

# Paradoxo de Olbers

*Porque é que o céu à noite é escuro?*

Renata Amado

6 de Fevereiro de 2018

Durante a procura de um tema para o Projeto em Matemática, surgiu uma pergunta que despertou, imediatamente, o meu interesse: "*Porque é que o céu à noite é escuro?*". Parece fácil de responder, mas a verdadeira razão é bastante intrigante. É fascinante como uma pergunta tão "simples" pôde desencadear tantas outras questões. Foi, exatamente, esta pergunta que confundiu o astrónomo alemão Henrich Olbers, levando-o a formular o conhecido Paradoxo de Olbers. O objetivo deste artigo é usar a matemática para poder calcular efetivamente se, num determinado modelo cosmológico, o céu à noite é escuro ou não. Caso não seja, podemos concluir que esse modelo cosmológico não é o que corresponde à nossa realidade.

## Conteúdo

<b>1</b>	<b>Conceitos Fundamentais</b>	<b>2</b>
1.1	Relatividade Geral . . . . .	2
1.2	Métrica . . . . .	2
1.3	Geodésica nula . . . . .	2
1.4	Modelos FLRW . . . . .	3
1.5	Desvio para o vermelho e expansão do Universo . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Tempo Conforme</b>	<b>4</b>
2.1	Definição . . . . .	4
2.2	Exemplos . . . . .	4
2.2.1	Universo de Minkowski . . . . .	4
2.2.2	Universo de Milne . . . . .	5
2.2.3	Universo de Einstein-De Sitter . . . . .	5
2.2.4	Nosso Universo . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Paradoxo de Olbers</b>	<b>7</b>
3.1	Fluxo Total . . . . .	7
3.2	Exemplos . . . . .	9
3.2.1	Universo de Minkowski . . . . .	9
3.2.2	Universo de Milne . . . . .	9
3.2.3	Universo de Einstein-de Sitter . . . . .	9
3.2.4	Nosso Universo . . . . .	10

# 1 Conceitos Fundamentais

## 1.1 Relatividade Geral

Após o aparecimento das Leis de Newton, surgiu um problema: quando a velocidade de um corpo se aproxima da velocidade da luz, estas leis não funcionam com exatidão. Tal descoberta foi feita por Albert Einstein, revolucionando o mundo com a famosa Teoria da Relatividade. Esta teoria é composta pela Teoria da Relatividade Restrita (considera a ausência de campos gravitacionais) e a Teoria da Relatividade Geral (caso geral da anterior).

Einstein descobriu ainda que a geometria do espaço, em qualquer local no Universo, está diretamente relacionada com a intensidade do campo gravitacional naquele local. Sendo assim, a existência de um campo gravitacional é equivalente ao espaço-tempo ser curvo. É como imaginar o espaço-tempo como sendo uma cama elástica e, sobre ela, bolas de bowling, que representam as estrelas e os planetas. Quanto maior o peso, maior é a deformação.

O postulado base da Teoria da Relatividade Geral, chamado de **Princípio da Equivalência**, resume-se a: um referencial inercial, não acelerado, no qual existe um campo gravitacional uniforme é fisicamente equivalente a um referencial acelerado no qual não existe gravidade. Imagine-se um elevador em queda livre; se uma pessoa estivesse dentro do elevador ela flutuaria (semelhante à ausência de gravidade). O mesmo acontece aos astronautas em órbita. É importante salientar que não se deve dizer que não há gravidade, em especial neste último caso: se não houvesse nenhuma força a atuar na nave espacial esta nem sequer estaria em órbita.

## 1.2 Métrica

A métrica do espaço tridimensional é escrita da seguinte forma:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Por outras palavras, é a distância Euclidiana também conhecida como  $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$ .

Como no espaço-tempo é considerado o tempo, a métrica passa a ter 4 dimensões: 3 espaciais e 1 de tempo, passando a ser escrita por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2,$$

mais conhecida como **Métrica de Minkowski**, onde  $c$  é a velocidade da luz ( $c = 3 \times 10^8 m/s$ ).

De forma a facilitar cálculos e a simplificar as representações gráficas e, uma vez que a velocidade da luz é a mesma para todos os observadores (um dos postulados da Relatividade Restrita), podemos considerar  $c = 1$ .

## 1.3 Geodésica nula

O termo geodésica está, também, bastante ligado à Teoria da Relatividade Geral, uma vez que o espaço-tempo é curvo. Neste caso, entende-se como geodésica, a trajetória de uma partícula livre da ação de forças externas (não gravíticas) e que representa o caminho mais curto entre dois pontos.

Mais importante ainda é o conceito de geodésica nula.

Consideremos um sinal luminoso que parte da posição  $x_0$  no instante  $t = 0$  movendo-se a uma velocidade  $\pm c = \pm 1$ . Logo, a sua posição no instante  $t$  é dada por  $x = x_0 \pm t$ . Substituindo na Métrica de Minkowski, considerando apenas variações na direção de  $x$ , temos que

$$ds^2 = dx^2 - dt^2 = (x_0 \pm t - x_0)^2 - (t - 0)^2 = t^2 - t^2 = 0.$$

Portanto, uma geodésica nula é o caminho que um fóton segue, ou seja, é caracterizada por  $ds^2 = 0$ . Num referencial  $xOt$ , a história de um sinal luminoso é uma reta de declive  $\pm 1$ .

## 1.4 Modelos FLRW

A métrica de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker ou modelo FLRW é uma solução exata das equações de campo de Einstein descoberta nos anos 20 e 30. Esta métrica assume apenas que o Universo em larga escala é homogêneo (igual em todos os pontos) e isotrópico (igual em todas as direções).

Os únicos tipos de espaço nestas condições são a hipersfera, o espaço euclidiano e o espaço hiperbólico. Como tal, a única coisa que pode variar é o raio do Universo.

A métrica dos modelos FLRW em coordenadas esféricas é dada por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left( \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right),$$

em que  $k$  descreve a curvatura de acordo com

$$k = \begin{cases} 1 & \text{para a métrica usual em } S^3 \\ 0 & \text{para a métrica usual em } \mathbb{R}^3 \\ -1 & \text{para a métrica usual em } H^3 \end{cases}$$

e  $a(t)$  é o fator escala, ou seja, dita como o raio do Universo varia ao longo do tempo  $t$ .

## 1.5 Desvio para o vermelho e expansão do Universo

Considere-se a métrica FLRW definida acima. Para facilidade de cálculos vamos apenas considerar variações de  $r$ .

Observemos o que acontece a um raio de luz que se move no espaço. Neste caso, estamos perante uma geodésica nula e portanto  $ds^2 = 0$ . Logo,

$$ds^2 = 0 \Leftrightarrow -dt^2 + a^2(t) \frac{dr^2}{1 - kr^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{dt}{a(t)} = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (1)$$

Consideremos 2 cristas da onda de um raio de luz:

- **1ª crista** - A crista da onda foi emitida em  $t = t_{then}$  e  $r = 0$ . Percorre um distância  $R$  até chegar aos nossos olhos no instante  $t = t_{now}$ . Integrando a expressão (1) em ambos os lados temos que

$$\int_{t_{then}}^{t_{now}} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (2)$$

- **2ª crista** - Quando a onda foi emitida em  $t = t_{then}$ , ela tinha um comprimento de onda  $\lambda_{then}$ . Pelo que concluímos que a 2ª crista foi emitida em  $t = t_{then} + \frac{\lambda_{then}}{c}$  e observamo-la em  $t = t_{now} + \frac{\lambda_{now}}{c}$ . Note-se que esta crista percorre exatamente a mesma distância que a anterior. Integrando novamente a expressão (1) em ambos os lados, temos que

$$\int_{t_{then} + \frac{\lambda_{then}}{c}}^{t_{now} + \frac{\lambda_{now}}{c}} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (3)$$

Considerando  $c = 1$ , de (2) e (3) podemos concluir que

$$\begin{aligned} & \int_{t_{then}}^{t_{now}} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_{then} + \lambda_{then}}^{t_{now} + \lambda_{now}} \frac{dt}{a(t)} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \int_{t_{then}}^{t_{then} + \lambda_{then}} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_{then} + \lambda_{then}}^{t_{now}} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_{then} + \lambda_{then}}^{t_{now}} \frac{dt}{a(t)} + \int_{t_{now}}^{t_{now} + \lambda_{now}} \frac{dt}{a(t)} \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \int_{t_{then}}^{t_{then} + \lambda_{then}} \frac{dt}{a(t)} = \int_{t_{now}}^{t_{now} + \lambda_{now}} \frac{dt}{a(t)}. \end{aligned} \quad (4)$$

Para pequenas variações no tempo, o factor escala é, essencialmente, constante pelo que podemos considerar  $a(t_{then}) = a_{then}$  e  $a(t_{now}) = a_{now}$ .

Usando este facto e sabendo que o desvio para o vermelho,  $z$ , é dado pela fórmula  $1+z = \frac{\lambda_{now}}{\lambda_{then}}$ , podemos resolver os integrais em (4) e ficamos com a fórmula simplificada seguinte:

$$\frac{\lambda_{then}}{a_{then}} = \frac{\lambda_{now}}{a_{now}} \Leftrightarrow \frac{a_{now}}{a_{then}} = \frac{\lambda_{now}}{\lambda_{then}} \Leftrightarrow \frac{a_{now}}{a_{then}} = 1+z.$$

Concluimos que o desvio para o vermelho,  $z$ , indica quanto é que o Universo se expandiu desde que o sinal luminoso foi emitido. Por exemplo, se  $z = 2$  dizemos que o Universo é 3 vezes maior agora do que era quando o raio de luz foi emitido.

## 2 Tempo Conforme

### 2.1 Definição

Tome-se a métrica FLRW, na qual iremos novamente só considerar variações de  $r$ , aplicando a seguinte mudança de variável:

$$dx = \frac{dr}{\sqrt{1-kr^2}}.$$

A métrica passa então a ser descrita por

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^2.$$

Com o objetivo de facilitar os cálculos daqui adiante, manipulemos a expressão anterior

$$\begin{aligned} ds^2 &= a^2(t) \left( -\frac{dt^2}{a^2(t)} + dx^2 \right) \\ &= a^2(\tau)(-d\tau^2 + dx^2), \end{aligned}$$

em que

$$d\tau = \frac{dt}{a(t)} \Leftrightarrow \tau = \int \frac{1}{a(t)} dt.$$

A  $\tau$  dá-se o nome de tempo conforme.

Relembrando que a luz percorre geodésicas nulas e que  $a(t)$  é sempre uma quantidade positiva, temos portanto que

$$\begin{aligned} ds^2 = 0 &\Leftrightarrow a^2(t)(-dt^2 + dx^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow dx^2 = dt^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{dx}{d\tau} = \pm 1, \end{aligned}$$

ou seja, podemos representar os raios de luz como retas de declive  $\pm 1$  num gráfico de  $x$  em função de  $\tau$ , para assim tirarmos conclusões sobre o que é observável neste preciso momento,  $\tau = \tau_{now}$ , nos diferentes Universos.

### 2.2 Exemplos

#### 2.2.1 Universo de Minkowski

No Universo de Minkowski, o fator escala é definido por  $a(t) = 1$  e podemos considerar quaisquer valores para  $t$ , uma vez que o raio  $a(t)$  é sempre positivo, concluindo assim que  $t \in ]-\infty, +\infty[$ .

Neste caso, temos que

$$\tau = \int \frac{dt}{a(t)} = \int dt = t.$$

Logo, o tempo conforme  $\tau \in ]-\infty, +\infty[$ .

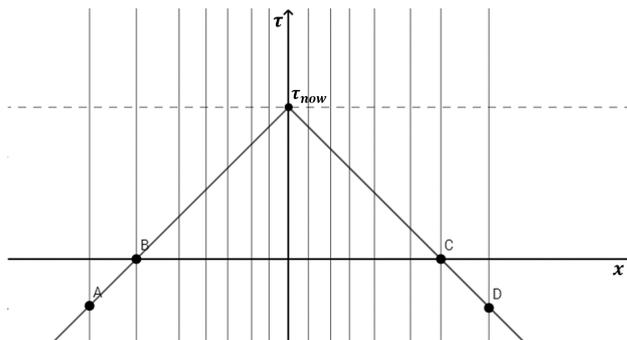


Figura 1: Universo de Minkowski

Neste Universo, em  $\tau = \tau_{now}$ , é possível observarmos todo o Universo, isto é, neste preciso momento chega aos nossos olhos a luz emitida por todas as galáxias. Isto leva-nos a crer que, no Universo de Minkowski, o céu à noite é, insuportavelmente, brilhante. Na secção seguinte, iremos verificar a veracidade desta afirmação através do cálculo do fluxo total.

### 2.2.2 Universo de Milne

Este Universo é caracterizado pelo fator escala ser  $a(t) = t$ . Como o raio do Universo não pode ser negativo, só podemos considerar  $t \in ]0, +\infty[$ .

Neste caso,

$$\tau = \int \frac{dt}{a(t)} = \int \frac{1}{t} dt = \log t.$$

Logo, o tempo conforme  $\tau \in ]-\infty, +\infty[$ .

No Universo de Milne, a situação é muito semelhante à anterior, sendo o gráfico idêntico. No entanto, iremos ver que, neste Universo, o céu à noite é, efetivamente, escuro, contrariamente ao que acontece no Universo de Minkowski.

### 2.2.3 Universo de Einstein-De Sitter

No Universo de Einstein-De Sitter, o fator escala é dado por  $a(t) = t^{2/3}$ . Mais uma vez, como o raio do Universo não pode ser negativo, podemos concluir que  $t \in ]0, +\infty[$ .

Assim, tem-se que

$$\tau = \int \frac{dt}{a(t)} = \int \frac{1}{t^{2/3}} dt = 3t^{1/3}.$$

Portanto, neste universo,  $\tau \in ]0, +\infty[$ .

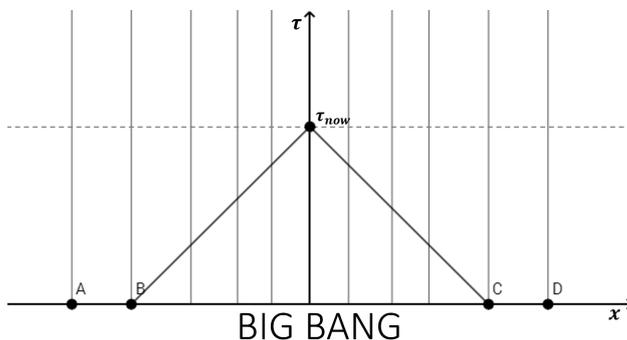


Figura 2: Universo de Einstein-De Sitter

Através da figura acima conseguimos ter uma noção do que é visível neste Universo. O Big Bang deu-se a  $\tau = 0$ . Neste Universo, neste exato momento, apenas conseguimos ver as galáxias que estão a uma determinada distância de nós, isto é, existe um limite, designado por **Horizonte Cosmológico**, representado no gráfico pelas letras B e C. No caso das galáxias para lá destes pontos, por exemplo, as representadas na figura por  $x = A$  e  $x = D$ , neste preciso momento, em  $\tau = \tau_{now}$ , a luz que elas emitiram ainda não chegou cá, mas eventualmente irá chegar.

O Horizonte Cosmológico representa o limite entre as regiões observáveis e não observáveis do Universo. Este limite deve-se à existência do Big Bang: a luz só teve ainda cerca de 14.000 milhões de anos para se propagar (idade do Universo). Caso não existisse expansão do Universo, o horizonte cosmológico situar-se-ia a uma distância de 14.000 milhões de anos-luz; no entanto, a expansão do Universo aumenta este número.

#### 2.2.4 Nosso Universo

No caso do nosso Universo, para além da existência de um limite inferior como no Universo de Einstein-De Sitter, existe também um limite superior; por outras palavras, o que irá acontecer futuramente é que nunca iremos ver todo o Universo, ao contrário dos 3 exemplos anteriores. Existe aquilo que é chamado de Horizonte Futuro.

Neste caso, o fator escala é dado, aproximadamente, por  $a(t) = \sinh^{\frac{2}{3}}(t)$  e novamente temos que  $t \in ]0, +\infty[$ .

Agora resta saber o que acontece com  $\tau$ . Como o integral dado por  $\int \frac{dt}{a(t)}$  é difícil de calcular, vamos apenas ver se existe limite inferior e superior, isto é,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dt}{\sinh^{\frac{2}{3}}(t)} \quad \text{e} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \int_1^{\varepsilon} \frac{dt}{\sinh^{\frac{2}{3}}(t)}.$$

- **Limite inferior** - Para calcular o limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dt}{\sinh^{\frac{2}{3}}(t)},$$

vamos comparar a função  $\sinh^{\frac{2}{3}}(t)$  com a função  $t^{\frac{2}{3}}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}}{\frac{1}{\sinh^{\frac{2}{3}}(t)}} = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{\sinh t}{t} \right)^{\frac{2}{3}} = 1 \neq 0.$$

Logo, como são da mesma natureza quando os valores de  $t$  são muito pequenos, podemos calcular o integral da função que pretendemos à custa de uma outra que nós conhecemos bem a sua primitiva, concluindo assim que

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sinh^{\frac{2}{3}}(t)} \approx \int_0^1 \frac{dt}{t^{\frac{2}{3}}} = \left[ 3t^{\frac{1}{3}} \right]_{t=0}^{t=1} = 3 < +\infty.$$

Portanto, concluímos que existe um limite inferior para  $\tau$ , isto é, no tempo presente,  $\tau_{now}$ , apenas uma parte do Universo é observável.

- **Limite superior** - Para calcular o limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \int_1^{\varepsilon} \frac{dt}{\sinh^{\frac{2}{3}}(t)},$$

usamos o facto da função  $\sinh(t)$  se aproximar de uma exponencial quando temos valores de  $t$  muito grandes e, sendo assim, temos que

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sinh^{\frac{2}{3}}(t)} \approx \int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^{\frac{2t}{3}}} = \int_1^{+\infty} e^{-\frac{2t}{3}} dt = \left[ -\frac{3}{2} e^{-\frac{2t}{3}} \right]_{t=1}^{t=+\infty} = \frac{3}{2} e^{-\frac{2}{3}} < +\infty.$$

Do mesmo modo, podemos concluir que existe um limite superior para  $\tau$ .

Sabemos agora que  $\tau \in ]\tau_{\text{inf}}, \tau_{\text{sup}}[$ . Por simplicidade na representação gráfica e, considerando que o Big Bang se deu em  $\tau = 0$ , podemos considerar  $\tau_{\text{inf}} = 0$ .

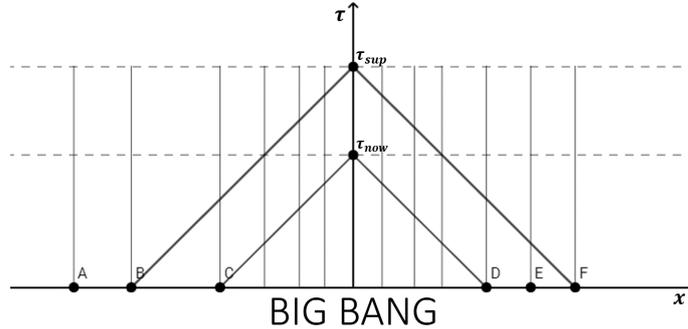


Figura 3: Nosso Universo

Este é o atual modelo do nosso Universo. No tempo presente,  $\tau = \tau_{\text{now}}$ , apenas conseguimos observar as galáxias que se encontram a uma determinada distância de nós, assim como no Universo de Einstein-De Sitter; a única diferença é que há determinadas galáxias cuja luz emitida nunca chegará ao nosso planeta.

No gráfico é visível este facto: em  $\tau = \tau_{\text{now}}$ , apenas observamos as galáxias que se encontram em  $x \in [C, D]$ . As galáxias que se encontram entre  $x \in [B, C] \cup [D, F]$  iremos conseguir observá-las apenas no futuro.

No entanto, as galáxias que se encontram a  $x < B$  e  $x > F$ , por exemplo a galáxia em  $x = A$ , nunca as iremos observar. A este facto, dá-se o nome de **Horizonte Futuro**, isto é, para as galáxias que emitem luz para lá desta distância, mesmo que esperemos uma quantidade infinita de tempo, esse sinal luminoso nunca chegará até nós.

### 3 Paradoxo de Olbers

Heirich Wilhelm Olbers, nasceu em 1758, na pequena cidade de Arbergen, na Alemanha. Foi um astrónomo que ficou mais conhecido pela formulação do Paradoxo de Olbers, em 1823.

Na verdade, o que confundiu Olbers foi o Universo de Minkowski. Olbers acreditava que o nosso Universo era descrito segundo este modelo e, como foi visto na secção anterior, neste modelo, todo o Universo é observável a partir de qualquer evento, isto é, chegam até nós um número infinito de sinais luminosos; portanto, seria de esperar que o céu à noite fosse insuportavelmente brilhante, o que entra em contradição com a realidade em que vivemos, daí o nome de paradoxo.

Com o recurso ao cálculo do fluxo total, irei então verificar em quais dos universos referidos na secção anterior existe paradoxo.

#### 3.1 Fluxo Total

O brilho de uma galáxia que chega aos nossos olhos é determinado pelo correspondente fluxo luminoso, isto é, pela quantidade de energia emitida pela galáxia que incide sobre uma unidade de superfície na Terra por unidade de tempo.

A energia que uma galáxia emite estará dispersa pela área de uma superfície esférica. Recordando que a luz percorre geodésicas nulas podemos concluir que

$$ds^2 = 0 \Leftrightarrow -dt^2 + a^2(t)dx^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \pm \frac{1}{a(t)} \Leftrightarrow x = x_L(t),$$

isto é, o raio da superfície esférica de radiação varia com o tempo.

Consideremos como  $t \in ]t_{BB}, t_{\text{now}}[$  o instante em que a galáxia emitiu luz.

Devido à expansão do Universo, o raio da superfície esférica, no instante  $t = t_{\text{now}}$ , é

$$x_L(t)a(t_{\text{now}}).$$

Consideremos ainda que o Universo tem em média  $n$  estrelas por unidade de volume. Por cada camada esférica de raio  $r$  e espessura  $dx \ll r$  temos aproximadamente

$$n \times 4\pi r^2 \times dx$$

estrelas, pelo que o número de estrelas que emitiram um sinal luminoso entre  $t$  e  $t+dt$  é proporcional a

$$4\pi(x_L(t))^2 \times dx \times a(t_{now}).$$

A **Lei do Inverso do Quadrado** afirma que a intensidade da luz diminui de acordo com o quadrado da distância da fonte que a emite. Por exemplo, imaginemos que apontamos uma lanterna contra uma parede; à medida que afastamos a lanterna da parede, vai-se formando uma mancha luminosa cada vez maior, e a área desta mancha aumenta com o quadrado da distância entre a lanterna e a parede.

Concluimos assim que o fluxo luminoso de uma galáxia decai, portanto, com o quadrado da distância à galáxia. A uma dada distância  $x_L(t)$  da galáxia, e assumindo que, em média, cada estrela tem luminosidade  $L$ , o fluxo luminoso produzido na Terra é dado pela luminosidade  $L$  dividida pela área de uma esfera de raio  $x_L(t)$ , que é a área total  $4\pi x_L(t)^2$  a ser atravessada pela energia irradiada pela galáxia. Logo, o fluxo luminoso é proporcional a

$$4\pi(x_L(t))^2 \times dx \times a(t_{now}) \times \frac{L}{4\pi(x_L(t))^2}.$$

É ainda importante frisar que o fluxo luminoso também decai com  $(1+z)^2$  devido ao desvio para o vermelho. Relembrando a fórmula do desvio para o vermelho,  $T' = T(1+z)$ , vemos que os fótons emitidos pela galáxia durante um intervalo de tempo  $T$  são observados na Terra durante um intervalo de tempo  $T' = T(1+z)$ . Logo, podemos dizer que na Terra se observam  $1+z$  menos fótons por unidade de tempo do que os que foram emitidos. Com isto, o fluxo luminoso diminui por um fator de  $1+z$ .

Por outro lado, segundo a relação de Planck-Einstein, o fóton foi emitido com energia

$$E = \frac{h}{T},$$

em que  $h$  é a constante de Planck. Portanto, concluimos que o fóton chega à Terra com energia

$$E' = \frac{h}{T'} = \frac{h}{T(1+z)} = \frac{E}{1+z},$$

ou seja, se a energia emitida diminui por um fator de  $1+z$ , então o fluxo luminoso também é reduzido por um fator adicional de  $1+z$ .

Assim, passamos a ter que o fluxo luminoso é proporcional a

$$4\pi(x_L(t))^2 \times dx \times a(t_{now}) \times \frac{L}{4\pi(x_L(t))^2} \times \frac{1}{(1+z)^2}.$$

Simplificando a expressão acima, podemos dizer que o fluxo luminoso é proporcional a

$$\frac{dx}{(1+z)^2}.$$

Como na secção 1.5 vimos que

$$\frac{a(t_{now})}{a(t)} = 1+z,$$

concluimos finalmente que o fluxo luminoso é proporcional a

$$\left(\frac{a(t)}{a(t_{now})}\right)^2 \times dx,$$

ou seja,

$$a^2(t) \times dx.$$

Assim sendo, o fluxo total,  $F_{total}$ , é dado por

$$\begin{aligned} F_{total} &= \int a^2(t) dx \\ &= \int a^2(t) \frac{dt}{a(t)} \\ &= \int_{\tau_{BB}}^{\tau_{now}} a^2(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Se existirem infinitas camadas esféricas a contribuir, o fluxo total será infinito e estaremos na presença do paradoxo de Olbers.

## 3.2 Exemplos

### 3.2.1 Universo de Minkowski

Neste Universo, o fator escala é dado por  $a(t) = 1$ .

Como vimos,  $a(\tau) = 1$  e, dado que  $\tau \in ]-\infty, +\infty[$ , temos que  $\tau_{BB} = -\infty$  e assim, neste Universo o fluxo total é

$$F_{total} = \int_{-\infty}^{\tau_{now}} a^2(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\tau_{now}} d\tau = +\infty.$$

Neste Universo, uma vez que o fluxo total é infinito, é suposto o céu à noite ser insuportavelmente brilhante. Dado a realidade em que vivemos, podemos concluir que o Universo em que vivemos não se assemelha ao Universo de Minkowski.

### 3.2.2 Universo de Milne

No caso do Universo de Milne o fator escala é dado por  $a(t) = t$ .

Relembrando as expressões obtidas na secção anterior, temos que  $\tau \in ]-\infty, +\infty[$  e que  $\tau = \log t$ , ou seja,  $t = e^\tau$ .

Portanto para o cálculo do fluxo total usamos  $a(\tau) = e^\tau$  e  $\tau_{BB} = -\infty$ , e podemos concluir que

$$F_{total} = \int_{-\infty}^{\tau_{now}} a^2(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\tau_{now}} e^{2\tau} d\tau = \frac{e^{2\tau_{now}}}{2} < +\infty.$$

Vimos anteriormente que, no Universo de Milne, em qualquer instante, chega aos nossos olhos a luz emitida por todas as galáxias. Portanto, seria de esperar que o fluxo total fosse infinito como no caso anterior. Tal não acontece devido ao desvio para o vermelho, ou seja, alguns fotões chegam à Terra com frequência e, conseqüentemente, com energia mais baixas, pelo que o fluxo total diminui, não havendo paradoxo.

### 3.2.3 Universo de Einstein-de Sitter

Neste último caso, o fator escala é dado por  $a(t) = t^{\frac{2}{3}}$ .

Obtivemos na secção anterior que  $\tau = 3t^{\frac{1}{3}}$ , ou seja,  $t = \frac{\tau^3}{27}$ .

Logo, o fator escala neste Universo em função de  $\tau$  é dado por  $a(\tau) = \frac{\tau^2}{9}$  e como  $\tau \in ]0, +\infty[$ , temos que  $\tau_{BB} = 0$ , concluindo que o fluxo total é

$$F_{total} = \int_0^{\tau_{now}} a^2(\tau) d\tau = \int_0^{\tau_{now}} \frac{\tau^4}{81} d\tau = \frac{\tau_{now}^5}{405} < +\infty.$$

Neste Universo, o céu também é escuro à noite uma vez que o fluxo total é finito. Tal facto deve-se, maioritariamente, à existência do Horizonte Cosmológico, pois apenas uma parte deste Universo é observável neste preciso momento, pelo que não poderíamos ter um fluxo total infinito, não havendo novamente paradoxo.

### 3.2.4 Nosso Universo

No nosso Universo, é de esperar que o fluxo total também dê finito, devido à existência do Horizonte Cosmológico, tal como no caso anterior.

É importante salientar a relevância de termos um céu escuro à noite. A verdade é que é um dos pontos mais importantes para a existência de vida no nosso planeta!

## Referências

- [1] José Natário, *Relatividade Geral Sem Cálculo*
- [2] José Natário, *Mathematical Relativity*