Determinação da parametrização e curvatura de uma superfície em $\mathbb{R}^3$ com a métrica medida por observadores estacionários no espaço-tempo de Schwarzchild

Pedro Filipe

4 de Fevereiro de 2013

Resumo

Em 1916, Karl Schwarzschild descobriu a solução das equações de Einstein correspondente ao campo de gravitação de um corpo esférico de massa M. Considerando apenas três dimensões (t, r, θ), o nosso objectivo é encontrar uma superfície em $\mathbb{R}^3$ com a métrica medida por observadores estacionários no espaço-tempo de Schwarzchild. Iremos também calcular a curvatura em cada um dos pontos dessa mesma superfície.

Determinação da métrica

Se restringirmos o espaço-tempo de Schwarzschild a três dimensões (t, r, θ) - por exemplo, ao hiperplano equatorial - obtemos a métrica:

$$d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 \tag{1}$$

Suponha-se dois observadores estacionários distintos, $O_1 = (t, r, \theta)$ e $O_2 = (t, r + dr, \theta + d\theta)$, com $r, \theta \in \mathbb{R}$. Com o objectivo de calcular a distância entre eles, imagine-se um raio de luz que intersecta ambos os observadores. A distância medida pelos observadores é igual ao tempo, medido no referencial dos observadores, que o raio de luz demora a percorrer essa mesma distância. Como os raios de luz viajam por geodésicas nulas, temos que para o raio de luz

$$d\tau = 0 \Rightarrow d\tau^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} dt = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2} \tag{2}$$

Por outro lado, o observador O_1 mede um tempo próprio

$$d\tau_{O_1} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} dt$$

de onde deduzimos que, sendo ds a distância medida pelo observador O_1,

$$ds = d\tau_{O_1} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} dt = \sqrt{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2}$$

$$\Leftrightarrow ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 \tag{3}$$

Concluímos então, que (3) é a métrica medida pelos observadores estacionários no espaço-tempo de Schwarzschild.

Determinação da parametrização

Considere-se uma parametrização do tipo

$$p(\theta, r) = (r\cos\theta, r\sin\theta, f(r)) \tag{4}$$

onde $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. A escolha de uma parametrização deste tipo prende-se com o facto de a métrica (3) não depender de θ, o que nos leva a ponderar a possibilidade de procurármos uma superfície de revolução.

Uma superfície do tipo de (4) tem *primeira forma fundamental*

$$g = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & f'(r)^2 + 1 \end{pmatrix}$$

e portanto métrica

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + (f'(r)^2 + 1) dr^2$$

que é igual a (3) com

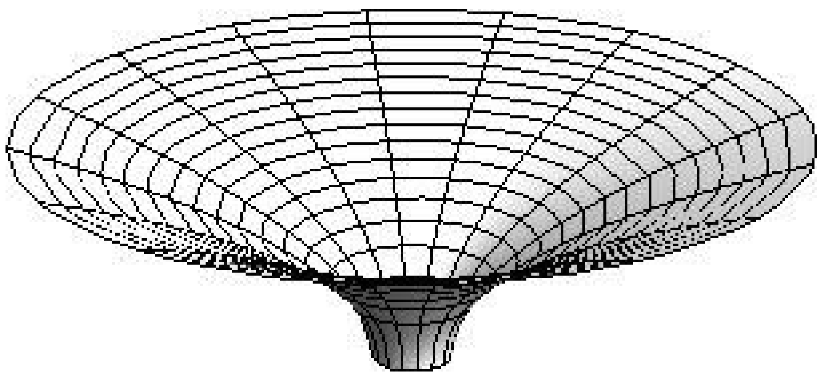
$$f'(r)^2 + 1 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} = \frac{r}{r - 2M}$$

$$\Leftrightarrow f'(r) = \pm\sqrt{\frac{r}{r - 2M} - 1} = \pm\sqrt{\frac{2M}{r - 2M}}$$

$$\Leftrightarrow f(r) = \int \pm\sqrt{\frac{r}{r - 2M} - 1} dr = \pm 2\sqrt{2M}\sqrt{r - 2M} + C_0$$

Note-se que, tanto o sinal, como a constante C_0 determinam superfícies iguais a menos de isometria. Tendo isto em conta, escolhemos $f(r) = 2\sqrt{2M}\sqrt{r-2M}$, ficando com a superfície

$$S_{Obs} = \{(r\cos(\theta), r\sin(\theta), 2\sqrt{2M}\sqrt{r-2M}) \in \mathbb{R}^3 : r > 2M \wedge 0 \leq \theta < 2\pi\} \tag{5}$$



Determinação da curvatura

Agora que temos uma parametrização da superfície, podemos calcular a curvatura.

$$\vec{x_1} = \frac{\partial p}{\partial \theta} = (-r\sin(\theta), r\cos(\theta), 0)$$

$$\vec{x_2} = \frac{\partial p}{\partial r} = (\cos(\theta), \sin(\theta), \sqrt{\frac{2M}{r-2M}})$$

$$\vec{x_{11}} = \frac{\partial^2 p}{\partial \theta^2} = (-r\cos(\theta), -r\sin(\theta), 0)$$

$$\vec{x_{12}} = \vec{x_{21}} = \frac{\partial^2 p}{\partial \theta \partial r} = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)$$

$$\vec{x_{22}} = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} = (0, 0, -\frac{\sqrt{2M}}{2}(r-2M)^{-\frac{3}{2}})$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{x_1} \times \vec{x_2}}{\parallel \vec{x_1} \times \vec{x_2} \parallel} = (\cos(\theta)\sqrt{\frac{2M}{r}}, \sin(\theta)\sqrt{\frac{2M}{r}}, -\sqrt{\frac{r-2M}{r}})$$

$$(D^2x) \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \vec{x_{11}} \cdot \vec{n} & \vec{x_{12}} \cdot \vec{n} \\ \vec{x_{12}} \cdot \vec{n} & \vec{x_{22}} \cdot \vec{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2Mr} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2M}}{2}\sqrt{\frac{1}{r(r-2M)^2}} \end{pmatrix}$$

$$g^{-1}(D^2x) \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{2M}{r^3}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2M}{r^3}} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Sabemos que a *segunda forma fundamental* é semelhante à matriz (6), o que significa que tem os mesmos valores próprios, traço e determinante. Concluímos então que

$$k_1(\theta, r) = -\sqrt{\frac{2M}{r^3}}$$

$$k_2(\theta, r) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2M}{r^3}}$$

$$H(\theta, r) = \operatorname{tr}(g^{-1}(D^2x) \cdot \vec{n}) = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2M}{r^3}}$$

$$G(\theta, r) = \det(g^{-1}(D^2x) \cdot \vec{n}) = -\frac{M}{r^3}$$

Bibliografia

- NATÁRIO, José, *General Relativity Without Calculus*, Springer, 2011 - ISBN 978-3-642-21452-3
- MORGAN, Frank, *Riemannian Geometry*, Jones and Barlett Publishers, 1993 - ISBN 0-86720-242-4