaciais. Poder-se-ia ter a esperança que uma variedade completa num destes aspectos, também o seria nos outros dois. Mas a verdade é que isso não é necessariamente assim, tal como o demonstram vários exemplos. O ponto de vista que normalmente se adopta é encarar o facto de um espaço-tempo ser geodesicamente completo quanto a geodésicas temporais e nulas\* (representando histórias de partículas materiais e de massa nula, respectivamente) como sendo uma condição mínima para que esse espaço-tempo seja considerado não singular.

No entanto, a classe de espaços-tempo t e n-geodesicamente incompletos não inclui tudo aquilo que considerariamos singular. Existem exemplos de espaços-tempo que são geodesicamente completos mas que contêm uma curva temporal de aceleração limitada† que é inextensível e tem comprimento finito. Um observador acelerado que seguisse esta curva durante um intervalo de tempo suficiente, deixaria de ser representado por um ponto da variedade. Ora isto leva-nos a pensar que temos de alargar o conceito de comportamento singular a mais do que o caso de observadores em queda livre a que se referem as geodésicas. Para se conseguir isto, é necessário uma generalização do conceito de parâmetro afim a todas as curvas  $C^1$ , geodésicas ou não. Poder-se-ia então definir uma curva completa exigindo que toda a curva  $C^1$  de comprimento finito (medido por esse parâmetro) tivesse um ponto final (ver capítulo 3).

Considere-se uma curva  $C^1 \lambda(t)$  com vector tangente  $V = (\partial/\partial t)_{\lambda(t)}$  e que passa por um ponto  $p \in \mathcal{M}$ . Seja  $\{E_a\}$  uma base de  $T_p$  que pode ser transportada paralelamente ao longo de  $\lambda(t)$  de modo a obter-se uma base de  $T_{\lambda(t)}$  para cada valor de  $t$ . O vector  $V$  pode ser então expresso em termos desta base como  $V = V^a(t)E_a$ , e podemos definir um parâmetro afim generalizado  $u$  em  $\lambda$  por  $u = \int_p \left( \sum_a V^a V^a \right)^{1/2} dt$ . Este parâmetro depende do ponto  $p$  e da base  $\{E_a\}$  em  $p$ . Se  $\{E'_a\}$  for outra base em  $p$  (definindo um parâmetro  $u'$ ) existe uma matriz não singular que relaciona as duas bases e que, como as bases são transportadas paralelamente, tem coeficientes constantes no tempo. Assim, o comprimento da curva é finito no parâmetro  $u$  se e só se for finito no parâmetro  $u'$ . Dizemos então que  $(\mathcal{M}, g)$  é b-completo‡ se existir um ponto final para toda a curva  $C^1$  de comprimento finito, medido por um parâmetro afim generalizado. Dizemos então que um espaço-tempo é não singular se for b-completo.

\* Que se abreviará dizendo que o espaço-tempo é t-geodesicamente completo e n-geodesicamente completo, respectivamente.

† Sendo  $V^a(\tau)$  o vector normalizado paralelo à curva, a aceleração é definida por  $A^a(\tau) = V^a{}_{;b} V^b$ , e existe um número positivo  $B$  tal que a magnitude da aceleração  $a(\tau) \leq B$ , para todo o  $\tau$ , em que  $a(\tau) = (A^b A_b)^{1/2}$ .

‡ O nome vem da definição de Schmidt que empregou a noção de feixes (*bundles*).

Usando este conceito, podemos voltar à questão da relação das singularidades com a curvatura. Intuitivamente, uma singularidade deveria corresponder a um crescimento sem limite da curvatura conforme nos aproximamos do ponto singular. A aproximação do ponto singular pode ser encarada como a aproximação, numa curva b-incompleta, do limite superior do seu parâmetro afim generalizado. O crescimento sem limite da curvatura é mais difícil de caracterizar. Uma possibilidade é escolher escalares em  $g_{ab}$  e  $R_{abcd}$  e ver se estes crescem sem limite, dizendo-se que uma curva b-incompleta corresponde a uma singularidade de curvatura escalar polinomial (dita singularidade de curvatura s.p.) se qualquer um destes escalares não tem limite nessa curva. No entanto, numa métrica lorentziana, estes escalares não caracterizam a curvatura por completo.

Uma alternativa é caracterizar a curvatura pelas componentes do tensor de curvatura numa base transportada paralelamente ao longo da curva; diz-se que uma curva b-incompleta corresponde a uma singularidade com respeito a uma base transportada paralelamente (dita singularidade de curvatura p.p.) se qualquer uma dessas componentes não tiver limite nessa curva.

Seria então de esperar que numa solução fisicamente realista uma curva b-incompleta corresponderia a ambos tipos de singularidade. Esta relação é clarificada usando o conceito de prisão de uma curva: uma curva não-espacial que é inextensível no futuro diz-se que está total ou parcialmente presa num conjunto compacto  $\mathcal{S}$  se entra e permanece dentro de  $\mathcal{S}$  ou se não permanece dentro de qualquer conjunto compacto mas reentra continuamente num conjunto compacto  $\mathcal{S}$ , respectivamente\*. Pode mostrar-se então que†, se  $p \in \mathcal{M}$  é um ponto limite de uma curva  $\lambda$  b-incompleta (isto é, se  $\lambda$  está total ou parcialmente presa numa vizinhança compacta de  $p$ ) e se, em  $p$ ,  $R_{ab}K^aK^b \neq 0$  para todos os vectores  $K$  não-espaciais, então  $\lambda$  corresponde a uma singularidade de curvatura p.p.

O estudo e discussão destas questões continua, no entanto, até aos dias de hoje. A classificação de singularidades, de acordo com o comportamento da curvatura na sua proximidade, assim como a possibilidade teórica da existência genérica de singularidades numa vizinhança em que a física seja regular, isto é, sem crescimento sem limite da curvatura, são questões que continuam a ser estudadas. Formular um critério suficientemente geral que estabeleça a ligação entre pontos singulares e o ‘mau comportamento’ de grandezas físicas é uma questão técnica difícil e ainda hoje sem resolução final. Este objectivo será talvez um dos frutos que surgirão quando o ‘casamento’ entre a teoria quântica de campos e a Relatividade Geral for verdadeiramente consumado.

## ***Superfície prisioneira fechada***

Tal como referimos na introdução, os teoremas de singularidades incorporam três tipos de condições: uma condição sobre a energia, uma condição global sobre a estrutura causal do espaço-tempo e uma condição que imponha que a gravidade seja tão forte numa dada região que nada possa escapar. A última condição pode exprimir-se de

---

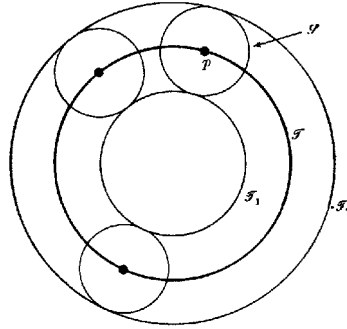
\* Relembrando a discussão das condições de causalidade no capítulo 4, é fácil convencermos-nos que, se a condição de causalidade forte for válida num conjunto compacto, não é possível existirem curvas não-espaciais total ou parcialmente presas nesse conjunto. Ver Hawking e Ellis (1973), prop.6.4.7.

† Hawking e Ellis (1973), prop.8.5.2.

diferentes maneiras mas uma delas é exigir a existência do que Penrose, em 1965, chamou de uma superfície prisioneira fechada.

Se existir uma superfície prisioneira fechada, o campo gravitacional é tão forte que nada pode escapar (inclusive a luz) e o sistema colapsa inevitavelmente.

Considere-se uma esfera  $\mathcal{T}$  que emite um flash de luz (ver figura 5.1).



**Figura 5.1**  $\mathcal{T}$  é uma superfície prisioneira fechada.

Num instante posterior, a luz que partiu de um ponto  $p$  forma uma esfera  $\mathcal{S}$  em redor de  $p$ , e os envelopes  $\mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{T}_2$  constituem as frentes de ondas dirigidas para dentro e para fora, respectivamente. Se as áreas de tanto  $\mathcal{T}_1$  como  $\mathcal{T}_2$  forem menores do que a área de  $\mathcal{T}$ , então  $\mathcal{T}$  é uma superfície prisioneira fechada\*. Noutras palavras, o campo gravitacional é tão forte que mesmo a luz dirigida para fora é arrastada para dentro. Uma superfície prisioneira fechada é então uma 2-superfície espacial  $C^2$  fechada (compacta, sem fronteira) tal que ambas as famílias de geodésicas nulas ortogonais a ela, dirigidas para o futuro, são convergentes.

## Pontos conjugados

Tal como vimos no capítulo 3, num espaço-tempo  $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$  globalmente hiperbólico, com  $p, q \in \mathcal{M}$  que podem ser unidos por uma curva causal, e sendo  $(C(p, q), \mathcal{T})$  um espaço topológico, o comprimento da curva é uma função semi-contínua superior nesse espaço devendo, portanto, atingir o seu máximo. Esta curva de comprimento máximo,  $\gamma$ , tem de ser uma geodésica porque, de outra forma, uma pequena variação produziria uma curva maior.

No entanto, é possível mostrar que  $\gamma$  admite uma variação que produz uma curva de comprimento superior se existir uma geodésica infinitamente próxima com origem em  $p$  que intersecte  $\gamma$  novamente num ponto  $r$  entre  $p$  e  $q$ . Nestas condições, diz-se que o ponto  $r$  é conjugado ao ponto  $p$ . Dada a importância deste conceito no que se segue, vamos defini-lo e analisá-lo com mais rigor.

\* Ver figura 4.12. Os pontos  $q$  e  $s$  representam as 2-esferas formadas por fótons que foram emitidos radialmente para fora e para dentro, respectivamente. De notar a diferença de comportamento das áreas das esferas nas regiões I' ( $r > 2M$ ) e II ( $r < 2M$ ).

Considere-se uma geodésica  $\gamma$  com vector tangente  $u^\alpha$ . Recordemos a figura 2.1 e a equação do desvio geodésico (2.1) que pode ser escrita como

$(\xi^\alpha_{;\beta} u^\beta)_{;\gamma} u^\gamma = -R^\alpha_{\beta\gamma\delta} u^\beta \xi^\gamma u^\delta$ . Considere-se ainda a congruência de geodésicas temporais, parametrizadas com tempo próprio  $s$ , que passam em  $p$  e uma base ortonormal  $e_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) de vectores espaciais ortogonais a  $u^\alpha$  e transportados paralelamente ao longo de  $\gamma$  (ver capítulo 1). As componentes  $\xi^\alpha$  nesta base satisfazem as equações lineares  $\frac{d^2 \xi^\alpha}{ds^2} = -R^\alpha_{0\beta 0} \xi^\beta$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ) e a solução desta equação é um chamado campo de Jacobi em  $\gamma$ , que pode ser especificado dando os valores de  $\xi^\alpha$  e  $d\xi^\alpha/ds$  num determinado ponto de  $\gamma$ . Existem três campos de Jacobi independentes que se anulam num ponto  $p$  de  $\gamma$ , podendo ser expressos como:

$$\xi^\alpha(s) = A^\alpha_\beta(s) \frac{d}{ds} \xi^\beta(0) \quad (5.1)$$

em que  $A_{\alpha\beta}(s)$  é uma matriz  $3 \times 3$  que se anula em  $p$  e satisfaz a equação

$$\frac{d^2}{ds^2} A_{\alpha\beta}(s) = -R_{\alpha 0 \gamma 0} A^\gamma_\beta(s).$$

Dois pontos  $p, q \in \gamma$  dizem-se conjugados se existe um campo de Jacobi  $\xi^\alpha$ , não identicamente nulo, que se anula em  $p$  e  $q^*$ , ou seja, o ponto  $q$  será, então, conjugado a  $p$  se existir um  $\xi^\alpha(s)$  tal que  $\xi^\alpha|_q = 0$  e  $\frac{d}{ds} \xi^\alpha|_p \neq 0$ . Pela equação (5.1), isto só acontece se  $\det A^\alpha_\beta = 0$ , que é uma condição necessária mas também suficiente.

A matriz  $A_{\alpha\beta}(s)$  está relacionada com o campo tensorial  $B_{\alpha\beta} \equiv u_{\alpha;\beta}$  (ver capítulo 2). Partindo da equação  $\xi^\alpha_{;\beta} u^\beta = B^\alpha_\beta \xi^\beta$  e usando a equação (5.1), obtém-se

$$\frac{d}{ds} A^\alpha_\beta \frac{d}{ds} \xi^\beta(0) = B^\alpha_\mu A^\mu_\beta \frac{d}{ds} \xi^\beta(0), \text{ que pode ser escrita, em notação matricial, como}$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{ds} = \mathbf{B}\mathbf{A}, \text{ ou seja, } \mathbf{B} = \frac{d\mathbf{A}}{ds} \mathbf{A}^{-1}.$$

Recordando a discussão sobre geodésicas no capítulo 2, podemos introduzir o escalar de expansão  $\theta = \text{tr } \mathbf{B}$  que pode ser expresso como  $\theta = (\det \mathbf{A})^{-1} \frac{d}{ds} (\det \mathbf{A})$ , ou seja,

$$\theta = \frac{d}{ds} (\ln |\det \mathbf{A}|) \quad (5.2)$$

Com base nesta equação, conclui-se que uma condição necessária e suficiente para que os pontos  $p$  e  $q$  sejam conjugados é que, para a congruência de geodésicas temporais que emanam de  $p$ , se verifique que  $\theta \rightarrow -\infty$  em  $q$ .

Finalmente, pode provar-se<sup>†</sup> que uma geodésica temporal entre  $p$  e  $q$  é máxima se e só se não existirem pontos conjugados a  $p$  ao longo da geodésica no intervalo entre  $p$  e  $q$ .

\* Esta condição não implica que exista uma outra geodésica que intersecte  $\gamma$  em  $p$  e  $q$ , nem o argumento inverso.

<sup>†</sup> Ver Hawking e Ellis (1973), prop.4.5.8.

Pode aplicar-se o mesmo tipo de raciocínios quando consideramos uma congruência de geodésicas temporais ortogonais a uma hipersuperfície espacial\*,  $\mathcal{H}$ . Neste caso, diz-se que um ponto  $q$  em  $\gamma$  é conjugado a  $\mathcal{H}$  ao longo de  $\gamma$  se existir um campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$ , não identicamente nulo, que satisfaça as condições iniciais  $\frac{d}{ds}\xi^\alpha = u^\alpha_{;\beta}\xi^\beta$  em  $p \in \mathcal{H}$  e que se anule no ponto  $q$ .

Prova-se<sup>†</sup> então que uma geodésica temporal entre  $\mathcal{H}$  e  $p$  é máxima se e só se não existirem pontos conjugados a  $\mathcal{H}$  ao longo da geodésica no intervalo entre  $\mathcal{H}$  e  $p$ .

## ***Teoremas de singularidades***

É de notar o enunciado dos teoremas de singularidades tem a seguinte forma: ‘Se um espaço-tempo satisfaz..., então é geodesicamente incompleto’. Assim, os teoremas não são, na realidade, teoremas de singularidades mas sim teoremas de ‘incompletude’ geodésica, que não especificam a natureza do comportamento singular que provoca a incompletude. Continuaremos, no entanto, a referir-nos a eles pela sua designação habitual. Os diversos teoremas mostram então que o espaço-tempo deve ser geodesicamente incompleto em relação a geodésicas temporais ou nulas se se verificarem diferentes combinações dos três tipos de condições mencionados na introdução. Iremos primeiro apresentar um teorema simples.

Seja  $S$  uma superfície de Cauchy e  $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$ , consequentemente um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Suponhamos que  $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$  é um espaço-tempo geodesicamente completo. Consideremos ainda que a convergência das geodésicas que emanam de  $S$  é limitada superiormente por um valor negativo  $\theta_0$ .

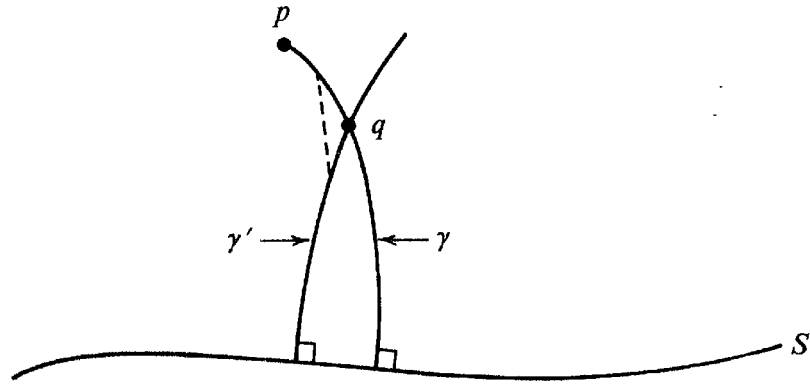
Se  $p$  for um ponto contido no desenvolvimento futuro de  $S$ , então existirá uma geodésica  $\gamma$  de  $p$  a  $S$ , de comprimento máximo, e que intersecta  $S$  ortogonalmente (ver capítulo 3). Como vimos na secção anterior, esta geodésica será máxima se e só se não existirem pontos conjugados à superfície ao longo de  $\gamma$  no intervalo entre a superfície e o ponto  $p$ . No entanto, se a geodésica é completa, então podemos escolher  $\gamma$  de forma que o seu comprimento exceda  $3/|\theta_0|$ . Mas pela equação de Raychaudhuri (2.2), nestas condições, as geodésicas que emergem de  $S$  intersectar-se-ão numa distância de pelo menos  $3/|\theta_0|$  e a geodésica  $\gamma$  será intersectada antes de chegar a  $p$  (ver figura 5.2). Esta intersecção de  $\gamma$  por outra geodésica  $\gamma'$  infinitamente próxima significa que podemos estender  $\gamma$ , ‘arredondando o canto’ no ponto de intersecção (ver figura 5.2). Resumindo, o ponto  $q$  é um ponto conjugado à superfície ao longo de  $\gamma$  no intervalo entre a superfície e o ponto  $p$ . Obtemos assim uma contradição com o facto de  $\gamma$  ser a geodésica de comprimento máximo desde  $p$  até  $S$ .

Conclui-se, então, que este espaço-tempo, obedecendo à condição forte sobre a energia (implícita na discussão da equação de Raychaudhuri) e tendo uma superfície de Cauchy com a convergência das normais limitada superiormente, deve ser geodesicamente (temporalmente) incompleto.

---

\* Ver próximo capítulo.

† Ver Hawking e Ellis (1973), prop.4.5.9.



**Figura 5.2** Se a geodésica é intersectada, então não pode ser uma geodésica de comprimento máximo.

Apesar de este ser o exemplo mais simples de um teorema de singularidades, é também o mais fraco do ponto de vista físico. Isto porque as condições da existência de uma superfície de Cauchy e da convergência das geodésicas que emanam de  $S$  ser limitada superiormente por um valor negativo são condições demasiado fortes. Nesse sentido, é útil procurar maneiras de se enfraquecer uma das condições ao mesmo tempo que se supõe versões mais fortes das outras duas. É neste contexto que se segue o teorema de Hawking-Penrose\* que, de certa forma, incorpora e generaliza teoremas anteriores. O seu enunciado é o seguinte:

Nenhum espaço-tempo  $(\mathcal{M}, g)$  pode satisfazer, simultaneamente, as seguintes condições:

1.  $\mathcal{M}$  não contém curvas temporais fechadas;
2. toda a geodésica causal inextensível em  $\mathcal{M}$  contém um par de pontos conjugados;
3. existe um conjunto prisioneiro no futuro, ou no passado,  $S \subset \mathcal{M}$ .

A condição 1 já foi discutida no capítulo 3.

A condição 2 do teorema poderia, à primeira vista, parecer demasiado forte. No entanto, não o é. De facto, é uma condição a esperar em qualquer espaço-tempo não singular fisicamente razoável e é uma consequência de três condições: a totalidade das geodésicas causais ser completa, a condição forte sobre a energia e uma assunção de generalidade sobre as geodésicas. As duas primeiras já foram discutidas. A terceira estabelece que toda a geodésica causal contém um ponto no qual se verifica que  $k_{[\alpha} R_{\beta]\gamma\delta} k^{\gamma} k^{\delta} \neq 0$ , em que  $k_{\alpha}$  é tangente à geodésica. Se a geodésica é temporal pode reescrever-se esta condição como  $R_{\alpha\beta\gamma\delta} u^{\beta} u^{\gamma} \neq 0$ . É de esperar que esta condição se

---

\* Hawking e Penrose (1970). Ver também Hawking e Ellis (1973), cap.8 e Hawking e Penrose (1996), cap.1.



verifique em qualquer espaço-tempo realista ‘genérico’.<sup>\*</sup> Estas três condições implicam, então, a condição 2 do teorema<sup>†</sup>.

Quanto à condição 3 do teorema, define-se um conjunto prisioneiro no futuro como um conjunto semi-espacial fechado  $S \subset \mathcal{M}$  tal que  $E^+(S)$  é compacto, em que  $E^+(S) \equiv J^+[S] - I^+[S]$ .<sup>‡</sup> Como exemplos de um conjunto prisioneiro no futuro temos uma superfície prisioneira fechada e qualquer conjunto semi-espacial que seja uma hipersuperfície espacial fechada. Outro exemplo é um conjunto semi-espacial  $S$  em que as geodésicas nulas que formam a fronteira local do seu futuro (que serão ortogonais ao bordo de  $S$ ) convergirão algures no futuro de  $S$  (este conjunto poderá ser constituído por um só ponto  $p$ ).

Com base nestas observações<sup>§</sup>, podemos então escrever o enunciado de um corolário ao teorema.

Um espaço-tempo  $(\mathcal{M}, g)$  é geodesicamente incompleto se, em conjunto com as equações de Einstein, se verificar que:

1.  $\mathcal{M}$  não contém curvas temporais fechadas;
  2. a condição de energia forte é satisfeita em todos os pontos de  $\mathcal{M}$ ;
  3. a condição de generalidade é satisfeita por todas as geodésicas causais;
  4.  $\mathcal{M}$  contém
    - (i) uma superfície prisioneira fechada.
- ou
- (ii) um ponto  $p$  para o qual a convergência de todas as geodésicas nulas que por ele passam muda de sinal algures no passado de  $p$ .
- ou
- (iii) uma hipersuperfície espacial compacta.

Tal como já vimos, pode interpretar-se a falha da totalidade das geodésicas causais ser completa como uma afirmação de que, nestas condições, o espaço-tempo contém uma ‘singularidade’. No entanto, não se pode concluir que esta singularidade será do tipo de ‘curvatura infinita’. De facto, estes teoremas não nos informam acerca da natureza das singularidades. Será, no entanto, de esperar que, genericamente, a curvatura divergirá ao longo de geodésicas incompletas.

Regressando ao enunciado do teorema, o que ele nos diz é que um espaço-tempo satisfazendo as condições 1-4 do corolário tem de conter uma geodésica causal que não possua nenhum par de pontos conjugados. À primeira vista, seria de esperar que uma geodésica causal que entrasse numa região com curvatura muito grande deveria ter muitos pares de pontos conjugados. Em vez disso, vemos que este teorema implica que pelo menos uma geodésica causal ‘entra na singularidade’ (isto é, é levada a ser incompleta) antes de haver tempo de ocorrer qualquer focagem repetida.

---

<sup>\*</sup> Esta condição falha, no caso de uma geodésica temporal, apenas se  $R_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta$  for nulo em todos os pontos da geodésica e, mesmo aí, apenas se o tensor de Weyl obedecer a  $C_{\alpha\beta\gamma\delta} k^\beta k^\gamma = 0$  em todos os pontos da geodésica. No caso de uma geodésica nula, a condição falha apenas se  $R_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta$  for nulo em todos os pontos da geodésica e, mesmo aí, apenas se o tensor de Weyl obedecer a  $k_{[\alpha} C_{\beta]\gamma\delta[\epsilon} k_{\sigma]} k^\gamma k^\delta = 0$  em todos os pontos da geodésica. Podemos então dizer que só em modelos muito ‘especiais’ (e portanto fisicamente não realistas) é que esta condição falhará.

<sup>†</sup> Ver, por exemplo, Hawking e Ellis (1973), prop.4.4.2.

<sup>‡</sup> É de notar que  $E^+[S]$  é parte da fronteira de  $I^+[S]$  mas não necessariamente toda ela.

<sup>§</sup> Cujas provas se encontram em Hawking e Penrose (1970).

## 6. Hipersuperfícies

Neste capítulo iremos abordar a descrição matemática de hipersuperfícies, fundamental no desenvolvimento do problema da evolução dinâmica em relatividade geral, como veremos no próximo capítulo.

### **Métrica induzida**

Numa variedade do espaço-tempo a quatro dimensões, uma hipersuperfície é uma sub-variedade de três dimensões<sup>\*</sup>, e pode ser do tipo temporal, espacial ou nulo. Não discutiremos aqui a descrição de hipersuperfícies do tipo nulo. Uma hipersuperfície particular  $\Sigma$  pode ser caracterizada<sup>†</sup> por uma restrição nas coordenadas  $\Phi(x^\alpha) = 0$  ou por equações paramétricas da forma  $x^\alpha = x^\alpha(y^a)$ , onde  $y^a$  ( $a = 1,2,3$ ) são as coordenadas intrínsecas à hipersuperfície. O vector  $\Phi_{,\alpha}$  é normal a  $\Sigma$  e um vector normal unitário  $n_\alpha$  pode ser definido de modo que  $n_\alpha n^\alpha = \varepsilon \equiv \pm 1$ , se  $\Sigma$  for do tipo temporal(+) ou espacial (−) e que aponte sempre no sentido de  $\Phi$  crescente.

A métrica intrínseca à hipersuperfície é obtida restringindo-nos a deslocamentos confinados a  $\Sigma$ . Os vectores  $e_a^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a}$  são tangentes às curvas contidas em  $\Sigma$  (o que implica que  $n_\alpha e_a^\alpha = 0$ ) e temos que  $ds^2(\Sigma) = h_{ab} dy^a dy^b$ , onde

$$h_{ab} = g_{\alpha\beta} e_a^\alpha e_b^\beta \quad (6.1)$$

é a métrica induzida em  $\Sigma$ , a chamada primeira forma fundamental da hipersuperfície, que se comporta como um 3-tensor, sob transformações das coordenadas  $y^a$ , mas como um escalar, sob transformações das coordenadas  $x^\alpha$ . As métricas estão relacionadas por  $g^{\alpha\beta} = \varepsilon n^\alpha n^\beta + h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta$ , onde  $h^{ab}$  é a inversa da métrica induzida.

### **Curvatura extrínseca**

O tensor  $h^{\alpha\beta} \equiv h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta = g^{\alpha\beta} - \varepsilon n^\alpha n^\beta$  efectua uma projecção de um tensor arbitrário  $T^{\alpha\beta\cdots}$  sobre a hipersuperfície, de modo que  $h^\alpha_\mu h^\beta_\nu \dots T^{\mu\nu\cdots}$  é tangente a  $\Sigma$ . Consideremos, por simplicidade, um vector tangente  $A^\alpha$ . A métrica induzida permite construir uma conexão que leva ao conceito de derivada covariante, que denotaremos por  $A_a|_b$ . Esta derivada, definida da maneira usual em termos da conexão  $\Gamma^a_{bc}$  (e esta,

---

<sup>\*</sup> Ou seja, se  $\mathcal{L}$  é uma variedade 3-dimensional e  $i: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$  é um mergulho, a imagem  $i(\mathcal{L})$  de  $\mathcal{L}$  diz-se uma hipersuperfície em  $\mathcal{M}$

<sup>†</sup> Neste capítulo seguimos o tratamento e notações de Poisson (2004), cap.3, no qual se poderá encontrar a dedução das equações apresentadas no nosso texto.

por sua vez, em termos da métrica  $h_{ab}$ )\*, é a projecção de  $A_{\alpha;\beta}$  sobre  $\Sigma$ ,  $A_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta$ . O vector  $A^\alpha_{;\beta} e_b^\beta$  pode ser expresso em termos de componentes tangenciais e normais à hipersuperfície:  $A^\alpha_{;\beta} e_b^\beta = A^a|_b e_a^\alpha - \varepsilon A^a K_{ab} n^\alpha$ , em que

$$K_{ab} \equiv n_{\alpha;\beta} e_a^\alpha e_b^\beta \quad (6.2a)$$

é a curvatura extrínseca, ou a chamada segunda forma fundamental da hipersuperfície, que é um tensor simétrico e, portanto, pode ser escrito como  $K_{ab} = n_{(\alpha;\beta)} e_a^\alpha e_b^\beta$ , ou seja,

$$K_{ab} = \frac{1}{2} (\mathcal{L}_n g_{\alpha\beta}) e_a^\alpha e_b^\beta = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n h_{ab} \quad (6.2b)$$

onde  $\mathcal{L}_n g_{\alpha\beta}$  é a derivada de Lie da métrica  $g_{\alpha\beta}$  na direcção de  $n^\mu$ . É de notar que  $K \equiv h^{ab} K_{ab} = n^\alpha_{;\alpha}$  é a expansão de uma congruência de geodésicas que intersectam a hipersuperfície ortogonalmente (de modo que o seu vector tangente na hipersuperfície é  $n^\alpha$ ).

## ***Equações de Gauss-Codazzi***

Podemos também definir um tensor de curvatura intrínseco 3-dimensional da maneira usual:  $A^c|_{ba} - A^c|_{ab} = R^c_{dab} A^d$ , que pode ser expresso em termos do tensor de Riemann 4-dimensional pela seguinte relação (a chamada equação de Gauss):

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma e_d^\delta = R_{abcd} + \varepsilon (K_{ad} K_{bc} - K_{ac} K_{bd}) \quad (6.3)$$

Este tensor está também relacionado com a curvatura extrínseca pela seguinte relação (a chamada equação de Codazzi):

$$R_{\mu\alpha\beta\gamma} n^\mu e_a^\alpha e_b^\beta e_c^\gamma = K_{ab}|_c - K_{ac}|_b \quad (6.4)$$

Estas equações revelam que algumas das componentes do tensor de curvatura podem ser expressas em termos das curvaturas intrínseca e extrínseca da hipersuperfície. Elas podem também ser escritas na sua forma contraída, em termos do tensor de Einstein e de Ricci:

$$-2\varepsilon G_{\alpha\beta} n^\alpha n^\beta = {}^3R + \varepsilon (K_{ab} K^{ab} - K^2) \quad (6.5)$$

e

$$G_{\alpha\beta} e_a^\alpha n^\beta = K^b_{a|b} - K_{,a} \quad (6.6)$$

onde  ${}^3R = h^{ab} R^m_{amb}$  é o escalar de Ricci 3-dimensional, que está relacionado com o escalar de Ricci 4-dimensional pela relação:

$$R = {}^3R + \varepsilon (K^2 - K_{ab} K^{ab}) + 2\varepsilon (n^\alpha_{;\beta} n^\beta - n^\alpha n^\beta_{;\beta})_{;\alpha} \quad (6.7)$$

---

\* isto é,  $A_a|_b = A_{a,b} - \Gamma_{cab} A^c$ , onde  $\Gamma_{cab} = e_c^\gamma e_{a\gamma;\beta} e_b^\beta = \frac{1}{2} (h_{ca,b} + h_{cb,a} - h_{ab,c})$ .

## 7. O problema do valor inicial

Se uma teoria pode ser formulada de modo que ‘dados iniciais apropriados’ podem ser especificados (possivelmente sujeitos a constrangimentos) de forma que a evolução dinâmica subsequente do sistema é univocamente determinada, então diz-se que a teoria possui uma formulação do valor inicial. Considera-se ainda que o problema está ‘bem formulado’ se:

- ‘pequenas alterações’ nos dados iniciais produzirem correspondentes ‘pequenas alterações’ nas soluções, numa região compacta do espaço-tempo;
- alterações nos dados iniciais numa região,  $S$ , da superfície de dados iniciais, não produzirem quaisquer alterações nas soluções fora do futuro causal,  $J^+(S)$ , desta região.

Noutras teorias clássicas, é pressuposto um espaço-tempo como pano de fundo e a tarefa é determinar a evolução no tempo de quantidades expressas nesse espaço-tempo, a partir dos seus valores iniciais e das suas derivadas temporais\*. Mas na teoria da relatividade geral, uma vez que a métrica define a estrutura do espaço-tempo, é esta própria estrutura que é a incógnita do problema. Quais são então as quantidades que devem ser especificadas inicialmente, de modo que a estrutura do espaço-tempo seja determinada?

Dedicamos este capítulo à discussão destas, e outras, questões que serão essenciais na compreensão da formulação da conjectura da censura cósmica apresentada no capítulo 10.

### ***Equações de constrangimento***

Seja  $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$  um espaço-tempo globalmente hiperbólico. Como já vimos no capítulo 3, podemos folhear  $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$  por superfícies de Cauchy,  $\Sigma_t$ , parametrizada por uma função de tempo global,  $t$ , ou seja, um campo escalar  $t(x^\alpha)$  de modo que  $\{t(x^\alpha) = \text{constante}\}$  descreve uma família de hipersuperfícies de tipo espacial que não se intersectam. Estas hipersuperfícies correspondem à noção intuitiva de “instantes de tempo”. Podemos encarar  $(\mathcal{M}, g_{\alpha\beta})$ , então, como o desenvolvimento temporal de uma métrica riemanniana numa variedade fixa 3-dimensional. Os dados iniciais serão, então, um conjunto  $(\Sigma, h_{ab}, K_{ab})$  em que  $h_{ab}$  e  $K_{ab}$  são dois campos tensoriais simétricos especificados numa hipersuperfície  $\Sigma$  de tipo espacial.

O problema do valor inicial na teoria da relatividade geral é o problema de encontrar um espaço-tempo  $(\mathcal{M}, g)$ , o desenvolvimento dos dados iniciais, de modo que:

- $(\mathcal{M}, g)$  satisfaz as equações de Einstein;
- Existe uma subvariedade  $S$  de  $\mathcal{M}$  difeomorfa a  $\Sigma$ , por um difeomorfismo  $\Lambda$ ;
- A imagem, por  $\Lambda$ , da métrica induzida por  $g$  em  $S$ , e da curvatura extrínseca de  $S$  em  $(\mathcal{M}, g)$  são, respectivamente,  $h_{ab}$  e  $K_{ab}$ .
- $S$  é uma superfície de Cauchy de  $\mathcal{M}$ .

---

\* Ver Wald (1984), cap.10.1.

Assim, os tensores  $h_{ab}$  e  $K_{ab}$  não podem ser escolhidos arbitrariamente; devem obedecer às equações de constrangimento, que são as equações (6.5) e (6.6), juntamente com as equações de Einstein  $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$ . Os dados iniciais na hipersuperfície necessários para determinar a solução das equações incluem também, então, os dados iniciais para os campos da matéria\*. No caso das equações de Einstein no vácuo (e de agora em diante, consideremos apenas este caso),  $G_{\alpha\beta} = 0$ , logo obtemos:

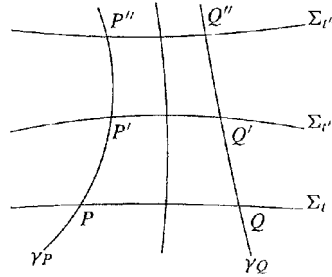
$${}^3R - K_{ab}K^{ab} + K^2 = 0 \quad (7.1a)$$

e

$$(K^{ab} - K h^{ab})|_b = 0 \quad (7.1b)$$

### Decomposição 3+1 do espaço-tempo

Para formular o desenvolvimento temporal das hipersuperfícies  $\Sigma_t$ , temos de adoptar a formulação Hamiltoniana da relatividade geral†. Esta baseia-se na já referida folheação do espaço-tempo em hipersuperfícies  $\Sigma_t$  que não se intersectam, ou seja, numa decomposição do espaço-tempo em espaço e tempo, a chamada decomposição 3+1. A métrica induzida nestas hipersuperfícies refere-se a deslocamentos contidos em  $\Sigma_t$ , por isso precisamos de outras grandezas que caracterizem deslocamentos para fora da hipersuperfície. Consideremos primeiro uma congruência de curvas que intersectam as hipersuperfícies  $\Sigma_t$  (ver figura).



**Figura 7.1** Folheação do espaço-tempo por hipersuperfícies do tipo espacial. Escolhemos um sistema de coordenadas de modo que  $y^a(P'') = y^a(P') = y^a(P)$ , ou seja,  $y^a$  mantém-se constante para cada membro da congruência.

O vector  $t^\alpha = \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial t} \right)_{y^a}$  será tangente à congruência mas, uma vez que as curvas  $\gamma$

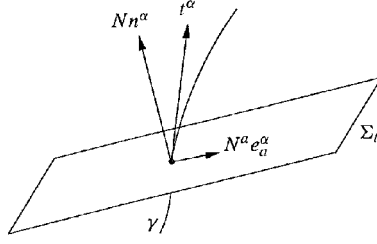
não intersectam as hipersuperfícies ortogonalmente, não será paralelo a  $n^\alpha$ . Podemos então decompor  $t^\alpha$  em componentes normal e tangencial (ver figura 7.2), com base nos

vectores unitários  $e_a^\alpha = \left( \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^a} \right)_t$  e  $n_\alpha = -N \partial_\alpha t$ , onde  $N$  é uma função escalar, chamada

*lapso*, de modo que  $n_\alpha$  está devidamente normalizado e se verifica que  $t^\alpha \partial_\alpha t = 1$ .

\* No caso de um campo escalar, consistem em duas funções, representando o valor do campo e a sua derivada normal.

† Aqui seguiremos o tratamento e notações de Poisson (2004), cap.4, no qual se poderá encontrar a dedução das equações apresentadas no nosso texto ou referência a outras fontes.



**Figura 7.2** Decomposição de  $t^\alpha$  em lapso e deslocamento.

Podemos então escrever que

$$t^\alpha = N n^\alpha + N^a e_a^\alpha, \quad (7.2)$$

em que o vector  $N^a$  é o chamado *deslocamento* e que  $dx^\alpha = t^\alpha dt + e_a^\alpha dy^a = (N dt) n^\alpha + (dy^a + N^a dt) e_a^\alpha$ . Assim, vem que o elemento de linha  $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$  pode ser escrito como

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + h_{ab} (dy^a + N^a dt) (dy^b + N^b dt) \quad (7.3)$$

A estratégia para resolver as equações de Einstein no vácuo baseia-se então no seguinte método. Seleccione-se uma folheação do espaço-tempo, especificando o lapso  $N$  e o deslocamento  $N^a$  como funções de  $x^\alpha = x^\alpha(t, y^a)$ ; esta escolha é completamente arbitrária. Escolham-se valores iniciais para os campos tensoriais  $h_{ab}$  e  $K_{ab}$ , que devem obedecer às equações (7.1). Sendo  $h_{ab}$  a métrica induzida nas hipersuperfícies, a métrica do espaço-tempo será dada pela equação (7.3). Finalmente, devemos fazer evoluir estes valores iniciais usando as equações de Hamilton, que são deduzidas da variação da acção gravitacional\* em relação às variáveis  $N$ ,  $N^a$ ,  $h_{ab}$  e (o seu momento conjugado)  $p^{ab}$ , e que podem ser escritas na forma:

$$\dot{h}_{ab} = 2N K_{ab} + \mathcal{L}_N h_{ab} \quad (7.4)$$

e

$$\dot{K}_{ab} = N|_{ab} - N(R_{ab} + K K_{ab} - K^c_a K_{bc}) + \mathcal{L}_N K_{ab} \quad (7.5)$$

Nestas equações as derivadas de Lie são na direcção do vector deslocamento,  $N^a$ , e  $\dot{h}_{ab} \equiv \mathcal{L}_t h_{ab} = (\mathcal{L}_t g_{\alpha\beta}) e_a^\alpha e_b^\beta$ .

Pode ainda exprimir-se o determinante da métrica em função de  $h \equiv \det [h_{ab}]$  e da função lapso, sendo que se obtém  $\sqrt{-g} = N |h|^{1/2}$ .

---

\* Pode mostrar-se que as equações (7.1) e (7.2) também resultam desta variação. Ver Poisson (2004), cap.4.2. Ver também capítulo 12.

## Aspectos globais

A primeira questão global que se põe quanto ao problema do valor inicial é a questão da existência e unicidade das soluções. Em relatividade geral, os teoremas que respondem a esta questão foram estabelecidos por Choquet-Bruhat. Em relação à existência, foi provado que qualquer conjunto de dados iniciais tem um desenvolvimento.

Sejam  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{M}'$  desenvolvimentos futuros do conjunto  $S$  de dados iniciais. Sendo  $\mathcal{M}$  uma extensão de  $\mathcal{M}'$ , o teorema da unicidade do problema de Cauchy em relatividade geral diz que quaisquer dois desenvolvimentos de  $S$  são extensões de um desenvolvimento comum. Este desenvolvimento comum representa uma ‘vizinhança’ de  $S$  na qual os dois desenvolvimentos coincidem. Este teorema local levou ao estabelecimento, por Choquet-Bruhat e Geroch, de um teorema global que afirma a existência, para cada conjunto de dados iniciais, de um desenvolvimento único e máximo, no seguinte sentido: existe um desenvolvimento  $\mathcal{M}$  de  $S$  que é uma extensão de qualquer outro desenvolvimento de  $S$  e é único (a menos de uma isometria).  $\mathcal{M}$  não pode ser estendido de maneira nenhuma, de modo que  $S$  continue a ser uma superfície de Cauchy.\* O espaço-tempo  $\mathcal{M} \cap J^+(\Sigma)$  é o desenvolvimento futuro máximo e o espaço-tempo  $\mathcal{M} \cap J^-(\Sigma)$  é o desenvolvimento passado máximo.

Este teorema tem corolários que afirmam que, se  $\mathcal{M}$  for o desenvolvimento máximo de  $S$ , e se  $S'$  for uma superfície de Cauchy em  $\mathcal{M}$ , então  $\mathcal{M}$  é o desenvolvimento máximo de  $S'$  e que duas superfícies de Cauchy do mesmo espaço-tempo, consideradas como conjuntos de dados iniciais  $S$  e  $S'$ , têm desenvolvimentos máximos isométricos. Conclui-se, assim, que existe uma classe bem definida de soluções das equações de Einstein a que chamamos ‘desenvolvimentos máximos’, e que qualquer solução das equações de Einstein que tenha uma superfície de Cauchy define um elemento único da classe de desenvolvimentos máximos.

A segunda questão global que se põe quanto ao problema do valor inicial é a questão de saber se o desenvolvimento máximo é geodesicamente completo. Esta questão foi respondida pela negativa por Penrose, cujo teorema pode ser enunciado, nesta linguagem, da seguinte forma: se os dados iniciais têm uma superfície de Cauchy não compacta, contendo uma superfície prisioneira fechada  $\mathcal{T}$ , e se verifica a CEN (ver capítulo 2), então o desenvolvimento futuro máximo é incompleto.

Os teoremas de Penrose e Hawking levam então à seguinte questão: existe algum conjunto de dados iniciais assintoticamente plano não trivial cujo desenvolvimento máximo é geodesicamente completo? A resposta a esta questão foi respondida pela positiva por Christodoulou e Klainermann na sua investigação sobre a estabilidade do espaço-tempo de Minkowski, como veremos nos capítulos 10 e 11.

---

\* Ou seja, qualquer espaço-tempo  $\mathcal{M}'$ , para o qual existe uma isometria  $\phi$  de  $\mathcal{M}$  num subconjunto de  $\mathcal{M}'$  tal que  $\phi(S)$  é uma superfície de Cauchy de  $\mathcal{M}'$ , é necessariamente isométrico a  $\mathcal{M}$ .

## 8. Censura cósmica I. Abordagem assintótica

Depois de apresentarmos um resumo do ‘modelo standard’ do colapso gravitacional que, como veremos, depende crucialmente da hipótese da censura cósmica, abordamos a formulação desta hipótese baseada na questão do comportamento assintótico do espaço-tempo. Esta formulação é essencialmente devida a Hawking\*, que tornou mais precisas as noções mais ou menos intuitivas apresentadas por Penrose na sua formulação inicial.

### ***Colapso gravitacional***

Relembremos as fases gerais de um colapso gravitacional esfericamente simétrico (ver figura 8.1):

1. Aquando do início do colapso, a superfície do corpo encontra-se muito além do raio de Schwarzschild  $r_0$ .
2. A passagem da superfície da estrela para dentro do raio de Schwarzschild. Depois disto acontecer, existirão superfícies prisioneiras fechadas que rodeiam a estrela.
3. A formação de um horizonte de acontecimentos dentro da estrela, que se expande para o exterior, com área crescente, até que contém a estrela quando a superfície desta atravessa o raio de Schwarzschild, mantendo-se estacionário daí em diante.
4. O colapso inevitável em uma singularidade do espaço-tempo de densidade e curvatura infinitas, num tempo próprio finito de um observador em repouso na estrela.
5. A rápida aproximação da métrica fora do raio de Schwarzschild à métrica, estática e esfericamente simétrica, que é solução no vácuo das equações de Einstein (solução de Schwarzschild), isto é, a formação de um buraco negro.

Ou seja, a singularidade não é visível para observadores que se mantenham no exterior do raio de Schwarzschild. Isto quer dizer que a ruptura da teoria física actual que se espera que ocorra na singularidade não pode afectar o que acontece no exterior do raio de Schwarzschild e continuamos a poder prever o futuro dessa região exterior a partir de dados de Cauchy numa superfície espacial (ver capítulos 6 e 7).

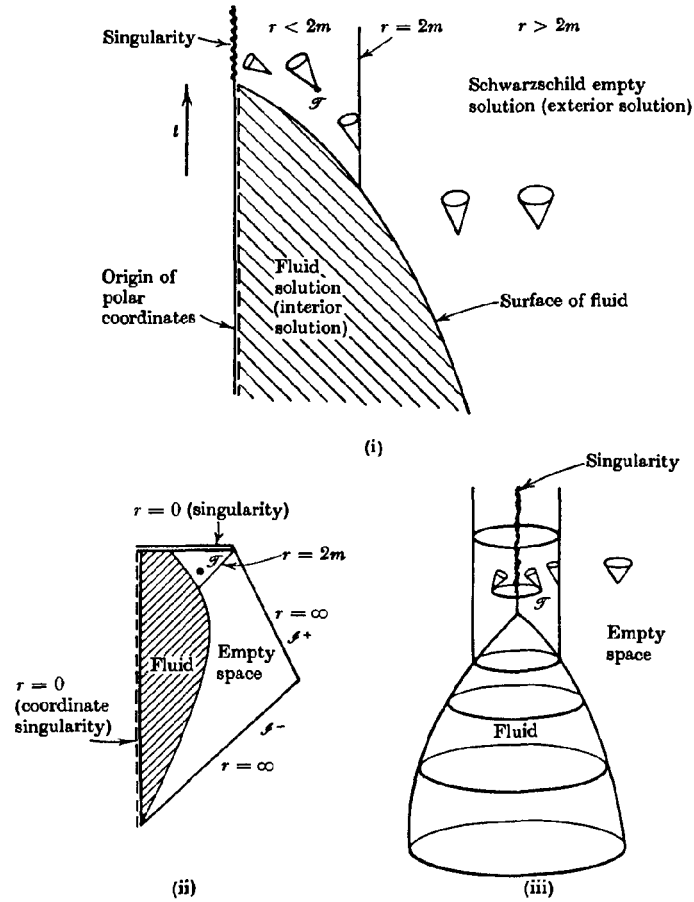
Pode perguntar-se se estas propriedades do colapso esférico são estáveis, isto é, se continuam válidas se os dados iniciais do colapso forem ligeiramente perturbados. Esta é uma questão vital pois nenhuma situação real de colapso será exactamente esférica. Pode provar-se, pela estabilidade do problema de Cauchy, que a propriedade 2. é estável, implicando, pelos teoremas de singularidades, a estabilidade da propriedade 4. Resta o problema da estabilidade da propriedade 3. Uma vez que a questão de saber se a singularidade é visível do exterior depende da solução para instantes arbitrariamente grandes, a estabilidade do problema de Cauchy não pode ser usada.

Esta questão permanece em aberto, sendo discutida no capítulo 11. No que se segue, partimos do princípio que a propriedade 3. se verifica e se forma um horizonte de acontecimentos e iremos usar a noção de infinito num espaço-tempo assintoticamente plano discutida no capítulo 4 para estudar a região exterior a um objecto esfericamente simétrico colapsado.

---

\* Apresentada em Hawking (1972), Hawking (1973) e Hawking e Ellis (1973).





**Figura 8.1 Colapso de uma estrela esférica.**

- (i) Diagrama de Finkelstein (plano  $(r, t)$ ) de uma bola de fluido esfericamente simétrica em colapso.
- (ii) Diagrama de Carter-Penrose da bola de fluido em colapso.
- (iii) Diagrama do colapso com apenas uma dimensão espacial suprimida.

## Censura cósmica

Como já vimos, a propriedade 3. da secção anterior pode ser interpretada como dizendo que é possível prever acontecimentos perto de  $\mathcal{F}^+$ . Isto implica que, em termos gerais, as singularidades previstas para o futuro deverão ter uma propriedade, que Penrose apelidou de censura cósmica, e que estabelece que estas deverão surgir apenas, muito convenientemente, em regiões como buracos negros, ocultos dos observadores exteriores. Desta forma, qualquer quebra de previsibilidade que possa ocorrer nestas singularidades não afectará o que se passa no mundo exterior. Crê-se que esta conjectura, ainda por provar, é verdadeira para dados iniciais e equações de estado ‘razoavelmente gerais’. Estas ideias podem ser postas numa base mais precisa usando os conceitos de espaços assintoticamente planos.

Suponhamos que um espaço-tempo  $(\mathcal{M}, g)$  tem uma região assintoticamente plana no sentido deste espaço-tempo ser fracamente assintoticamente simples e vazio (ver capítulo 4). Tal como vimos, nestas condições, é possível realizar um mergulho conforme da variedade do espaço-tempo  $\mathcal{M}$  numa variedade  $\overline{\mathcal{M}}$  com fronteira. A

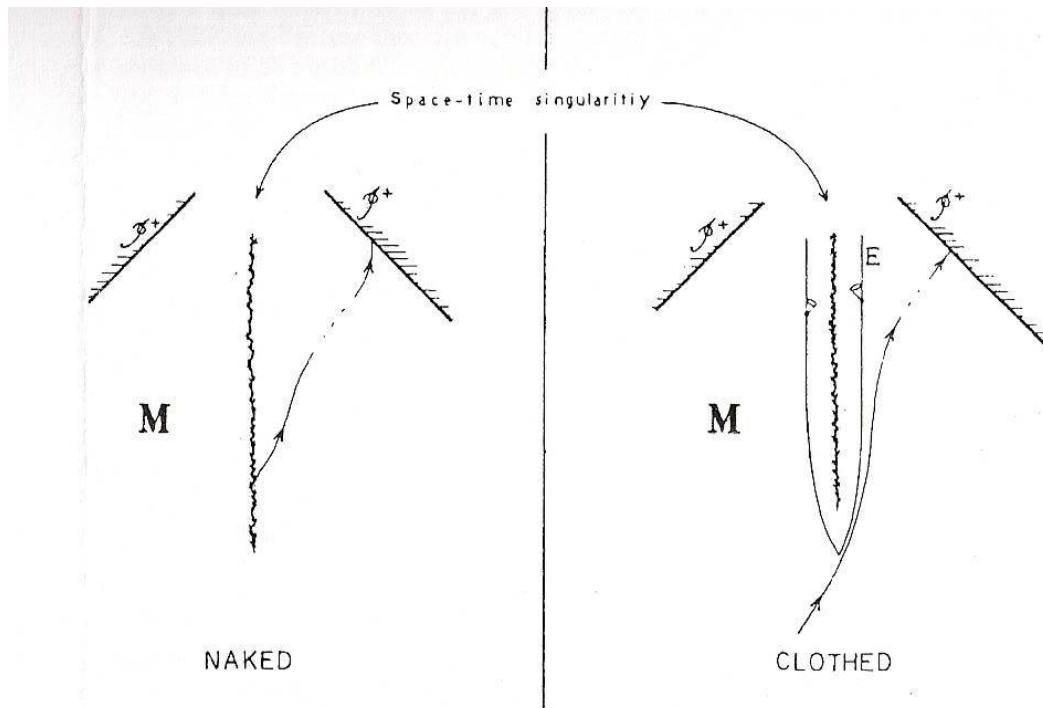
fronteira  $\partial\mathcal{M}$  será uma superfície nula e terá duas componentes, os infinitos nulos futuro e passado (ver figura 8.3).

Seja  $\mathcal{S}$  uma superfície de Cauchy parcial em  $\mathcal{M}$ . Diz-se que  $(\mathcal{M}, g)$  é assintoticamente previsível (no futuro) a partir de  $\mathcal{S}$  se  $\mathcal{F}^+$  está contida no fecho de  $D^+(\mathcal{S})$  na variedade conforme  $\tilde{\mathcal{M}}$ . Exemplos de espaços assintoticamente previsíveis no futuro a partir de uma superfície  $\mathcal{S}$  são a solução de Minkowski, Schwarzschild ( $M \geq 0$ ), Reissner-Nordström ( $M \geq |Q|$ ).

Isto implica que qualquer curva não-especial dirigida para o passado vinda de  $\mathcal{F}^+$  intersecta  $\mathcal{S}$  e não se aproxima da singularidade, ou seja, a singularidade não está contida em  $J^-(\mathcal{F}^+)$  e este é globalmente hiperbólico. Consideraremos ainda que as geratrizes de geodésicas nulas em  $\mathcal{F}^+$  são completas na métrica conforme.

Sendo válidas estas duas condições, diz-se que se verifica, em  $\mathcal{M}$ , a censura cósmica (fraca): não existem singularidades no futuro de  $\mathcal{S}$  que sejam nuas, isto é, que sejam visíveis a partir de  $\mathcal{F}^+$ . Uma representação esquemática de singularidades nuas e vestidas é apresentada na figura 8.2.

A hipótese de censura cósmica forte pode ser expressa, nesta linguagem, afirmando que todo o espaço-tempo é globalmente hiperbólico, ou seja, as singularidades não seriam visíveis, mesmo para aqueles observadores que se aproximam delas, já dentro da região interior ao horizonte de acontecimentos.



**Figura 8.2** Singularidades nuas e visíveis. A singularidade nua situa-se no passado de  $\mathcal{F}^+$ ; isso não acontece no caso da singularidade ser vestida.

## Horizonte de acontecimentos

Considere-se um espaço assimptoticamente previsível no futuro que não tenha singularidades no passado de  $\mathcal{S}$ . Suponhamos que existe uma superfície prisioneira fechada  $\mathcal{T}$  em  $D^+(\mathcal{S})$ . Então existirá uma singularidade no futuro de  $\mathcal{T}$ , isto é, existirá uma geodésica não-espacial em  $J^+(\mathcal{T})$  que é incompleta no futuro. Pode esta geodésica intersectar  $J^-(\mathcal{S}^+, \overline{\mathcal{M}})$ , ou seja, ser visível a partir de  $\mathcal{S}^+$ ? A resposta é que não\* (ver figura 8.1, no caso de um colapso esfericamente simétrico), desde que se verifique a condição  $R_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta \geq 0$ , para todos os vectores nulos  $k^\alpha$ .

Uma vez que  $J^-(\mathcal{S}^+)$  não contém  $\mathcal{T}$ , a sua fronteira  $J^-(\mathcal{S}^+)$  deve ser não vazia. Este é o horizonte de acontecimentos para  $\mathcal{S}^+$  e é a fronteira da região da qual partículas e fotões não podem escapar para o infinito.

A previsibilidade assintótica implica que  $D^+(\mathcal{S})$  contém  $J^+(\mathcal{S}) \cap J^-(\mathcal{S}^+)$ , isto é, contém todos os pontos no futuro de  $\mathcal{S}$  que estão no exterior do horizonte. No entanto, se existir um ponto no horizonte que não esteja em  $D^+(\mathcal{S})$ , uma pequena perturbação poderia resultar na existência de pontos perto de  $\mathcal{S}^+$  que não estariam em  $D^+(\mathcal{S})$ . Por esta razão, é conveniente reforçar a noção de previsibilidade assintótica. Diz-se que  $(\mathcal{M}, g)$  é fortemente assintoticamente previsível (no futuro) se é assintoticamente previsível e  $D^+(\mathcal{S})$  contém  $J^+(\mathcal{S}) \cap \overline{J^-(\mathcal{S}^+)}$ . Noutras palavras, pode prever-se uma vizinhança do horizonte de acontecimentos a partir de  $\mathcal{S}$ .

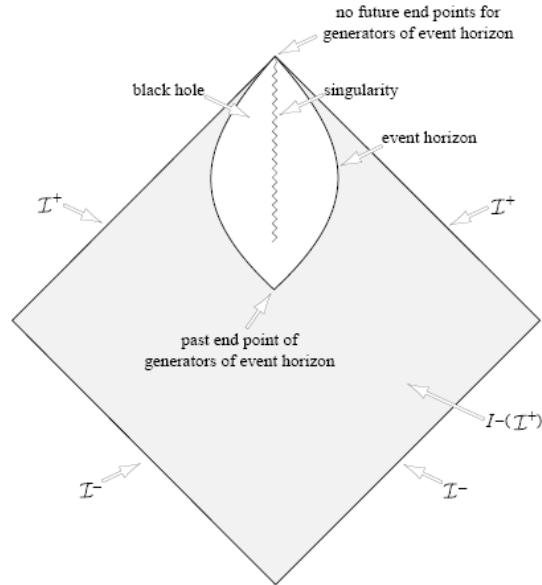
Num espaço-tempo deste tipo pode construir-se uma família de superfícies de Cauchy  $\mathcal{S}(t)$  ( $t > 0$ ) e, para tempos suficientemente grandes, as superfícies  $\mathcal{S}(t)$  intersectarão o horizonte de acontecimentos sendo que o conjunto  $\mathcal{B}(t)$  definido como  $\mathcal{S}(t) - J^-(\mathcal{S}^+)$  será não vazio. O buraco negro é definido como a componente conexa deste conjunto  $\mathcal{B}(t)$ , sendo a sua fronteira  $\partial\mathcal{B}(t)$ .

Como o horizonte de acontecimentos é também a fronteira do passado de  $\mathcal{S}^+$ , ele é gerado por segmentos de geodésica nula que podem ter pontos finais no passado, mas não no futuro (ver figura 8.3). Pode provar-se que, se a condição fraca sobre a energia for satisfeita, a convergência dessas geratrizes não pode ser positiva. Se isso acontecesse, elas intersectar-se-iam a uma distância afim finita.

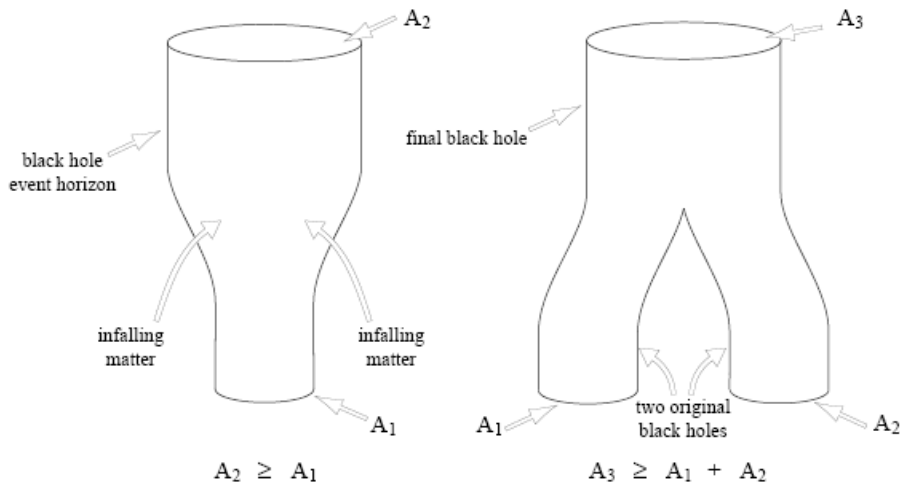
Com base nestas afirmações, pode provar-se que a área superficial de  $\partial\mathcal{B}(t)$  nunca pode diminuir com o tempo; na verdade, em geral, aumenta com o tempo. Mais ainda, se buracos negros colidirem e se fundirem, a área do buraco negro resultante será maior do que a soma das áreas da cada um dos buracos negros iniciais (ver figura 8.4). Daqui resulta também que um buraco negro não se pode cindir.†

\* Ver Hawking (1972), §2 e Hawking e Ellis (1973), prop.9.2.1.

† Ver Hawking (1972), §2.



**Figura 8.3** Uma estrela em colapso conformemente mergulhada numa variedade com bordo. O horizonte de eventos  $\mathcal{J}^-(\mathcal{S}^+)$  é a fronteira da região da qual não se pode escapar para  $\mathcal{S}^+$ .



**Figura 8.4** Quando enviamos matéria para o interior de um buraco negro ou permitimos que dois buracos negros se fundam, a área total dos horizontes de acontecimentos nunca diminui.

Esta situação e outras que não discutiremos aqui, que constituem as chamadas leis da mecânica dos buracos negros, têm uma semelhança notável com as leis da termodinâmica. Este facto levou à descoberta de Hawking que os buracos negros emitem radiação térmica. Este resultado foi o primeiro a surgir da aplicação da teoria quântica de campos ao espaço curvo e inaugurou o campo da gravidade quântica.

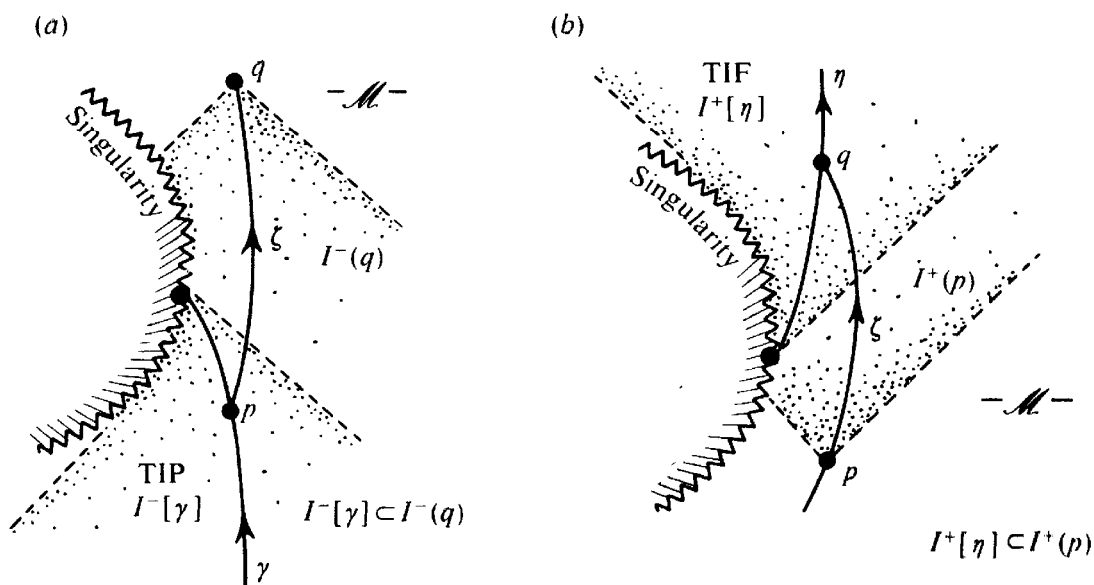
## 9. Censura cósmica II. Abordagem causal

Neste capítulo, apresentamos a formulação da conjectura de censura cósmica, tanto na sua versão forte como fraca, devidas a Penrose\*, baseada na caracterização de singularidades nuas com base na construção de pontos ideais do espaço-tempo, discutida no capítulo 4.

### Singularidades nuas

Iremos descrever singularidades nuas no contexto dos pontos ideais do espaço-tempo. Em primeiro lugar, a hipótese da censura cósmica não deveria excluir o *big bang* e o que sabemos é que tudo emerge dele mas nada cai nele. Portanto, podemos tentar definir uma singularidade nua como algo no qual uma curva temporal tanto pode entrar como sair. O problema do *big bang* está então resolvido por natureza: não está na classe das singularidades nuas.

Podemos então definir uma singularidade localmente nua como um TIP singular contido no passado  $I^-(q)$  de um ponto  $q \in \mathcal{M}$ , que designaremos como um TIP nu. Por outras palavras, um TIP nu é um TIP que está contido num PIP. De forma análoga, podemos definir uma singularidade localmente nua como um TIF singular contido no futuro  $I^+(p)$  de um ponto  $p \in \mathcal{M}$ , que designaremos como um TIF nu (ver figura 9.1).



**Figura 9.1** Uma singularidade localmente nua, situada no futuro de  $p$  e no passado de  $q$ .

a) A definição TIP

b) A definição TIF

\* Penrose apresentou a conjectura numa série de diferentes palestras em 1974 e 1978. Aqui, seguimos Penrose (1979), onde Penrose desenvolveu com mais pormenor alguns dos seus argumentos.

A conclusão desta definição é que existe, em cada caso, uma curva temporal  $\zeta$  (linha-mundo do observador) de um ponto  $p$  para um ponto  $q$ , tal que a singularidade está no futuro de  $p$  e no passado de  $q$ . Isto significa que, não só o observador pode ver a singularidade (nomeadamente a partir de  $q$ ) mas, num instante anterior da sua existência (nomeadamente em  $p$ ), a singularidade ainda está para ser produzida. Assim, vemos que o big bang não é qualificado como uma singularidade localmente nua, uma vez que nenhum observador existia antes de ele ser produzido.

A situação da figura 9.1 caracteriza assim estes pontos ideais como pertencendo a uma fronteira de  $\mathcal{M}$  que é do tipo temporal. Pois, se estendermos  $\zeta$  na figura 9.1.a) de modo a tornar-se uma curva temporal sem limite no futuro  $\zeta'$  temos que  $\Gamma[\gamma] \subset \Gamma(q)$ ,  $q \in \Gamma[\zeta']$ , que é a condição para o TIP  $\Gamma[\gamma]$  estar contido no passado cronológico do TIP  $\Gamma[\zeta']$ . Da mesma forma, a figura 9.1.b) dá-nos que  $\Gamma^+[\eta] \subset \Gamma^+(p)$ ,  $p \in \Gamma^+[\zeta'']$ , que é a condição para o TIF  $\Gamma^+[\eta]$  estar contido no futuro cronológico do TIF  $\Gamma^+[\zeta'']$ , sendo que  $\zeta''$  é uma curva temporal sem limite no passado estendida a partir de  $\zeta$ .

## Censura cósmica

Pode dizer-se, então, que  $\mathcal{M}$  está de acordo com a hipótese de censura cósmica se o tipo de singularidades localmente nuas representadas na figura 9.1 não ocorrer\*. Das observações feitas na secção anterior, vemos que excluir configurações do tipo da figura 9.1a) é equivalente a dizer que os pontos ideais futuros constituem uma fronteira futura semi-espacial (espacial ou nula) de  $\mathcal{M}$ , enquanto que excluir configurações do tipo da figura 9.1b) é equivalente a dizer que os pontos ideais passados constituem uma fronteira passada semi-espacial de  $\mathcal{M}$ .

Usando as propriedades de um espaço-tempo globalmente hiperbólico (capítulo 3) e as propriedades dos pontos ideais do espaço-tempo (capítulo 4), pode ver-se que excluir qualquer um deste tipo de configurações em  $\mathcal{M}$  é equivalente a excluir o outro, uma vez que pode provar-se que cada um deles é equivalente a condição (simétrica no tempo) que  $\mathcal{M}$  seja globalmente hiperbólico. Assim, pode provar-se que se  $\mathcal{M}$  contém um ponto  $q$  e uma curva temporal sem limite no futuro  $\gamma$  de modo que  $\Gamma[\gamma] \subset \Gamma(q)$ , então  $\mathcal{M}$  não pode ser globalmente hiperbólico, assim como se pode provar a validade do argumento inverso.†

A proposta de Penrose para a conjectura de censura cósmica forte é então que

*‘Um espaço-tempo clássico  $\mathcal{M}$  fisicamente razoável tenha de satisfazer a propriedade que pode ser expressa em qualquer uma das seguintes formas equivalentes: nenhum TIP está inteiramente contido num PIP; nenhum TIF está inteiramente contido num PIF; os TIPs formam um conjunto semi-espacial; os TIFs formam um conjunto semi-espacial;  $\mathcal{M}$  é globalmente hiperbólico;  $\mathcal{M}$  tem uma superfície de Cauchy.’*

---

\* Nesta formulação podem incluir-se, não só TIPs e TIFs singulares (tal como na figura 9.1) mas também ‘pontos nus no infinito’. Ver discussão em Penrose (1979), pág. 623.

† Ver Penrose (1979), pág. 624.

Podemos também exprimir a hipótese de censura cósmica fraca nesta linguagem: basta substituir PIP por  $\infty$ -TIP.

É de notar que, a verificar-se a censura cósmica forte, as singularidades genéricas agrupam-se em duas classes: as de tipo passado, definidas por TIFs e as de tipo futuro, definidas por TIPs. As singularidades nuas poderiam fundir as duas possibilidades numa só, visto que uma singularidade nua seria simultaneamente um TIP e um TIF. Desta forma é realmente uma consequência da censura cósmica que estas duas classes são disjuntas. Como exemplos típicos da primeira temos o *big bang* e os buracos brancos (se existirem) e como exemplos da segunda temos as singularidades no interior dos buracos negros e o *big crunch* (se existir).

## 10. Censura cósmica III. Abordagem evolutiva

*‘Em relação ao problema global do valor inicial só podemos, actualmente, formular conjecturas, e não provar teoremas. No entanto, as conjecturas podem estimular o pensamento e, apesar de não serem mais do que palpites, servem como marcos de sinalização no nosso árduo caminho em direcção à compreensão.’*

Christodoulou (1999)

Neste capítulo iremos apresentar a formulação das conjecturas da censura cósmica, tanto na sua versão fraca como forte, elaboradas por Christodoulou\*, assim como uma breve discussão do trabalho do mesmo autor sobre o campo escalar esfericamente simétrico, que servirá como introdução ao capítulo 11.

### **Censura cósmica fraca**

A caracterização de singularidades nuas de acordo com Hawking ou Penrose discutida nos dois últimos capítulos não faz sentido do ponto de vista do problema de Cauchy (ver capítulo 7), uma vez que a extensão máxima de um espaço-tempo com uma singularidade nua não é globalmente hiperbólica, ou seja, não é unicamente caracterizada pelos dados iniciais. Deste ponto de vista, devemos considerar o desenvolvimento máximo dos dados iniciais e caracterizá-lo numa situação de possível ocorrência de singularidades nuas. Na figura 10.1 é apresentado o diagrama CP de um espaço-tempo com uma singularidade nua (por exemplo, ver figura 4.16(ii)), em que é representada uma superfície de Cauchy  $\Sigma$  e o seu desenvolvimento máximo (a região mais escura). Vemos então que a ocorrência da singularidade nua implica que, do ponto de vista da região do espaço-tempo incluída em  $D(\Sigma)$ ,  $\mathcal{I}^+$  seja incompleto. Este caso não é, no entanto, genérico, uma vez que a hipersuperfície de dados iniciais é já ‘singular’ pois é geodesicamente incompleta. A formação dinâmica de uma singularidade nua a partir de um conjunto de dados iniciais completo e regular é representada na figura 10.2, onde vemos que  $\mathcal{I}^+$  é incompleto.

A conjectura da censura cósmica fraca segundo Christodoulou é então enunciada da seguinte forma:

*‘Um conjunto de dados iniciais assintoticamente plano genérico tem um desenvolvimento futuro máximo que possui um infinito nulo futuro completo.’*

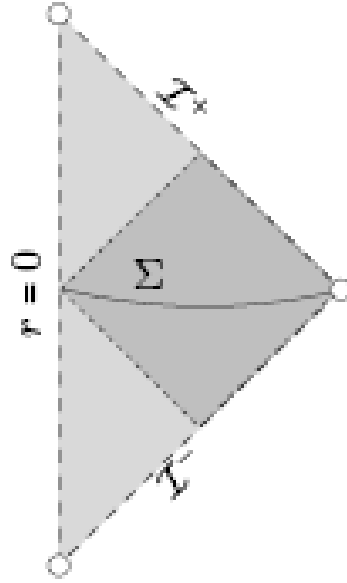
Em relação à noção de infinito nulo futuro completo, a definição matemática que é comum na literatura, e que foi apresentada no capítulo 4, refere-se a uma compactificação conforme do espaço-tempo que lhe atribui uma fronteira no infinito de forma que satisfaça determinadas condições de regularidade. Estas são, por sua vez, equivalentes a determinadas condições de decaimento da curvatura do espaço-tempo ao longo de geodésicas nulas dirigidas para o futuro. No sentido de separar as questões da censura cósmica da do comportamento assintótico, Christodoulou redefiniu o que se entende por infinito nulo futuro completo.

---

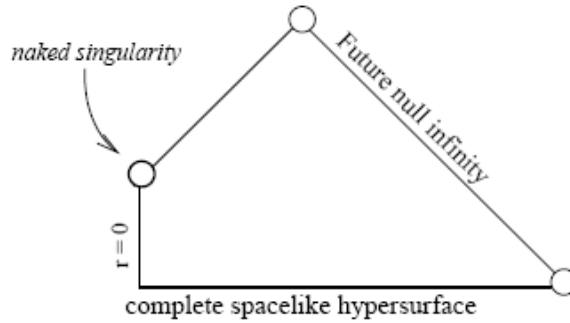
\* Apresentadas em Christodoulou (1999).



Como base desta redefinição toma-se um corolário do trabalho de Christodoulou e Klainerman sobre a estabilidade do espaço-tempo de Minkowski.



**Figura 10.1** Infinito nulo futuro incompleto, num espaço-tempo contendo uma singularidade nua.



**Figura 10.2** Singularidade nua formada a partir de um conjunto de dados iniciais completo.

Diz-se que um conjunto de dados iniciais,  $(\Sigma, h, K)$  é assintoticamente plano se existe um conjunto compacto  $\mathcal{K} \subset \Sigma$  e um sistema de coordenadas em  $\Sigma \setminus \mathcal{K}$ , que é um difeomorfismo para o complemento de uma bola em  $\mathbb{R}^3$ , e para o qual

$$h_{ij} = \left(1 + \frac{2M}{r}\right) \delta_{ij} + o_2(r^{-1}) \quad \text{e} \quad K_{ij} = o_1(r^{-2}) \quad (10.1)$$

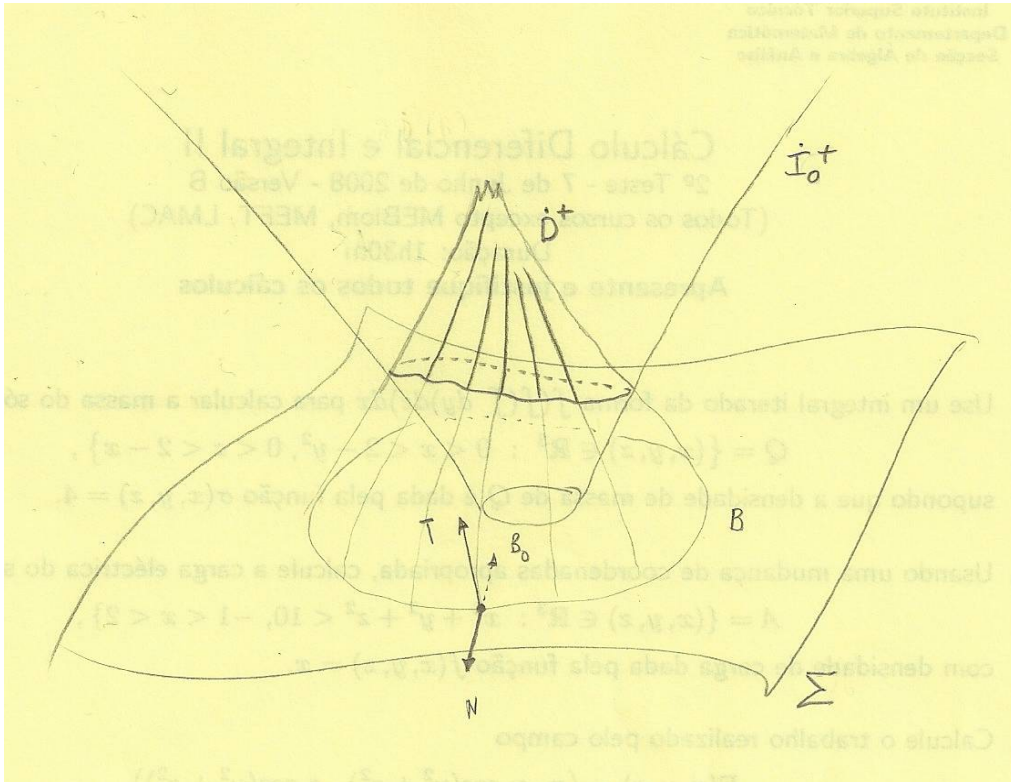
onde  $\delta_{ij}$  é a métrica euclidiana e  $r$  é a coordenada polar euclidiana.

Christodoulou e Klainerman provaram que, qualquer conjunto de dados iniciais assintoticamente plano suficientemente perto dos dados triviais  $(\Sigma_0, h_0, K_0)$ , onde  $\Sigma_0 = \mathbb{R}^3$ ,  $h_0$  é a métrica euclidiana e  $K_0 = 0$ , tem um desenvolvimento máximo  $(\mathcal{M}, g)$  geodesicamente completo e globalmente assintoticamente plano (isto é, o tensor de

Riemann tende para zero ao longo de qualquer geodésica quando o seu parâmetro afim tende para infinito). As ferramentas matemáticas utilizadas neste trabalho não são contudo, ainda, capazes de lidar com o caso global do valor inicial, isto é, quando os dados iniciais não estão confinados numa vizinhança adequada dos dados triviais.

Christodoulou e Klainerman provaram ainda que, para qualquer conjunto de dados iniciais assintoticamente plano  $(\Sigma, h, K)$ , se pode encontrar um domínio  $\mathcal{B}_0$  com fecho compacto em  $\Sigma$  tal que  $\dot{I}_0^+$ , a fronteira do seu domínio de influência em  $(\mathcal{M}, g)$ , o desenvolvimento futuro máximo de  $(\Sigma, h, K)$ , tenha geratrizes de geodésicas nulas completas.

Diz-se, então, que o desenvolvimento futuro máximo  $(\mathcal{M}, g)$  de um conjunto de dados iniciais assintoticamente plano  $(\Sigma, h, K)$  possui um infinito nulo futuro completo se, para qualquer número real  $A$ , se puder encontrar um domínio  $\mathcal{B}$  em  $\Sigma$ , contendo  $\mathcal{B}_0$ , tal que  $\dot{D}^+$ , a fronteira do seu domínio de dependência em  $(\mathcal{M}, g)$ , tenha a propriedade que cada um dos seus geradores de geodésicas nulas tenha um comprimento afim, medido a partir de  $\dot{D}^+ \cap \dot{I}_0^+$ , igual ou superior a  $A$  (ver figura 10.3).\*



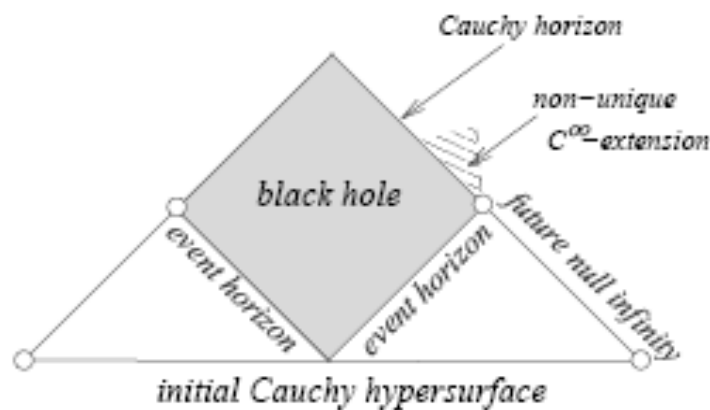
**Figura 10.3** Desenvolvimento futuro máximo de um conjunto de dados iniciais assintoticamente plano possuindo um infinito nulo futuro completo.

\* Nesta definição, o campo tangente geodésico nulo  $L_-$  correspondendo a  $\dot{D}^+$  está normalizado em  $\partial\mathcal{B}$ , a fronteira de  $\mathcal{B}$  em  $\Sigma$ , pela condição  $L_- = T - N$ , onde  $N$  é o vector normal a  $\partial\mathcal{B}$  em  $\Sigma$ , unitário dirigido para fora, e  $T$  é o vector normal a  $\Sigma$  em  $\mathcal{M}$ , dirigido para o futuro. A função do parâmetro afim de  $L_-$  é tida como igual a zero em  $\dot{D}^+ \cap \dot{I}_0^+$ , sendo necessário que toda a geratriz de geodésicas nulas de  $\dot{D}^+$  intersecte  $\dot{I}_0^+$ .

Esta definição generaliza a situação no espaço-tempo de Schwarzschild, em que o infinito nulo futuro é completo. Mais especificamente, normalizando uma sequência de vectores nulos radiais dirigidos para dentro por transporte paralelo ao longo de uma geodésica dirigida para fora, que encontra  $I^+$ , o comprimento afim das geodésicas nulas geradas por esses vectores tende para infinito. Em termos intuitivos, isto significa que, se desprezarmos condições iniciais excepcionais, não serão observadas singularidades no infinito, mesmo que a observação a partir do infinito se prolongue indefinidamente.

## Censura cósmica forte

Relembremos a ocorrência de uma singularidade do tipo temporal e localmente visível, tal como no caso da solução de Reissner-Nordström (ver figura 4.15). Vemos então que um desenvolvimento máximo de um conjunto completo de dados iniciais, no caso de tal tipo de singularidade ocorrer, será do tipo representado no diagrama CP da figura 10.4. Pontos além do horizonte de Cauchy não fazem parte do desenvolvimento máximo mas isso não quer dizer que o espaço-tempo não possa ser estendido a essa região! É claro, no entanto, que essas extensões não são determinadas pelos dados iniciais. Somos levados, então, à possibilidade espectacular de uma perda de previsibilidade no contexto de uma teoria clássica e (supostamente) determinista. A censura cósmica forte deverá servir para excluir este tipo de situações, pelo menos no caso genérico. A formulação original de Penrose desta conjectura baseou-se, de facto, em indícios de que o horizonte de Cauchy da solução de Reissner-Nordström era instável, assunto que discutiremos no próximo capítulo.



**Figura 10.4** Formação de um horizonte de Cauchy e possibilidade de extensão a uma região não prevista pelos dados iniciais.

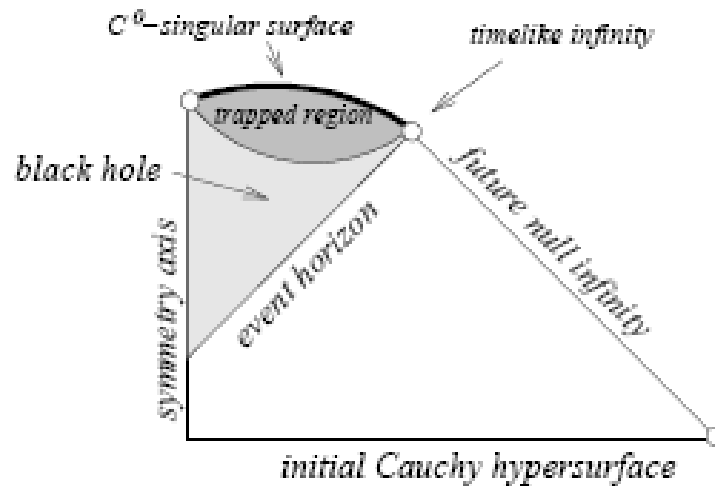
A conjectura da censura cósmica forte segundo Christodoulou é então enunciada da seguinte forma:

*‘Um conjunto de dados iniciais assintoticamente plano genérico tem um desenvolvimento futuro máximo que é localmente inextensível como uma variedade lorentziana de uma forma contínua.’*

Aqui, a condição de continuidade da extensão refere-se à métrica. De acordo com esta formulação, ao longo de uma geodésica temporal inextensível, dirigida para o futuro, de comprimento de arco limitado, as componentes da curvatura do espaço-tempo num sistema ortonormal paralelamente transportado ao longo da geodésica (ver capítulo 1) devem explodir quando o valor do comprimento de arco se aproxima do valor limite, assim como a matriz de deformação correspondente, que exprime as componentes de um campo de Jacobi ao longo da geodésica (ver capítulo 5).

Em termos intuitivos, esta conjectura diz-nos que sempre que tenhamos uma geodésica incompleta isso dever-se-á à quebra da métrica no sentido acima referido. Os teoremas de ‘singularidades’ de Hawking e Penrose só o serão realmente (e não apenas teoremas de incompletude) se esta conjectura for válida! Podemos ver que, para isto se verificar, os horizontes interiores da solução de Reissner-Nordström (e também de Kerr) deverão ser instáveis a perturbações (ver próximo capítulo).

O conteúdo das conjecturas de censura cósmica fraca e forte pode ser resumido no diagrama CP apresentado na figura 10.5, que representa o estado clássico final de um colapso gravitacional genérico.



**Figura 10.5** Conjectura clássica de um colapso gravitacional genérico.

A prova destas duas conjecturas, sem pressupostos adicionais de simetria, constitui, provavelmente, o principal ‘motor’ de desenvolvimento da matemática física na área da relatividade.

Um dos primeiros passos que se deve dar neste sentido é a compreensão total de um problema ‘realista’ esfericamente simétrico, isto é, uma análise rigorosa do problema global do valor inicial para um sistema apropriado de equações de Einstein acopladas a matéria\*, com dados iniciais regulares esfericamente simétricos, culminando numa prova ou refutação destas conjecturas.

A regularidade dos dados iniciais é um ponto essencial no carácter ‘genérico’ da solução pretendida, pois uma limitação dos teoremas de singularidades está relacionada com o facto de que uma superfície prisioneira fechada está presente nos dados iniciais. Os métodos empregues por Hawking e Penrose não são capazes de demonstrar que o conceito de superfície prisioneira fechada é evolutivo, isto é, que estas se formarão

---

\* Uma vez que a única solução esfericamente simétrica das equações de Einstein no vácuo é a solução de Schwarzschild, então a matéria tem de ser incluída de modo que o sistema que goze de simetria esférica tenha os graus de liberdade suficientes.

durante a evolução de um sistema que parte de dados iniciais em que elas não estejam presentes.

O colapso gravitacional esférico tem sido amplamente estudado, em particular usando um modelo de matéria de fluido ‘poeira’ ( $P=0$ ). Foram encontrados numerosos exemplos em que ocorriam singularidades nuas. No entanto, estes exemplos não são genéricos uma vez que, ou se baseiam em propriedades da matéria de fluido que também permitem a formação de singularidades durante a evolução num espaço-tempo plano ou dependem crucialmente da capacidade em se fazer um ‘*fine-tuning*’ nas condições iniciais de modo a produzir densidades infinitas antes da gravidade do sistema se tornar grande, tal como no caso das chamadas singularidades de ‘cruzamento de camadas’\*.

O caso genérico de um sistema esfericamente simétrico com um modelo de matéria conveniente, mas em que os efeitos do momento angular são ignorados, foi resolvido por Christodoulou numa série de artigos<sup>†</sup> em que considera um campo escalar real sem massa. Este, acoplado com um campo gravitacional constitui o chamado sistema Einstein-campo escalar que, na ausência da gravidade, obedece à equação de onda clássica e não desenvolve singularidades. Para soluções genéricas deste problema de valor inicial, o diagrama CP obtido por Christodoulou é do tipo da figura 10.4, mas também foram encontradas soluções instáveis com diagramas do tipo da figura 10.2.

A formação dinâmica destas soluções, a partir de um conjunto de dados iniciais não-vazio, mas que Christodoulou provou que pode ser considerado excepcional, mostra que o termo ‘genérico’ não pode ser removido da conjectura de censura cósmica fraca.

A construção de métodos análogos aos utilizados por Christodoulou para casos sem simetria esférica, em particular com a introdução de momento angular, e a sua eficácia no ataque ao problema do valor inicial são ainda incógnitas. No entanto, já foram dados alguns passos promissores, dos quais iremos dar conta no próximo capítulo.

---

\* *Shell crossing*, em Inglês.

<sup>†</sup> Um resumo deste trabalho é apresentado em Christodoulou (1999), onde se encontram referências aos artigos originais.

## 11. Desafiando a censura cósmica I. Estabilidade

No capítulo 4 estudamos a estrutura conforme do espaço-tempo de Reissner-Nordström (RN) e algumas das suas propriedades surpreendentes. Neste capítulo iremos usar este espaço-tempo como exemplo para estudarmos uma abordagem à questão da censura cósmica que lida com a estabilidade dos horizontes de Cauchy. Esta abordagem está na base dos desenvolvimentos recentes mais promissores quanto à prova ou refutação da conjectura da censura cósmica, nomeadamente o trabalho de Dafermos que se baseou no trabalho pioneiro desenvolvido por Christodoulou.

### *Extensão máxima do espaço-tempo RN*

A métrica deste espaço-tempo é dada por:  $ds^2 = -f dt^2 + f^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$ , onde  $f = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$ . Esta função tem zeros em  $r = r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2}$ , definindo dois horizontes, um exterior ( $r_+$ ) e outro interior ( $r_-$ ). Como vimos no capítulo 4, se  $|Q| \leq M$  o espaço-tempo contém um buraco negro (isto é, uma singularidade envolta num horizonte de eventos) mas se  $|Q| > M$ , a solução descreve uma singularidade nua (ver figuras 4.13 e 4.14). Daqui para a frente consideraremos o caso  $|Q| \leq M$ . Vejamos então como se faz a extensão da métrica nas coordenadas  $(t, r)$  através dos horizontes.\*

As coordenadas  $(t, r)$  são singulares no horizonte exterior e temos de introduzir novas coordenadas para poder atravessar esta superfície. Como veremos, estas coordenadas não serão regulares no horizonte interior e outro sistema de coordenadas será ainda necessário para se atravessar esta superfície.

Consideremos, primeiro, o horizonte exterior. Definindo a coordenada  $r^* = \int f^{-1} dr$  e aproximando a função  $f$  nas redondezas de  $r_+$ , pode escrever-se que, perto

de  $r_+$ ,  $r^* \cong \frac{1}{2k_+} \ln|k_+(r - r_+)|$ , em que  $k_+ \equiv \frac{1}{2}f'(r_+)^{\dagger}$ . Introduzindo as coordenadas nulas

$u = t - r^*$  e  $v = t + r^*$ , a superfície  $r = r_+$  é caracterizada por  $v - u = -\infty$ , definindo-se as coordenadas de Kruskal:  $U_+ = \mp e^{-k_+ u}$  e  $V_+ = e^{k_+ v}$ , em que o sinal de cima se refere a  $r > r_+$  e o sinal de baixo a  $r < r_+$ . Perto de  $r = r_+$ ,  $f \cong -2 U_+ V_+$  de modo que a métrica se transforma em  $ds^2 \cong -\frac{2}{k_+^2} dU_+ dV_+ + r_+^2 d\Omega^2$ .<sup>‡</sup> As quatro zonas da extensão máxima da

solução de RN cobertas por estas coordenadas estão representadas na figura 11.1. Estas coordenadas funcionam apenas para  $r > r_-$ .

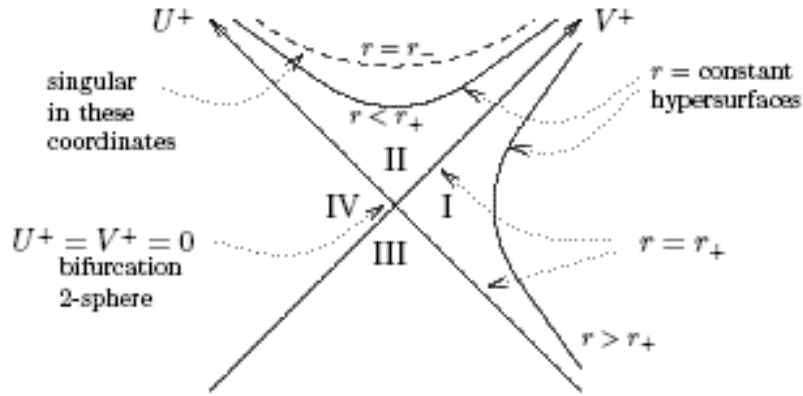
De modo a estendermos a métrica além do horizonte interior, devem definir-se novas coordenadas de Kruskal e, aproximando a função  $f$  nas redondezas de  $r_-$ , pode escrever-se que, perto de  $r_-$ ,  $r^* \cong -\frac{1}{2k_-} \ln|k_-(r - r_-)|$ , em que  $k_- \equiv \frac{1}{2}|f'(r_-)|$ . Usando as

\* Aqui seguimos o tratamento de Poisson (2004), cap. 5.

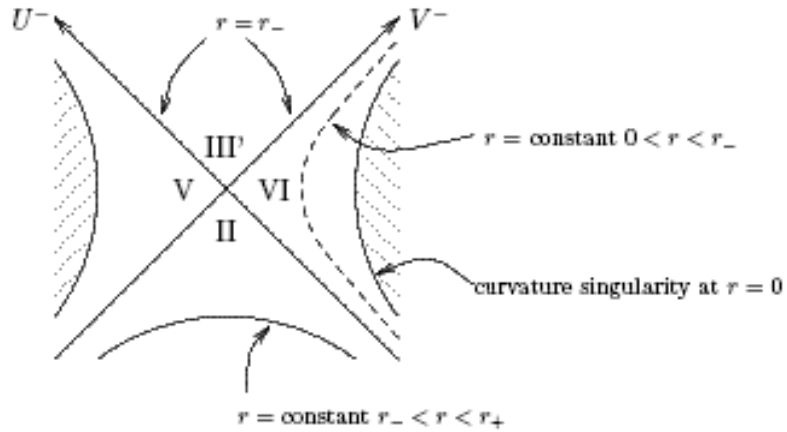
<sup>†</sup> Esta grandeza também se denomina gravidade superficial do horizonte.

<sup>‡</sup> Para a expressão exacta da métrica nas coordenadas  $(U_+, V_+)$ , ver Townsend (1997), cap.3.

mesmas coordenadas nulas, a superfície  $r = r_-$  é caracterizada por  $v - u = +\infty$ , definindo-se as coordenadas de Kruskal:  $U_- = \mp e^{k_- u}$  e  $V_- = -e^{-k_- v}$ , em que o sinal de cima se refere a  $r > r_-$  e o sinal de baixo a  $r < r_-$ . Perto de  $r = r_-$ ,  $f \cong -2 U_- V_-$  de modo que a métrica se transforma em  $ds^2 \cong -\frac{2}{k_-^2} dU_- dV_- + r_-^2 d\Omega^2$ .<sup>\*</sup> As quatro zonas da extensão máxima da solução de RN cobertas por estas coordenadas estão representadas na figura 11.2.



**Figura 11.1** As quatro zonas da extensão máxima da solução de RN cobertas pelas coordenadas  $(U_+, V_+)$ . Quando para  $r_- < r < r_+$ ,  $f < 0$  sendo  $r$  uma coordenada do tipo temporal; qualquer superfície  $r = \text{constante}$  nessa zona é assim uma hipersuperfície espacial.



**Figura 11.2** As quatro zonas da extensão máxima da solução de RN cobertas pelas coordenadas  $(U_-, V_-)$ . As regiões V e VI contêm uma singularidade em  $r = 0$ , que é do tipo temporal pois quando para  $r < r_-$ ,  $f > 0$  sendo  $r$  uma coordenada do tipo espacial; qualquer superfície  $r = \text{constante} < r_-$  é assim uma hipersuperfície temporal, e isto inclui a singularidade.

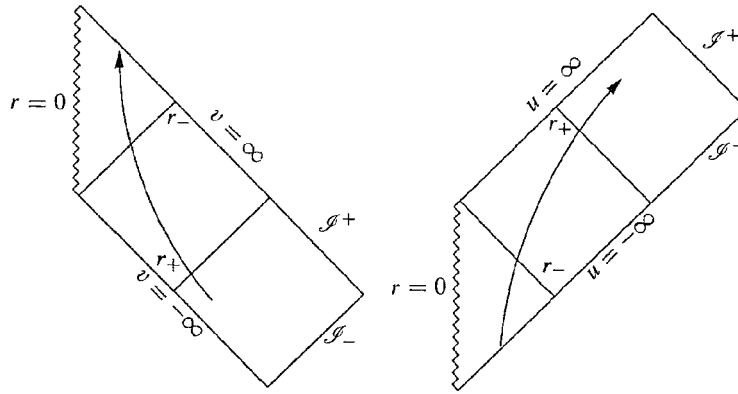
Depois de atravessar o horizonte exterior, mas antes de atravessar o horizonte interior, um observador verá  $r$  como uma coordenada do tipo temporal, sendo que o movimento apenas pode decorrer no sentido de  $r$  decrescente. No entanto, após

<sup>\*</sup> Para a expressão exacta da métrica nas coordenadas  $(U_+, V_+)$ , ver Townsend (1997), cap.3.

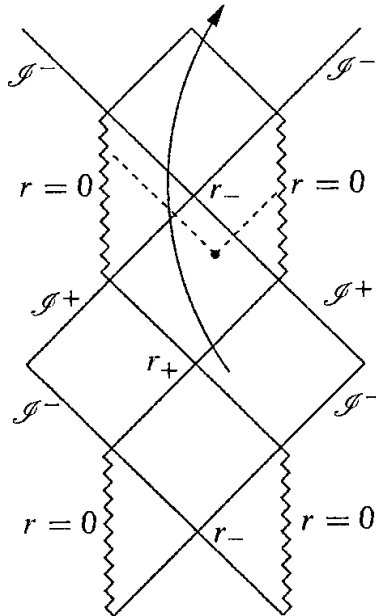
atravessar o horizonte interior,  $f > 0$ , sendo  $r$  novamente uma coordenada do tipo espacial logo será possível uma inversão do sentido do movimento.

Se observarmos o movimento geodésico de um observador em queda livre no espaço-tempo RN, numa direcção radial e inicialmente dirigido para dentro, e usando sistemas de coordenadas de Eddington-Finkelstein  $(v, r)^*$ , é possível verificar que o observador tem um ponto de viragem para  $r_{\min} < r_-$  e que o sistema de coordenadas se torna singular na 2ª passagem pelo horizonte exterior, pelo que se torna necessário a introdução das coordenadas  $(u, r)$  nas quais o movimento dirigido para o exterior é passível de descrição, sendo que o observador atravessa os dois horizontes novamente e atinge uma zona do universo equivalente aquela da qual partiu (isto é, assintoticamente plana). Estes dois movimentos estão representados na figura 11.3.

Podemos ‘colar’ estes dois referenciais de coordenadas e obtemos a figura completa no que respeita ao atravessar do ‘túnel’ da solução de RN (ver figura 11.4).



**Figura 11.3** ‘Remendos’ de Eddington-Finkelstein para o espaço-tempo RN.



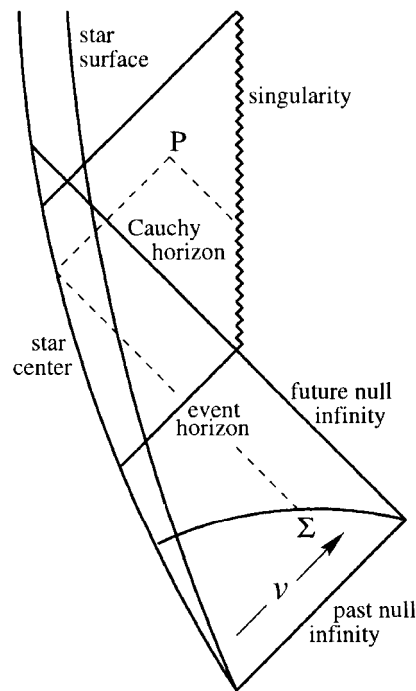
**Figura 11.4** Diagrama de Carter-Penrose do espaço-tempo RN, mostrando o atravessar do ‘túnel’. A região delimitada pelos horizontes exterior e interior contém superfícies prisioneiras fechadas.

\* Em que a métrica assume a forma  $ds^2 = -fdv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2$ .



## Horizontes de Cauchy do espaço-tempo RN

O espaço-tempo RN é, claramente, um contra-exemplo à hipótese de censura cósmica forte: este espaço-tempo contém um horizonte de Cauchy; o ramo dirigido para dentro do horizonte interior é um horizonte de Cauchy para qualquer hipersuperfície  $\Sigma$  que preceda a formação do horizonte de eventos (ver figura 11.5). A origem física deste horizonte é também clara: qualquer previsão feita para um ponto no futuro deste horizonte seria perturbada por sinais com origem na singularidade temporal, onde as leis actuais da física não funcionam.



**Figura 11.5** Diagrama de Carter-Penrose do espaço-tempo RN, mostrando o horizonte de Cauchy da hipersuperfície  $\Sigma$ .

As extensões a regiões para além do horizonte de Cauchy não são determinadas pelo conjunto de dados iniciais, sendo que essas regiões não fazem parte do desenvolvimento máximo e o espaço-tempo deixa aí de ser globalmente hiperbólico. O que falha na fronteira do domínio do desenvolvimento máximo não é a regularidade das soluções, mas sim o seu carácter globalmente hiperbólico: qualquer extensão conteria geodésicas causais inextensíveis dirigidas para o passado que não intersectam a hipersuperfície inicial.

A questão fundamental é descobrir se este contra-exemplo à censura cósmica fraca é estável a uma perturbação das condições iniciais. Os espaços-tempo com horizontes de Cauchy instáveis formarão um conjunto de medida zero, num determinado espaço topológico de espaços-tempo e não serão, portanto, uma 'ameaça real' à censura cósmica

## ***Instabilidade do horizonte de Cauchy***

Os espaços-tempo de RN são muito especiais pois, além de resultarem de condições iniciais muito especiais, são esfericamente simétricos. Desde muito cedo se soube que pequenas alterações a estas condições, sob a forma de campos de matéria dependentes do tempo ou ondas gravitacionais, produzem grandes efeitos no horizonte de Cauchy. Os trabalhos de Simpson e Penrose, em 1973, e outros, culminando no trabalho de Chandrasekhar e Hartle, em 1982, mostraram que quantidades físicas associadas com a perturbação, tal como a densidade de energia medida por um observador em queda livre, divergem no horizonte de Cauchy\*. Ou seja, o horizonte de Cauchy é instável a perturbações dependentes do tempo, o mesmo acontecendo nos casos das soluções de Kerr e Kerr-Newman. Isto é uma indicação que estes espaços-tempo talvez formem um conjunto de medida nula.

No entanto, esta análise não é suficiente pois envolve apenas campos de teste num espaço-tempo de *background* fixo. O que é fundamental descobrir é como o espaço-tempo, em si, evolui a partir de uma escolha de dados iniciais ligeiramente diferente. Foi esta questão que Poisson e Israel, e outros, estudaram considerando um buraco negro esférico carregado isolado descrito pela métrica RN. Os dados iniciais no horizonte de eventos, que determinariam a evolução da estrutura interna de um buraco negro isolado, obedecem à lei de Price† de decaimento dos campos de radiação, enquanto que a radiação gravitacional que penetra no buraco negro e é parcialmente dispersa pela curvatura do espaço-tempo é modelada por dois fluxos radiais, um dirigido para dentro e outro para fora, que se intersectam e cuja interacção (não linear) determina a estrutura interna do buraco negro. A conclusão destes estudos é que as perturbações destroem o horizonte de Cauchy dando lugar a uma singularidade de curvatura nula caracterizada pelo crescimento infinito de uma função de massa interna no horizonte de Cauchy, a chamada ‘singularidade da inflação de massa’.

No que se segue, e de forma a ilustrar estas ideias, consideraremos um modelo ainda mais simplificado em que se toma o fluxo de radiação como sendo apenas dirigido para dentro. Este modelo‡ permite compreender, na sua forma mais simples, a manifestação do desvio para o azul do fluxo de radiação nas proximidades do horizonte de Cauchy.

Considere-se, então, a forma da métrica  $ds^2 = -fdv^2 + 2dvdr + r^2d\Omega^2$ , com  $f = 1 - \frac{2m(v)}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$ , a chamada métrica de Vaidya, em que  $v$  é uma coordenada que corre para dentro ao longo do horizonte de eventos e  $m(v)$  é uma função arbitrária de  $v$  que deve ser especificada com condições-fronteira. Esta métrica é a solução das equações de Einstein com um tensor de energia-momento  $T^{\alpha\beta} = \rho l^\alpha l^\beta$ , em que  $l_\alpha = -\partial_\alpha v$  é o vector nulo radial apontando para dentro e  $4\pi r^2 \rho = dm/dv \equiv L(v)$ . O fluido move-se paralelamente ao horizonte de Cauchy, ao longo de geodésicas nulas. Se  $\rho = 0$ , temos a solução de RN. Se uma quantidade finita de energia entra no buraco negro, então  $L(v) \rightarrow 0$  quando  $v \rightarrow \infty$ . De modo a satisfazer-se a lei de Price, toma-se  $L(v) \sim v^{-p}$  (com  $p$  maior do que 2), sendo que  $m(v) = m_0 - \mu(v)$ .

---

\* O chamado desvio para o azul.

† Esta lei está relacionada com o mecanismo pelo qual um sistema não esférico irradia momentos multipolares para o infinito, ou para dentro do buraco negro, de modo a chegar a um estado final simétrico. A radiação deve, assim, decair ao longo do horizonte de acontecimentos.

‡ Aqui seguimos Poisson (1997) e Frolov e Novikov (1997), cap.14.

Considere-se agora um observador em queda livre dentro do buraco negro. Ao encontrar o fluido, o observador medirá a sua densidade de energia como sendo  $T_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta$ , em que  $u^\alpha$  é a 4-velocidade do observador. Poisson e Israel mostraram que, conforme o observador se aproxima do horizonte de Cauchy ( $v \rightarrow \infty$ ), a densidade de energia é dada por  $\rho \sim v^{-p} \exp(2k_- v)$ , que diverge no horizonte de Cauchy. Este valor divergente medido pelo observador, apesar da quantidade finita de energia que entra no buraco negro, é responsável pela instabilidade do horizonte de Cauchy.

No entanto,  $m(v)$  tende para o valor constante  $m_0$  e a função  $f$  é aí regular. Poisson e Israel mostraram que, num sistema de coordenadas adequado, a métrica é regular perto de, e no horizonte de Cauchy e que o observador, apesar de medir uma densidade de energia infinitamente crescente, experimentaria forças de maré finitas (medidas por um invariante de curvatura) quando atravessasse o horizonte de Cauchy.

A confirmação, num contexto geral, do carácter destas conclusões, e a sua importância em relação à conjectura de censura cósmica, será discutida a seguir.

## ***Sistema Einstein-Maxwell-campo escalar***

No sentido de generalizar os métodos de Christodoulou empregues com sucesso no sistema Einstein-campo escalar (capítulo 10), é fundamental compreender o papel do momento angular, que dá origem a novas soluções das equações de Einstein no vácuo, nomeadamente a de Kerr. Acontece que existe uma ligação íntima entre os mecanismos repulsivos da carga eléctrica e da força centrífuga devida ao momento angular; uma manifestação disto é a analogia entre as estruturas conformes da solução (esfericamente simétrica) de Reissner-Nordström das equações de Einstein-Maxwell e da solução (com rotação) de Kerr das equações de Einstein. Parece então que a carga eléctrica pode servir como ferramenta para construir soluções que permitirão uma visão mais clara do caminho a seguir no ataque ao caso genérico sem simetria esférica. Numa série de artigos, Dafermos\* estudou o sistema Einstein-Maxwell-campo escalar que, apesar de não servir para estudar a evolução a partir de dados regulares†, é o sistema mais simples que inclui a solução de Reissner-Nordström como uma solução especial e permite estudar a questão da estabilidade do horizonte de Cauchy num contexto não linear.

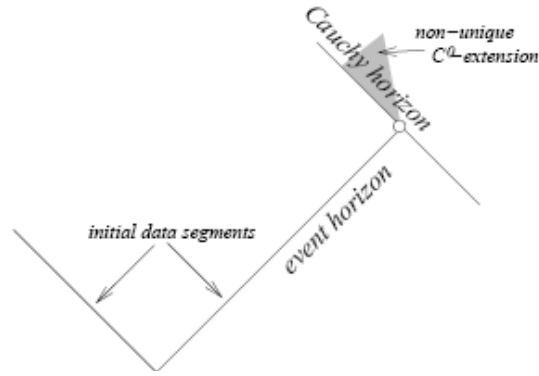
Admitindo dados iniciais para o sistema em duas linhas nulas, tal que uma delas corresponde ao horizonte de eventos da solução de Reissner-Nordström e a outra contém dados suficientemente regulares, o desenvolvimento máximo é representado como na figura 11.6.

Em particular, o horizonte de Cauchy sobrevive e a métrica pode ser estendida para além dele como uma métrica  $C^0$ . No entanto, Dafermos mostra que uma função de massa, que é constante na solução de Reissner-Nordström e que coincide com  $M$  no infinito nulo futuro, cresce sem limite ao longo do horizonte de Cauchy levando a que o espaço-tempo não possa ser estendido como uma métrica  $C^1$ . Estes resultados são a primeira confirmação rigorosa dos modelos simplificados de Poisson e Israel e mostram que, neste sistema, a conjectura de censura cósmica forte segundo Christodoulou é falsa (pois é formulada em termos de extensibilidade de forma  $C^0$ ), mas é válida se for formulada em termos de extensibilidade de forma  $C^1$  ou superior.

---

\* Aqui seguimos os artigos de revisão Dafermos (2002) e Dafermos (2004), onde se fazem referência aos artigos originais.

† Uma vez que os dados iniciais têm de incluir uma superfície prisioneira fechada.



**Figura 11.6** Desenvolvimento máximo do sistema Einstein-Maxwell-campo escalar.

Apesar destes resultados mostrarem que a estabilidade do horizonte de Cauchy pode ocorrer num contexto não linear (embora só de uma forma  $C^0$ ), não implicam que ela de facto ocorra num colapso gravitacional genérico, uma vez que a imposição de o horizonte de eventos ser exactamente o da solução de Reissner-Nordström é não genérica e fisicamente irrealista. Pode argumentar-se, assim, que estes resultados são um ‘artifício’ resultante do problema de valor inicial escolhido em particular. Mas Dafermos mostrou que estas propriedades se aplicam a um horizonte de eventos regular e não extremo, desde que se parta do princípio que se verifique, ao longo do horizonte de eventos, uma forma de limite inferior da lei de Price.\* Posteriormente, Dafermos e Rodnianski provaram que esta lei de decaimento é uma consequência do desenvolvimento máximo de dados iniciais esfericamente simétricos e assintoticamente planos para as equações de Einstein-Maxwell-campo escalar.

Lembrando que a motivação principal deste estudo é ser um modelo esfericamente simétrico, com matéria, para a situação no vácuo sem simetria esférica, a verdade é que permanece uma incógnita que partes desta análise poderão ser generalizadas e quais as que não serão passíveis de modificação. O trabalho neste campo hiperactivo de investigação continua.

---

\* Isto é, o campo escalar deve decair ao longo do horizonte de eventos de uma forma suficiente forte. A condição em particular é que  $|\partial_v \phi| \leq C v^{-1-\epsilon}$ , para um  $\epsilon > 0$ . A coordenada  $v$  é normalizada de modo que  $v = r$  num determinado raio nulo dirigido para fora e que intersecta o infinito nulo.

## 12. Desafiando a censura cósmica II. Desigualdade

*“A minha confiança nesta conjectura [de censura cósmica] é reforçada pelo facto de Penrose ter tentado obter um contra-exemplo para ela, que mostraria que singularidades nuas deveriam ocorrer, e ter falhado.”*

Hawking (1972)

Neste capítulo iremos descrever um caso típico do que começou por ser uma tentativa de encontrar um contra-exemplo à conjectura da censura cósmica e que, hoje, é um dos pontos fortes a favor da mesma. Apresentamos o argumento original proposto por Penrose\* e, de seguida, discutimos a formulação do conceito de massa total em Relatividade Geral. Por fim, analisamos desenvolvimentos recentes relativos à prova da chamada desigualdade de Penrose riemanniana.

### Argumento original

Com o objectivo de encontrar um exemplo físico que contradissesse o ‘modelo standard’ do colapso gravitacional genérico, Penrose considerou um invólucro<sup>†</sup> de fótons, ‘poeira nula’, que colapsa numa região do espaço-tempo. Não é assumida nenhuma simetria, quer para a forma do invólucro, quer para a distribuição da densidade de energia no invólucro. O invólucro deve ser, no entanto, convexo, para evitar a ocorrência de cáusticas no passado remoto da hipersuperfície nula H. Nestas condições, o espaço-tempo dentro do invólucro pode ser escolhido como sendo plano.

Considere-se, agora, uma hipersuperfície nula N, em expansão na região plana e que intersecta H numa superfície bidimensional espacial S com topologia de uma esfera (ver figura 12.1). Estendendo N através de H, verifica-se que a expansão de uma congruência de geodésicas que intersectam N ortogonalmente (ver capítulo 6) tem um salto proporcional à intensidade de energia do invólucro em S. Este efeito de ‘focagem’ de N por H é tão menos intenso quanto mais S estiver no passado de H. Movendo S para o futuro de H, existirá uma posição para a qual a expansão de N é cancelada de modo que os raios de N que se estendem para o futuro a partir de S têm expansão zero quando partem de S. Suponhamos que, nesta situação,  $S \equiv S_0$ . Então,  $S_0$  será uma superfície marginalmente prisioneira, ou seja, se movida um pouco para dentro, ao longo das geratrizes de H, torna-se uma superfície prisioneira, aplicando-se o teorema de Hawking-Penrose (ver capítulo 5).

Assumindo a censura cósmica, existirá um horizonte de acontecimentos E que intersecta H numa superfície bidimensional  $S_1$  no passado de  $S_0$ , ao longo das geratrizes de H, sendo que a sua área,  $A_1$ , não é inferior à área de  $S_0$ ,  $A_0$ .

Além disto, de acordo com o ‘modelo standard’ do colapso gravitacional que culmina num buraco negro de Kerr, a área do horizonte<sup>‡</sup> aumenta, em relação a  $A_1$ , em direcção ao futuro, aproximando-se do valor  $A_2 = 4\pi (r_+^2 + a^2) = 8\pi M \{M + \sqrt{M^2 - a^2}\}$ .

---

\* Apresentado em Penrose (1973).

<sup>†</sup> *Shell*, em Inglês.

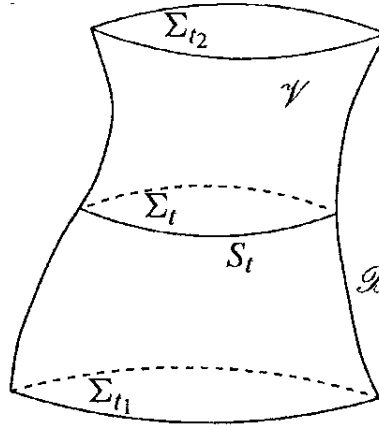
<sup>‡</sup> Isto é, a área superficial de uma secção bidimensional de E definida por uma coordenada nula avançada constante e  $r = r_+ \equiv M + \sqrt{M^2 - a^2}$ , em que M é a massa do buraco negro e  $aM$  é o seu momento angular.



## Formulação lagrangiana e hamiltoniana da Relatividade Geral

É de esperar que a massa gravitacional de um espaço-tempo assintoticamente plano – a sua energia gravitacional – esteja relacionada com o valor do Hamiltoniano gravitacional desse espaço-tempo. A definição de massa em Relatividade Geral está, assim, dependente de uma formulação lagrangiana e hamiltoniana da teoria, que se baseia no formalismo discutido nos capítulos 6 e 7.

Considere-se\* uma região  $\mathcal{V}$  do espaço-tempo folheada por hipersuperfícies  $\Sigma_t$  limitadas por superfícies bidimensionais  $S_t$  (ver figura 12.2); é assim limitado pelas hipersuperfícies  $\Sigma_{t_1}$ ,  $\Sigma_{t_2}$ , e  $\mathcal{B}$ , a união das superfícies  $S_t$ .



**Figura 12.2** A região  $\mathcal{V}$ , a sua fronteira  $\partial\mathcal{V}$ , e as suas fatias.

Consideremos um campo escalar  $q(x^\alpha)$ . A acção é dada por

$$\begin{aligned} S &= \int_{\mathcal{V}} \mathcal{L}(q, q_{,\alpha}) \sqrt{-g} d^4x \\ &= \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} [p\dot{q} - \mathcal{H}(p, q, q_{,a})] d^3y \end{aligned} \quad (12.2)$$

onde se usam as coordenadas  $(t, y^a)$  nas hipersuperfícies  $\Sigma_t$  (ver capítulo 6),  $\mathcal{L}(q, q_{,\alpha})$  é a chamada densidade lagrangiana e  $\mathcal{H}(p, q, q_{,a})$  é a chamada densidade hamiltoniana pois o Hamiltoniano é definido por

$$H[p, q] = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}(p, q, q_{,a}) d^3y \quad (12.3)$$

Aqui,  $\dot{q}$  é a derivada de Lie ao longo do vector  $t^\alpha$ ,  $\dot{q} = \mathcal{L}_t q$ , e nas coordenadas  $(t, y^a)$  reduz-se à derivada temporal de  $q$ . As derivadas espaciais são  $q_{,a} = q_{,\alpha} e_a^\alpha$  e o momento canónico do campo é definido por  $p = \frac{\partial}{\partial \dot{q}} (\sqrt{-g} \mathcal{L})$ .

\* Aqui seguimos Poisson (2004), cap.4.

Para se obter a forma hamiltoniana das equações de campo, varia-se a acção em relação a  $p$  e  $q$ , tratando as variações  $\delta p$  e  $\delta q$  como independentes e tomando  $\delta q$  nula nas fronteiras  $\Sigma_{t_1}$ ,  $\Sigma_{t_2}$ , e  $\mathcal{B}$ , ou seja,  $\delta q|_{\partial\mathcal{V}} = 0$ .

A acção em Relatividade Geral tem uma contribuição  $S_G$  do campo gravitacional e uma contribuição  $S_M$  dos campos de matéria. Daqui em diante, consideraremos o caso do vácuo e este último termo será nulo. A acção gravitacional, por sua vez, tem o termo de Hilbert,  $S_H$ , uma contribuição  $S_B$  da fronteira e um termo não dinâmico  $S_0$  que afecta o valor numérico da acção mas não as equações do movimento. Estes termos são reunidos na seguinte fórmula:

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int_{\mathcal{V}} R \sqrt{-g} d^4x + \frac{1}{8\pi} \oint_{\partial\mathcal{V}} \epsilon (K - K_0) |h|^{\frac{1}{2}} d^3y \quad (12.4)$$

em que  $|h|^{\frac{1}{2}} d^3y$ , onde  $h \equiv \det [h_{ab}]$ , é um elemento de volume invariante tridimensional (na hipersuperfície).

O último termo ( $S_0$ ) é incluído de forma que a acção gravitacional seja bem comportada num espaço-tempo assintoticamente plano (em particular que  $S_G = 0$  no espaço-tempo plano). Consegue-se isto definindo  $K_0$  como a curvatura extrínseca de  $\partial\mathcal{V}$  mergulhada no espaço-tempo plano.

Pode mostrar-se\* que a variação da acção total (campos de matéria incluídos) leva às equações de Einstein.

O próximo passo é exprimir o primeiro termo de (12.4) nas coordenadas das hipersuperfícies  $\Sigma_t$  (aqui a expressão (6.7) do escalar de Ricci, em função das propriedades das hipersuperfícies, é fundamental), e o segundo em coordenadas construídas nas superfícies  $S_t$ , a fronteira das hipersuperfícies  $\Sigma_t$  (ver figura 12.2). A construção destas coordenadas é análoga àquela feita no capítulo 6 para as hipersuperfícies  $\Sigma_t$ . Sendo  $S_t$  a fronteira da hipersuperfície  $\Sigma_t$ , é descrita por uma equação do tipo  $y^\alpha = y^\alpha(\theta^A)$ , onde  $\theta^A$  são as coordenadas intrínsecas à superfície  $S_t$ .

Define-se um vector normal unitário  $r^\alpha = r^a e_a^\alpha$  que satisfaz  $r^\alpha n_\alpha = 0$ . Os vectores  $e_A^a = \frac{\partial y^a}{\partial \theta^A}$  são tangentes às curvas contidas em  $S_t$ , o que implica que  $r_a e_A^a = 0$  e que

$r_\alpha e_A^\alpha = 0$ , onde  $e_A^\alpha \equiv e_a^\alpha e_A^a = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \theta^A}$ . A métrica induzida em  $S_t$  é dada por

$ds^2 = \sigma_{AB} d\theta^A d\theta^B$ , onde  $\sigma_{AB} = g_{\alpha\beta} e_A^\alpha e_B^\beta$ . As relações  $g^{\alpha\beta} = -n^\alpha n^\beta + h^{ab} e_a^\alpha e_b^\beta$  podem ser expressas por  $g^{\alpha\beta} = -n^\alpha n^\beta + r^\alpha r^\beta + \sigma^{AB} e_A^\alpha e_B^\beta$ . A curvatura extrínseca de  $S_t$ , mergulhada em  $\Sigma_t$ , é definida por  $k_{AB} \equiv r_{\alpha;\beta} e_A^\alpha e_B^\beta$  e  $k$  será o seu traço:  $k = \sigma^{AB} k_{AB}$ .

Não iremos dar os pormenores das deduções aqui†, apresentando apenas o resultado final:

$$S_G = \frac{1}{16\pi} \int_{t_1}^{t_2} dt \left\{ \int_{\Sigma_t} \left( {}^3R + K^{ab} K_{ab} - K^2 \right) N |h|^{\frac{1}{2}} d^3y + 2 \oint_{S_t} (k - k_0) N \sqrt{\sigma} d^2\theta \right\} \quad (12.5)$$

Mais uma vez, o último termo é incluído de forma que a acção gravitacional seja bem comportada num espaço-tempo assintoticamente plano;  $k_0$  é definida como a curvatura extrínseca de  $S_t$  mergulhada no espaço-tempo plano.

\* Ver Poisson (2004), cap.4.1.

† Ver Poisson (2004), cap.4.2.



Para se construir o Hamiltoniano é necessário exprimir  $S_G$  em termos de  $\dot{h}_{ab} \equiv \mathcal{L}_t h_{ab}$  (ver capítulo 7). A acção gravitacional depende de  $\dot{h}_{ab}$  através da curvatura extrínseca, como se vê da equação (7.4). As variáveis dinâmicas serão  $h_{ab}$  e o seu momento conjugado definido por  $p^{ab} = \frac{\partial}{\partial \dot{h}_{ab}} (\sqrt{-g} \mathcal{L}_G)$ , onde  $\mathcal{L}_G$  é o ‘termo de volume’ da densidade lagrangiana gravitacional, o primeiro termo dentro do integral de (12.5), uma vez que o ‘termo da fronteira’ não depende de  $\dot{h}_{ab}$ . Substituindo isto na definição de  $p^{ab}$ , obtém-se  $16\pi p^{ab} = \sqrt{h} (K^{ab} - K h^{ab})$ . O ‘termo de volume’ da densidade hamiltoniana é  $\mathcal{H}_G = p^{ab} \dot{h}_{ab} - \sqrt{-g} \mathcal{L}_G$ . Usando os resultados anteriores, assim como a equação (7.4), obtém-se a seguinte expressão do Hamiltoniano gravitacional:

$$16\pi H_G = \int_{\Sigma_t} (AN - 2N_a B^{ab}{}_{|b}) |h|^{\frac{1}{2}} d^3y - 2 \oint_{S_t} [(k - k_0)N - N_a B^{ab} r_b] \sqrt{\sigma} d^2\theta$$

onde

$$\begin{aligned} A &= K_{ab} K^{ab} - K^2 - {}^3R \\ B^{ab} &= K^{ab} - K h^{ab}. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Mas relembando as equações de constrangimento no vácuo (7.1) e (7.2), que podem ser escritas como  $A = 0$  e  $B^{ab}{}_{|b} = 0$ , o ‘termo de volume’ do Hamiltoniano gravitacional anula-se e resta apenas o ‘termo de fronteira’:

$$H_G = -\frac{1}{8\pi} \oint_{S_t} [(k - k_0)N - N_a B^{ab} r_b] \sqrt{\sigma} d^2\theta \quad (12.7)$$

É este termo que nos permite definir massa (e momento angular) de um espaço-tempo assintoticamente plano.

## **Massa total em Relatividade Geral**

O Hamiltoniano dado por (12.7) depende do comportamento assintótico da hipersuperfície  $\Sigma_t$ , da função lapso e do vector deslocamento (ver figura 7.2). Estes dois últimos são escolhidos arbitrariamente mas num espaço-tempo assintoticamente plano o comportamento das hipersuperfícies será restringido. Assim, exige-se que  $\Sigma_t$  coincida assintoticamente com a superfície de tempo constante no espaço-tempo de Minkowski, em que o tempo será o tempo próprio de um observador em repouso na região assintótica. Nesta região, assim, as coordenadas  $y^a$  estarão relacionadas com as coordenadas espaciais de um referencial lorentziano  $(t_0, x_0, y_0, z_0)$ . Teremos então as seguintes relações assintóticas:  $y^a \rightarrow y^a(x_0, y_0, z_0)$ ,  $x^\alpha \rightarrow x^\alpha(t_0, x_0, y_0, z_0)$  e  $n^\alpha \rightarrow \partial x^\alpha / \partial t_0$ . Estas relações implicam uma correspondência unívoca entre a escolha da função lapso e do vector deslocamento e a escolha de um vector  $t^\alpha = N n^\alpha + N^a e_a^\alpha$  (ver equação (7.2)). O Hamiltoniano pode então ser encarado como um funcional de  $N$  e  $N^a$  ou um funcional de  $t^\alpha$ .

Define-se a massa  $ADM^*$  de um espaço-tempo assintoticamente plano como sendo o limite de  $H_G$ , quando  $S_t$  é uma superfície no infinito espacial, com a escolha  $N = 1$  e  $N^a = 0$ , ou seja,

$$M_{ADM}(t) = -\frac{1}{8\pi} \oint_{S(t,r \rightarrow \infty)} (k - k_0) N \sqrt{\sigma} d^2\theta. \quad (12.8)$$

A escolha  $N = 1$  e  $N^a = 0$  implica que o vector  $t^\alpha$  gere uma translação assintótica no tempo, ou seja, confirma-se a relação entre a energia e as translações no tempo<sup>†</sup>.  $S(t,r)$  é uma superfície de  $t$  e  $r$  constantes que se transforma numa 2-esfera de área  $4\pi r^2$ , quando  $r \rightarrow \infty$ . Este limite, tomado com  $t$  fixo, é o que define ‘infinito espacial’.

Existe, no entanto, outra maneira de se aproximar o infinito, e o limite correspondente levará a outra definição de massa, a massa  $BS^\ddagger$ , que é obtida levando  $S(t,r)$  até ao ‘infinito nulo’ em vez do infinito espacial. Usando as coordenadas nulas  $u$  e  $v$ , uma superfície bidimensional de  $t$  e  $r$  constantes torna-se uma superfície de  $u$  e  $v$  constantes,  $S(u,v)$ . O infinito nulo corresponde ao limite  $v \rightarrow \infty$ , tomado com  $u$  fixo, definindo-se a massa  $BS$  de um espaço-tempo assintoticamente plano como sendo:

$$M_{BS}(u) = -\frac{1}{8\pi} \oint_{S(u,v \rightarrow \infty)} (k - k_0) N \sqrt{\sigma} d^2\theta. \quad (12.9)$$

A importância deste conceito reside no facto de que quando um corpo isolado emite radiação, a taxa de variação de  $M_{BS}(u)$  está directamente relacionado com o fluxo (dirigido para fora) de energia de radiação. Assim, a massa  $BS$  diminui à medida que a radiação se escapa para o infinito. É importante notar que, para espaços-tempo estacionários, as massas  $ADM$  e  $BS$  são idênticas.

## ***Desigualdade de Penrose riemanniana***

Pode então generalizar-se a formulação da desigualdade de Penrose usando o formalismo aqui apresentado e também no capítulo 10.<sup>§</sup>

Considere-se então a divisão do espaço-tempo em fatias, por hipersuperfícies do tipo espacial  $(\Sigma, h, K)$ , que tomaremos aqui como satisfazendo a condição de energia dominante (ver capítulo 2). Relembre-se que esta pode ser expressa como  $\rho \geq |\mathbf{J}|$ , em que  $\rho$  e  $\mathbf{J}$  são, respectivamente, a densidade de energia e o vector densidade de corrente, estão relacionados com o tensor de Einstein por  $G_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta}$  e são determinados pelas propriedades das hipersuperfícies pelas equações de Gauss-Codazzi (6.5) e (6.6).

Consideraremos também  $(\Sigma, h, K)$  como sendo assintoticamente plano, isto é, para um conjunto compacto  $\mathcal{K} \subset \Sigma$ ,  $\Sigma \setminus \mathcal{K}$  é difeomorfo a  $\mathbb{R}^3 \setminus B(0)$ , em que a métrica  $h_{ij}$  se

\* De Arnowitt, Deser e Misner, autores de um artigo fundamental sobre a formulação hamiltoniana da Relatividade Geral.

† Pode também definir-se o momento angular de um espaço-tempo assintoticamente plano a partir de  $H_G$ , com uma escolha de  $N$  e  $N^a$  que põe em evidência a relação do momento angular com rotações assintóticas. Ver Poisson (2004), cap.4.3.

‡ De Bondi e Sachs. Também designada por massa de Trautman-Bondi.

§ Aqui seguimos Bray e Chrusciel (2004).

aproxima assintoticamente da métrica plana  $\delta_{ij}$  com determinadas condições de decaimento (ver capítulo 10).

A condição mais restritiva que iremos impor é, no entanto, que a segunda forma fundamental da hipersuperfície seja nula. Neste caso, a desigualdade de Penrose denomina-se desigualdade de Penrose riemanniana e os dados iniciais dizem-se simétricos. Um exemplo deste tipo de hipersuperfícies é  $(\mathcal{R}^3, u(x)^4 \delta_{ij})$  onde  $u(x)$  aproxima-se assintoticamente de uma constante suficientemente depressa.

O raciocínio intuitivo, implícito na desigualdade, é o seguinte. Usem-se estes dados iniciais, resolvam-se as equações de Einstein na direcção do futuro e suponha-se que o espaço-tempo resultante é assintoticamente plano nas direcções nulas, de modo que a massa BS é definida para todas as coordenadas nulas retardadas. Suponha-se, ainda, que o espaço-tempo assumirá a forma da solução de Kerr, de modo que a massa BS se aproximará assintoticamente da massa ADM da solução de Kerr relevante. O teorema de área de Hawking (ver capítulo 5) diz-nos que a área total dos horizontes de acontecimentos de quaisquer buracos negros não diminui, enquanto que a massa BS total do sistema não aumenta. Uma vez que, para soluções de Kerr, verifica-se que  $M \geq \sqrt{A/16\pi}$ , em que  $M$  é a massa ADM total e  $A$  a área total dos horizontes de acontecimentos, é de esperar que a mesma desigualdade se verifique nos dados iniciais. De modo a investigar a aplicabilidade desta desigualdade (ou de um análogo seu) no caso da evolução de dados iniciais genéricos simétricos, é necessário tornar o enunciado da desigualdade mais preciso, procedendo-se da seguinte forma.

Considere-se que  $(\Sigma, h)$  é tal que  $\Sigma \setminus \mathcal{K}$  é isométrico a  $(\mathcal{R}^3 \setminus \mathcal{K}, u(x)^4 \delta_{ij})$ , onde  $u(x)$  é harmónica no sistema de coordenadas em  $(\mathcal{R}^3 \setminus \mathcal{K}, \delta_{ij})$ . Se  $u(x)$  for expandida em harmónicas esféricas, pode provar-se que  $u(x)$  tem assíptotas  $u(x) = a + b/|x| + O(1/|x|^2)$  e que a massa ADM total é dada por  $M = 2ab$ . Neste caso,  $(\Sigma, h)$  diz-se harmonicamente assintoticamente plano.

Uma superfície mínima em  $(\Sigma, h)$  é uma superfície que é um ponto crítico da função área com respeito a variações suaves da superfície. Um horizonte é uma superfície mínima que é a fronteira de uma região aberta limitada. A superfície  $\Sigma_0$  de  $(\Sigma, h)$ , definida como a fronteira da união das regiões abertas limitadas por todas as superfícies mínimas em  $(\Sigma, h)$ , é uma superfície mínima e designa-se por superfície mínima mais exterior. Pode mostrar-se que as componentes conexas de  $\Sigma_0$  correspondem aos horizontes aparentes\* de buracos negros que intersectam  $\Sigma$ .

A desigualdade de Penrose riemanniana pode então formular-se da seguinte maneira.

*‘Seja  $(\Sigma, h)$  uma variedade completa com curvatura escalar não negativa que é harmonicamente assintoticamente plana, com massa total  $M$  e que tem uma superfície mínima mais exterior de área  $A_0$ . Então  $M \geq \sqrt{A_0/16\pi}$ , em que a igualdade se verifica se e só se  $(\Sigma, h)$  é isométrico à métrica de Schwarzschild  $(\mathcal{R}^3 \setminus \{0\}, u(x)^4 \delta_{ij})$ , com  $u(x) = 1 + \frac{1}{2}M/|x|$ , fora das respectivas superfícies mínimas mais exteriores.’*

Esta hipótese foi provada† por Huisken e Ilmanen em 1997, e por Bray em 1999, estabelecendo que a desigualdade de Penrose riemanniana é válida para dados iniciais simétricos genéricos.

\* O horizonte aparente é a fronteira exterior da região que inclui todas as superfícies prisioneiras.

† Ver Bray e Chrusciel (2004) e referências aí citadas. Huisken e Ilmanen definem  $A_0$  como a área da maior componente conexa de  $\Sigma_0$ .

A tentativa de formulação e prova de conjecturas envolvendo a desigualdade de Penrose geral (isto é, quando a segunda forma fundamental da hipersuperfície não é nula) é um campo activo de investigação e tem levado a desenvolvimentos promissores quanto à definição de massa total em situações genéricas.\*

Dadas as restrições impostas na classe dos espaços-tempo aos quais se aplica, é óbvio que a prova da desigualdade de Penrose riemanniana está ainda muito longe de uma prova do caso geral. No entanto, será talvez difícil perceber por que razão estas desigualdades já provadas se devam aplicar, a não ser que a censura cósmica seja a ‘razão física’ por trás delas. Assim, a prova destas desigualdades e a consequente falha em encontrar contra-exemplos genéricos à conjectura têm sido interpretadas como fortes indicações positivas quanto à validade da censura cósmica fraca.

---

\* Ver resumo em Bray e Chrusciel (2004). 4.2.

## Apêndice. A conjectura do arco

*‘Tal como a maioria das conjecturas, esta é suficientemente vaga de modo a deixar espaço para muitas formulações matemáticas diferentes!’*

Thorne (1972)

Apesar dos resultados descritos nos dois últimos capítulos apresentarem indicações fortes quanto à validade da conjectura da censura cósmica, a verdade é que não constituem prova. Assim, é natural que muitos autores tenham expresso sérias dúvidas quanto a essa validade, sendo que muitas dessas dúvidas centram-se em resultados de investigações recentes que têm por base uma ideia conhecida pela conjectura do arco. O argumento original foi apresentado por Kip Thorne\* e, com os avanços recentes na capacidade de computação, deu origem a uma área de investigação muito activa cujo principal foco são simulações numéricas de situações mais ou menos genéricas de colapso gravitacional. Discutiremos, mais à frente, alguns destes resultados e o seu significado para a questão da censura cósmica.

Recordemos a situação de colapso gravitacional esfericamente simétrico (ver capítulo 8). Neste caso, a evolução do sistema pode ser caracterizado por 4 fases: instabilidade, implosão, horizonte e singularidade. As investigações de Price e outros, acerca de pequenas perturbações ao caso esfericamente simétrico, provam que um colapso quasi-esfericamente simétrico continua a ser caracterizado pela sequência instabilidade, implosão, horizonte. Continuará esta caracterização a ser válida no caso de um colapso altamente não esférico? Em particular, será que o horizonte de ventos se forma, mesmo no caso de uma configuração altamente deformada?

Foi o estudo de situações de colapso com distribuições de matéria idealizadas, em que o colapso se dá apenas numa ou em duas dimensões, que levou Thorne a avançar com a conjectura. São exemplos destas situações o caso de uma configuração em forma de esferóide que colapsa numa forma de ‘panqueca’, assim como o caso de uma configuração em forma de esferóide alongado que colapsa numa forma de ‘agulha’. Nestes casos pode mostrar-se que, se as dimensões da forma colapsada (o raio da ‘panqueca’ ou o raio equatorial da ‘agulha’) forem muito superiores ao raio de Schwarzschild, a descrição newtoniana do colapso é suficiente e não se formam horizontes. Nestes casos, no entanto, a forma colapsada não é uma singularidade do espaço-tempo e o colapso pode proceder para além dessa forma, entrando numa fase em que a descrição relativista é necessária e em que o gradiente de pressão é capaz de parar o colapso. Esta questão não interfere, no entanto, com a formação, ou não, de horizontes.

A pergunta que parece então impor-se é a seguinte: para se produzir um buraco negro, será necessário compactar fortemente a matéria em todas as 3 dimensões espaciais, ou poderá ser suficiente apenas em uma ou duas dimensões? Uma possível resposta a esta questão constitui o enunciado da conjectura do arco:

*‘Um horizonte só se forma quando uma massa  $M$  é compactada uma região cuja circunferência é, em TODAS as direcções,  $\leq 4\pi M$ .’*

Se o colapso ocorrer apenas em uma ou duas dimensões, a conjectura é normalmente interpretada como afirmando a ocorrência de uma singularidade nua.

---

\* Em Thorne (1972). Um resumo é feito na caixa 32.3 de Misner, Thorne e Wheeler (1973).

Tal como o próprio Thorne admite, este enunciado não tem pretensões de ser matematicamente preciso, e a verdade é que uma formulação matemática dele encontra algumas dificuldades\*. Nomeadamente, a energia gravitacional deve ser incluída em  $M$ , mas a noção local de energia gravitacional em Relatividade Geral continua a iludir todos. Além disso existe a questão da definição de ‘circunferência’; para que o enunciado faça sentido é necessário escolher uma divisão do espaço-tempo em fatias espaciais, na qual se possa medir a circunferência, não sendo óbvio como se deve proceder.

O estudo do colapso que difere muito do caso esférico continua até hoje, nomeadamente o colapso de configurações em forma de cilindro infinito. Neste caso, forma-se uma singularidade de densidade e curvatura infinitas, mas não se formam superfícies prisioneiras, sendo isto interpretado como uma implicação que a singularidade seja visível do exterior. No entanto, tudo parece indicar que estas situações de colapso não serão capazes de produzir contra-exemplos válidos à censura cósmica fraca que satisfaçam as condições de razoabilidade (quanto ao modelo de matéria) e de generalidade (quanto às condições iniciais). Além disso, os espaços cilindricamente simétricos não são assintoticamente planos: a distribuição de massa e a curvatura estendem-se até ao infinito e, mesmo em direcções perpendiculares ao eixo de simetria, a métrica aproxima-se da métrica plana demasiado lentamente.

A questão da ausência de superfícies prisioneiras é fundamental e subtil. O colapso de esferóides de gás muito alongados, estudado por Shapiro e Teukolsky, é outro caso importante, e mais realista, em que se verifica a ausência de superfícies prisioneiras em hipersuperfícies máximas no momento em que ocorre uma singularidade nos extremos do esferóide. Esta ausência é interpretada como um sinal que a singularidade é nua. No entanto, não é necessariamente assim. Isto porque, relembrando o capítulo 8, a presença de uma superfície prisioneira fechada num espaço-tempo assintoticamente previsível no futuro é uma condição *suficiente* para a existência de um horizonte, mas não uma condição *necessária*. Em particular, pode mostrar-se que<sup>†</sup> na extensão máxima do espaço-tempo de Schwarzschild existem superfícies de Cauchy  $\mathcal{S}$ , que se aproximam arbitrariamente perto da singularidade em  $r = 0$ , mas tais que não se encontram quaisquer superfícies prisioneiras em  $J^-(\mathcal{S})$ . Poderá algo como isto acontecer no exemplo de Shapiro e Teukolsky?

Investigações recentes parecem indicar que, fazendo a construção de uma porção significativamente maior dos espaços-tempo de Shapiro e Teukolsky (com uma escolha diferente de fatias de tempo), encontrar-se-iam superfícies prisioneiras rodeando a singularidade. Parece, assim, que estes exemplos não constituem sérias ameaças à conjectura da censura cósmica fraca.

---

\* Ver discussão em Wald (1997), que sumariamos aqui.

† Ver Wald e Iyer (1991).

## Epílogo

E se a conjectura da censura cósmica for falsa? E se, como culminar de processos clássicos ou quânticos, existirem singularidades nuas no Universo? Fazemos nossas as palavras de Penrose:

*‘É por vezes afirmado que se as singularidades nuas ocorrerem, então isto será desastroso para a física. Eu não partilho deste ponto de vista. Já temos o exemplo da singularidade do big-bang no passado remoto, que parece ser inevitável. O ‘desastre’ para a física ocorreu logo no início. A presença de singularidades nuas, resultando ocasionalmente de um colapso em circunstâncias muito mais ‘controladas’, seria com certeza exactamente o contrário de um desastre. Os efeitos de tais ocorrências singulares poderiam ser então acessíveis a observações agora. As teorias de singularidades estariam abertas a testes experimentais. Assim, o mistério inicial da criação deixaria de se poder esconder na obscuridade da sua suposta unicidade.’*

Penrose (1973)

## Referências

Choquet-Bruhat, Y. e Geroch, R. (1969), 'Global aspects of the Cauchy Problem in General Relativity', *Commun. Math. Phys.* **14**, 329-35.

Christodoulou, D. (1999) 'On the global initial value problem and the issue of singularities' *Class. Quantum Grav.* **16**, A23-A35.

Dafermos, M. (2002) 'Stability and instability of the Reissner-Nordström Cauchy horizon and the problem of uniqueness in general relativity' *preprint gr-qc/0209052v1*.

Dafermos, M. (2004) 'Price's law, mass inflation, and strong cosmic censorship' *preprint gr-qc/0401121v1*.

Dafermos, M. e Rodnianski, I. (2008) 'Lectures on black holes and linear waves' *preprint gr-qc/08110354v1*.

De Felice, F. e Clarke, C. (1990), *Relativity on curved manifolds* (Cambridge University Press).

Frolov, V. e Novikov, I. (1998), *Black Hole Physics: Basic Concepts and New Developments* (Kluwer).

Geroch, R. (1978), *General relativity from A to B* (University of Chicago Press), tradução para Português editada pela Editorial Presença (1991).

Geroch, R. e Horowitz, G. (1979), 'The global structure of space-time', in *General relativity: An Einstein centenary survey*, eds. S. Hawking e W. Israel (Cambridge University Press), 125-203.

Geroch, R., Kronheimer, E. e Penrose, R. (1972), 'Ideal points in space-time', *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A327**, 545-67.

Hawking, S. (1972), 'Black Holes in General Relativity', *Commun. Math. Phys.* **25**, 152-66.

Hawking, S. (1973) 'The Event Horizon', in *Black Holes*, eds. C. de Witt e B. de Witt (Gordon and Breach), 1-55.

Hawking, S. e Ellis, G. (1973), *The large scale structure of space-time* (Cambridge University Press).

Hawking, S. e Penrose, R. (1970), 'The singularities of gravitational collapse and cosmology', *Proc. Roy. Soc. Lond.* **A314**, 529-48.

Hawking, S. e Penrose, R. (1996), *The nature of space-time* (Princeton University Press), tradução para Português editada pela Editora Gradiva (1996).

Misner, C., Thorne, K. e Wheeler, J. (1973), *Gravitation* (Freeman).



- Penrose, R. (1964) ‘Conformal treatment of infinity’, in *Relativity, Groups and Topology*, eds. C. de Witt e B. de Witt (Gordon and Breach), 563-84.
- Penrose, R. (1968) ‘Structure of space-time’, in *Batelle Rencontres*, eds. C. de Witt e J. Wheeler (Benjamin), pp.121-235.
- Penrose, R. (1969), ‘Gravitational collapse: The role of general relativity’, *Rev. del Nuovo Cimento* **1**, 252-76, reimpresso em *Gen. Rel. Grav.* **34**, 1141-65 (2002).
- Penrose, R. (1973), ‘Naked singularities’, *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **224**, 125-34.
- Penrose, R. (1979) ‘Singularities and time asymmetry’, in *General relativity: An Einstein centenary survey*, eds. S. Hawking e W. Israel (Cambridge University Press), 125-203.
- Penrose, R. (1998) ‘The question of cosmic censorship’, in *Black Holes and Relativistic Stars*, ed. R. Wald (The University of Chicago Press), 103-22.
- Poisson, E. (1997) ‘Black-hole interiors and strong cosmic censorship’, in *Internal structure of black holes and spacetime singularities*, eds. L. Burko e A. Ori (Institute of Physics Publishing), 85-100.
- Poisson, E. (2004), *A relativist’s toolkit: The mathematics of black hole mechanics* (Cambridge University Press).
- Thorne, K. (1972) ‘Nonspherical gravitational collapse: A short review’, in *Magic without magic: John Archibald Wheeler*, ed. J. Klauder (Freeman), 231-58.
- Tipler, F., Clarke, C. e Ellis, G. (1980), ‘Singularities and horizons – A review article’, in *General relativity and Gravitation, Volume 2*, ed. A. Held (Plenum Press), 97-206.
- Visser, M. (1996), *Lorentzian wormholes, From Einstein to Hawking* (Springer-Verlag).
- Wald, R. (1984), *General relativity* (University of Chicago Press).
- Wald, R. (1997), ‘Gravitational Collapse and Cosmic Censorship’ *preprint* gr-qc/9710068v3.
- Wald, R. e Iyer, V. (1991), ‘Trapped surfaces in the Schwarzschild geometry and cosmic censorship’, *Phys. Rev.* **D44**, 3719-22.

## Créditos das figuras

**Figura I** Figura 12.5.a) de Penrose (1979)

**Figura 1.1** Figura 4. de Hawking e Ellis (1973)

**Figura 2.1** Figura 1.3. de Poisson (2004)

**Figura 2.2** Figura 1.4 de Poisson (2004)

**Figura 3.1** Figura 8. de Hawking e Ellis (1973)

**Figura 3.2** Figura 5.5. de Geroch e Horowitz (1979)

**Figura 3.3** Figura 5.14. de Geroch e Horowitz (1979)

**Figura 3.4** Figura 5.19. de Geroch e Horowitz (1979)

**Figura 3.5** Figura 5.20. de Geroch e Horowitz (1979)

**Figura 3.6** Figura 5.23. de Geroch e Horowitz (1979)

**Figura 3.7** Figura 46. de Hawking e Ellis (1973)

**Figura 3.8** Figura 5.24. de Geroch e Horowitz (1979)

**Figura 4.1** Figura 1. de Penrose (1964)

**Figura 4.2** Figura 12. de Hawking e Ellis (1973)

**Figura 4.3** Figura 14. de Hawking e Ellis (1973)

**Figura 4.4** Figura 15. de Hawking e Ellis (1973)

**Figura 4.5** Figura 19.(i) de Hawking e Ellis (1973)

**Figura 4.6** Figura 18.(i) de Hawking e Ellis (1973)

**Figura 4.7** Figura 18.(ii) de Hawking e Ellis (1973)

**Figura 4.8** Figura 19.(ii) de Hawking e Ellis (1973)

**Figura 4.9** Figura 23. de Penrose (1968)

**Figura 4.10** Figura 12.10. de Penrose (1979)

**Figura 4.11** Figura 23. de Hawking e Ellis (1973)

**Figura 4.12** Figura 24.(i) de Hawking e Ellis (1973)

**Figura 4.13** Figura 6.10 de Wald (1984)

**Figura 4.14** Figura 24.(ii) de Hawking e Ellis (1973)

**Figura 4.15** Figura 25. de Hawking e Ellis (1973)

**Figura 4.16** Figura 26. de Hawking e Ellis (1973)

**Figura 5.1** Figura 1. de Hawking e Ellis (1973)

**Figura 5.2** Figura 5.25. de Geroch e Horowitz (1979)

**Figura 7.1** Figura 4.2 de Poisson (2004)

**Figura 7.2** Figura 4.3 de Poisson (2004)

**Figura 8.1** Figura 54. de Hawking e Ellis (1973)

**Figura 8.2** Figura 2. de Penrose (1973)

**Figura 8.3** Figura 1.15 de Hawking e Penrose (1996)

**Figura 8.4** Figura 1.16 de Hawking e Penrose (1996)

**Figura 9.1** Figura 12.11. de Penrose (1979)

**Figura 10.1** Figura de Dafermos e Rodnianski (2008)

**Figura 10.2** Figura de Dafermos (2002)

**Figura 10.3** Figura gentilmente cedida pelo Prof. José Natário

**Figura 10.4** Figura de Dafermos (2004)

**Figura 10.5** Figura de Dafermos (2004)

**Figura 11.1** Figura do cap.3 de Townsend (1997)

**Figura 11.2** Figura do cap.3 de Townsend (1997)

**Figura 11.3** Figura 5.11 de Poisson (2004)

**Figura 11.4** Figura 5.9 de Poisson (2004)

**Figura 11.5** Figura 3.2 de Poisson (1997)

**Figura 11.6** Figura de Dafermos (2004)

**Figura 12.1** Figura 3. de Penrose (1973)

**Figura 12.2** Figura 4.4 de Poisson (2004)