Universidade Técnica de Lisboa

Instituto Superior Técnico

Departamento de Matemática

Universo de Gödel

Patrícia Engrácia

Trabalho Final de Curso

Licenciatura em Matemática Aplicada e Computação

Orientador:

Prof. José Natário

Outubro 2003

Índice

Agradecimentos **1**

Introdução **1**

1 Equações quasi-Maxwell **3**
- 1.1 Regiões estacionárias . . . 3
- 1.2 Equações de movimento . . . 5
- 1.3 Equações quasi-Maxwell . . . 6

2 Universo de Gödel **9**
- 2.1 Métrica . . . 9
- 2.2 Geodésicas . . . 15
- 2.3 Isometrias . . . 20
- 2.4 Relação com $SL(2, \mathbb{R})$ . . . 22

A Apêndice **27**
- A.1 Cálculo do tensor de Ricci (Teorema 2.1.3) . . . 27
- A.2 Cálculo da vorticidade do fluido . . . 28
- A.3 Tempo de coordenadas gasto a percorrer uma geodésica . . . 28
- A.4 Cálculo da aceleração necessária para percorrer a curva nula fechada . . . 29
- A.5 Cálculo dos campos de Killing . . . 31

Bibliografia **35**

Agradecimentos

Queria agradecer ao meu orientador, Prof José Natário, pela ajuda, empenho, tempo, conselhos e sugestões e pela muita, muita, muita, ... muita paciência.

Introdução

Este trabalho tem como objectivo o estudo do Universo de Gödel partindo das equações quasi-Maxwell. Este tipo de análise é completamente original.

No capítulo 1 é feito um pequeno resumo sobre regiões estacionárias, equações de movimento e equações quasi-Maxwell. No capítulo 2 estuda-se o Universo de Gödel, começando por determinar a sua métrica e a da variedade espaço, seguindo-se o cálculo das geodésicas, das isometrias e por fim a sua relação com o grupo $SL(2, \mathbb{R})$.

Em termos de notação usaram-se índices abstractos, representados por letras romanas $a, b, ...$ (por exemplo para representar um campo vectorial X usa-se a notação X^a). Reservam-se no entanto as letras romanas $i, j, ...$ para representarem índices numéricos variando de 1 a 3; letras gregas representam índices numéricos variando de 0 a 3. É usada a convenção da soma de Einstein. A assinatura da métrica é $(- + ++)$ e o tensor de Riemann verifica

$$R_{ab}{}^{c}{}_{d} Z^d = (\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a) Z^c.$$

Capítulo 1

Equações quasi-Maxwell

Neste capítulo faz-se um pequeno resumo sobre regiões estacionárias, variedades espaço e equações quasi-Maxwell, de maneira a introduzir conceitos fundamentais para estudar posteriormente o Universo de Gödel. Para mais detalhes, ver [1].

1.1 Regiões estacionárias

Considere-se um espaço-tempo Q com métrica $g = \langle , \rangle$.

Definição 1.1.1. *Um aberto $U \subset Q$ diz-se uma* região estacionária *se existe um campo de Killing T do tipo tempo definido em U.*

Definição 1.1.2. *Uma subvariedade tridimensional $\Sigma \subset U$ diz-se uma* variedade espaço *se cada curva integral de T intersectar Σ uma única vez, ou seja, se Σ se pode identificar com o quociente de U pelas curvas integrais de T.*

Repare-se que as curvas integrais de T proporcionam uma projecção natural

$$\pi : U \longrightarrow \Sigma.$$

Pode-se agora definir uma *função de tempo global* da seguinte maneira:

$$\begin{array}{rl} t: & U \longrightarrow \mathbb{R} \\ & p \longmapsto t(p) \qquad \text{tal que} \quad \gamma(t(p)) = p \end{array}$$

onde γ é uma curva integral de T com $\gamma(0) \in \Sigma$.

O campo de Killing T identifica uma família especial de observadores: aqueles cujas histórias são as curvas integrais de T, ditos *observadores estacionários.*

Sejam $\{x^i\}_{i=1}^3$ coordenadas locais para Σ. Usando as curvas integrais podem ser estendidas como funções a U. Portanto, $\{t, x^i\}_{i=1}^3$ são coordenadas locais em U. Nestas coordenadas, temos que $\Sigma = \{t = 0\}$, que $T = \frac{\partial}{\partial t}$ e que o elemento de linha da métrica em U é dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= g_{00}\mathrm{d}t^2 + 2g_{0i}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x^i + g_{ij}\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j \\ &= -\mathrm{e}^{2\phi}(\mathrm{d}t + A_i\mathrm{d}x^i)^2 + \gamma_{ij}\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\phi &= \log\sqrt{-g_{00}}\\ A &= A_i \mathrm{d}x^i = \frac{g_{0i}}{g_{00}}\mathrm{d}x^i\\ \gamma &= \gamma_{ij}\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j = (g_{ij} - \frac{g_{0i}g_{0j}}{g_0})\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}x^j\end{aligned}$$

Nota 1.1.3. *ϕ, A e γ podem ser vistos respectivamente como função, forma-1 e métrica em Σ, por não dependerem de t. γ é uma métrica Riemmaniana em Σ, portanto (Σ, γ) é uma variedade Riemanniana. Intuitivamente, γ determina a distância local medida por observadores estacionários. Como $\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t} = 0$, temos que a distância entre observadores estacionários não varia com o tempo.*

Repare-se também que poderíamos escolher um outro campo de Killing com as mesmas curvas integrais, assim como outra variedade espaço. Daqui surgiria outra função de tempo global. Contudo, as seguintes formas diferenciais

$$\begin{aligned}G &= -\mathrm{d}\phi\\ H &= -\mathrm{e}^{\phi}\mathrm{d}A\end{aligned}$$

mantém-se invariantes.

Seja $\{e_i\}_{i=1}^3$ um referencial ortonormado para (Σ, γ) e $\{\hat{\omega}^i\}_{i=1}^3$ o co-referencial dual.

Pode-se definir

$$i_1 : T_x\Sigma \longrightarrow T_x^*\Sigma \qquad \text{tal que}$$

$$i_1(v) = i_1(v^i e_i) = v^i \hat{\omega}^i$$

e

$$i_2 : T_x\Sigma \longrightarrow \Lambda^2 T_x^*\Sigma \qquad \text{tal que}$$

$$i_2(v) = i_2(v^i e_i) = v^1\hat{\omega}^2 \wedge \hat{\omega}^3 + v^2\hat{\omega}^3 \wedge \hat{\omega}^1 + v^3\hat{\omega}^1 \wedge \hat{\omega}^2$$

e com base nestas aplicações podem-se definir o campo gravítico e gravitomagnético na variedade espaço.

Definição 1.1.4. *Na variedade espaço Σ define-se* campo gravítico $\boldsymbol{G}$ *e* campo gravitomagnético $\boldsymbol{H}$ *da seguinte da maneira:*

$$\begin{aligned}G &= i_1(\boldsymbol{G})\\ H &= i_2(\boldsymbol{H}).\end{aligned}$$

1.2 Equações de movimento

Seja $\{e_\alpha\}$ base ortonormal para T_xU que satisfaça $e_0 = \frac{T}{(-\langle T,T\rangle)^{\frac{1}{2}}}$. Tem-se

$$g_{\alpha\beta} = \langle e_\alpha, e_\beta\rangle = \eta_{\alpha\beta}$$

(onde $\eta_{\alpha\beta}$ é -1 se $\alpha = \beta = 0$, 1 se $\alpha = \beta \neq 0$ e 0 se $\alpha \neq \beta$), e $\{\omega^\alpha\}$ o respectivo co-referencial.

Usando $\pi : U \longrightarrow \Sigma$, $\{e_i\}_{i=1}^3$ pode ser identificado como uma base ortonormal para $T_x\Sigma$.

Seja $\{\omega^\alpha\}$ o co-referencial dual, verificando

$$\begin{aligned} \omega^0 &= \mathrm{e}^{\phi}(\mathrm{d}t + A) \\ \omega^i &= \pi^*\hat{\omega}^i \end{aligned}$$

onde $\{\hat{\omega}^i\}_{i=1}^3$ é co-referencial ortonormado para (Σ, γ).

Considere-se também uma geodésica tipo tempo, representando o movimento de uma partícula material com vector unitário tangente

$$u = u^0 e_0 + \mathbf{u}$$

onde u^0 é a energia por unidade de massa de repouso que o observador estacionário mede e

$$\mathbf{u} = u^i e_i$$

é $u^0\mathbf{v}$, onde $\mathbf{v}$ é a velocidade da partícula medida pelo observador estacionário.

Temos que

$$g_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta = -1 \Leftrightarrow (u^0)^2 = 1 + \mathbf{u}^2$$

onde

$$\mathbf{u}^2 = g_{ij}u^i u^j = u^i u^i = \gamma(\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

Para determinar a equação de movimento da partícula podemos escrever a equação de geodésica

$$\begin{aligned} &\nabla_u u = 0 \Leftrightarrow \nabla_u(u^0 e_0 + u^i e_i) = 0 \\ &\quad \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}\tau}e_0 + u^0\omega_0^i(u)e_i + \frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}\tau}e_i + u^i\omega_i^0(u)e_0 + u^i\omega_i^j(u)e_j = 0 \end{aligned} \tag{1.1}$$

mas para tal é necessário primeiro determinar as formas de conexão. Usando as equações estruturais obtém-se

$$\begin{aligned} \omega_i^0 &= \omega_0^i = -G_i\omega^0 - \frac{1}{2}H_{ij}\omega^j \\ \omega_j^i &= -\omega_i^j = \hat{\omega}_j^i - \frac{1}{2}H_{ij}\omega^0 \end{aligned}$$

onde $\hat{\omega}^i_j$ são as formas de conexão em (Σ, γ). Substituindo em (1.1) e separando a equação resultante nas componentes 0 e i obtém-se respectivamente

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}\tau} &= u^0 u^i G_i \\ \left(\frac{\hat{D}\mathbf{u}}{\mathrm{d}\tau}\right)^i &= (u^0)^2 G_i + u^0 H_{ij} u^j \end{aligned}$$

onde $\frac{\hat{D}}{\mathrm{d}t}$ se refere à conexão de Levi-Civita em (Σ, γ).

Note-se que, usando o campo gravítico e gravitomagnético, podem-se reunir as componentes i em

$$\begin{aligned} \frac{\hat{D}\mathbf{u}}{\mathrm{d}\tau} &= (u^0)^2 \mathbf{G} + u^0 \mathbf{u} \times \mathbf{H} \\ &= (1+\mathbf{u}^2)^{\frac{1}{2}} \Big((1+\mathbf{u}^2)^{\frac{1}{2}} \mathbf{G} + \mathbf{u} \times \mathbf{H} \Big) \end{aligned}$$

concluindo assim que, quando os observadores estacionários comparam as suas observações locais, a partícula move-se segundo a influência do campo gravítico e do campo gravitomagnético de uma forma semelhante à do electromagnetismo.

1.3 Equações quasi-Maxwell

Definição 1.3.1. *Um fluido cujas únicas pressões medidas por observadores comóveis seja uma pressão isotrópica diz-se um* fluido perfeito.

Considerando $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ um referencial comóvel associado a um observador comóvel, o tensor energia-momento do fluido perfeito é dado por

$$T = \rho \mathbf{e}_0 \otimes \mathbf{e}_0 + p \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$$

onde ρ é a densidade de energia de repouso do fluido e p é a pressão de repouso. Relembrando que

$$g = -\mathbf{e}_0 \otimes \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_i$$

vê-se que

$$T = (\rho + p) \mathbf{e}_0 \otimes \mathbf{e}_0 + p g$$

ou, dado que $\mathbf{e}_0$ é apenas a velocidade-4 u do fluido,

$$T = (\rho + p) u \otimes u + p g.$$

Pode-se agora reescrever a equação de Einstein

$$R_{ab} - \frac{1}{2}R^c_c g_{ab} = 8\pi T_{ab} \Leftrightarrow R_{ab} = 8\pi\Big(T_{ab} - \frac{1}{2}T^c_c g_{ab}\Big)$$
$$\Leftrightarrow R^{ab} = 8\pi\bigg((\rho+p)u \otimes u + \frac{1}{2}(\rho - p)g^{ab}\bigg).$$

Mas como

$$u = \mathbf{e}_0 = u^0 e_0 + \mathbf{u}$$

temos que

$$\begin{aligned} R^{ab} &= 8\pi(\rho+p)\Big((u^0)^2 e_0 \otimes e_0 + u^0 e_0 \otimes \mathbf{u} + u^0 \mathbf{u} \otimes e_0 + \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}\Big) \\ &+ 4\pi(\rho - p)(-e_0 \otimes e_0 + \gamma) \end{aligned}$$

ou seja

$$R^{00} = 4\pi\Big(\Big(2(u^0)^2 - 1\Big)\rho + \Big(2(u^0)^2 + 1\Big)p\Big) \tag{1.2}$$
$$R^{0i}e_i = 8\pi(\rho+p)u^0\mathbf{u} \tag{1.3}$$
$$R^{ij} = 8\pi\Big((\rho+p)u^i u^j + \frac{1}{2}(\rho-p)\gamma^{ij}\Big). \tag{1.4}$$

Usando as formas de conexão é também possível escrever o tensor de Ricci em função do campo gravítico e gravitomagnético

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\operatorname{div}(\mathbf{G}) + \mathbf{G}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{H}^2 \\ R_{0i}e_i &= \frac{1}{2}\operatorname{rot}(\mathbf{H}) - \mathbf{G} \times \mathbf{H} \\ R_{ij} &= \hat{R}_{ij} + \hat{\nabla}_i G_j - G_i G_j - \frac{1}{2}H_i H_j + \frac{1}{2}\mathbf{H}^2\gamma_{ij} \end{aligned} \tag{1.5}$$

onde $\hat{R}_{ij}$ são as componentes do tensor de Ricci na variedade espaço na correspondente base ortonormal.

Comparando e rearranjando (1.2) e (1.5) obtemos as seguintes equações

$$\operatorname{div}(\mathbf{G}) = \mathbf{G}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{H}^2 - 4\pi\Big(\Big(2(u^0)^2 - 1\Big)\rho + \Big(2(u^0)^2 + 1\Big)p\Big) \tag{1.6}$$
$$\operatorname{rot}(\mathbf{H}) = 2\mathbf{G} \times \mathbf{H} - 16\pi(\rho+p)u^0\mathbf{u} \tag{1.7}$$
$$\begin{aligned} (\hat{R})_{ij} + \hat{\nabla}_i G_j &= G_i G_j + \frac{1}{2}H_i H_j - \frac{1}{2}\mathbf{H}^2\gamma_{ij} \\ &+ 8\pi\Big((\rho+p)u_i u_j + \frac{1}{2}(\rho-p)\gamma_{ij}\Big). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Definição 1.3.2. *Estas equações dizem-se* equações quasi-Maxwell *correspondentes à família de observadores estacionários considerados.*

Capítulo 2

Universo de Gödel

Neste capítulo vai ser feito o estudo do Universo de Gödel. Esta solução das equações de Einstein foi descoberta por Kurt Gödel em 1949 (ver [3],[4]). Descreve o movimento de um fluido que está em rotação em torno de cada um dos observadores comóveis. Esta solução causou um certo desassossego entre os físicos da altura visto Gödel ter mostrado que esta solução contém curvas tipo tempo fechadas o que permitia a hipótese teórica de se poder viajar para o passado.

2.1 Métrica

Para iniciar o estudo deste espaço-tempo começa-se por determinar a métrica. Para tal assume-se que se tem uma variedade espaço plana onde existe um fluido presente. Considera-se que se tem também um campo gravítico e um campo gravitomagnético.

Seja Σ uma variedade espaço plana com $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$ associada ao espaço-tempo V onde está presente um fluido, $\mathbf{G}$ o campo gravítico, $\mathbf{H}$ o campo gravitomagnético e $U = u^0 e_0 + \mathbf{u}$ a velocidade-4 do fluido, em que $\{e_\alpha\}$ é base ortonormal de V.

Considerando a pressão p constante, o fluido encontra-se em queda livre donde

$$\frac{D\mathbf{u}}{d\tau} = \left(u^0\right)^2 \mathbf{G} + u^0 \mathbf{u} \times \mathbf{H}.$$

Se $\mathbf{u}$ for constante tem-se também que

$$\mathbf{H} \times \mathbf{u} = u^0 \mathbf{G}$$

daí que seja natural tomar $\mathbf{G}$ ortogonal a $\mathbf{H}$ e $\mathbf{u}$.

Sejam os campos $\mathbf{G}$ e $\mathbf{H}$ e $\mathbf{u}$ dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= G\frac{\partial}{\partial x} \\ \mathbf{H} &= H\frac{\partial}{\partial y} \\ \mathbf{u} &= u\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

onde G, H e u são constantes positivas.

Teorema 2.1.1. *Nestas condições, para cada $\rho > 0$ as equações quasi-Maxwell têm uma única solução dada por*

$$\begin{aligned} G &= 4\sqrt{\pi\rho} \\ H &= 4\sqrt{2\pi\rho} \\ u &= 1 \\ p &= \rho \end{aligned}$$

e o elemento de linha da métrica do espaço-tempo é

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{e}^{-8\sqrt{\pi\rho}x}\big(\mathrm{d}t + \sqrt{2}\mathrm{e}^{4\sqrt{\pi\rho}x}\mathrm{d}z\big)^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2.$$

Demonstração.

Recordamos que as equações de quasi-Maxwell são dadas por

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\mathbf{G}) = \mathbf{G}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{H}^2 - 4\pi\big(\big(2(u^0)^2 - 1\big)\rho \\ + \big(2(u^0)^2 + 1\big)p\big) \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\mathrm{rot}(\mathbf{H}) = 2\mathbf{G} \times \mathbf{H} - 16\pi(\rho + p)u^0\mathbf{u} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} \hat{R}_{ij} + \hat{\nabla}_i G_j = G_i G_j + \frac{1}{2}H_i H_j - \frac{1}{2}\mathbf{H}^2\gamma_{ij} \\ + 8\pi\Big((\rho + p)u_i u_j + \frac{1}{2}(\rho - p)\gamma_{ij}\Big). \end{aligned} \tag{2.3}$$

De (2.1) tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial x} = G^2 + \frac{1}{2}H^2 - 4\pi\big((2 + 2u^2 - 1)\rho + (2 + 2u^2 + 1)p\big) \\ \Leftrightarrow 0 = G^2 + \frac{1}{2}H^2 - 4\pi\big((1 + 2u^2)\rho + (3 + 2u^2)p\big). \end{aligned} \tag{2.4}$$

De (2.2) tem-se que

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} = 2GH\frac{\partial}{\partial z} - 16\pi(\rho + p)(1 + u^2)^{\frac{1}{2}}u\frac{\partial}{\partial z} \\ \Leftrightarrow 0 = 2GH - 16\pi(\rho + p)(1 + u^2)^{\frac{1}{2}}u. \end{aligned} \tag{2.5}$$

De (2.3) têm-se as seguintes três equações

$$
\begin{aligned}
i=j=1 \quad &\Rightarrow \quad 0 = G^2 - \frac{1}{2}H^2 + 4\pi(\rho - p) && (2.6)\\
i=j=2 \quad &\Rightarrow \quad 0 = 4\pi(\rho - p) && (2.7)\\
i=j=3 \quad &\Rightarrow \quad 0 = -\frac{1}{2}H^2 + 8\pi\Big((\rho+p)u^2 + \frac{1}{2}(\rho - p)\Big). && (2.8)
\end{aligned}
$$

De (2.7) tem-se que

$$p = \rho. \tag{2.9}$$

Substituindo (2.9) em (2.6) obtem-se

$$H^2 = 2G^2 \tag{2.10}$$

e substituindo (2.9) e (2.10) em (2.4) e (2.8) conclui-se que

$$
\begin{aligned}
0 &= G^2 - 8\pi(1+u^2)\rho && (2.11)\\
0 &= -G^2 + 16\pi\rho u^2. && (2.12)
\end{aligned}
$$

Somando estas duas equações obtém-se

$$u = 1$$

e substituindo este resultado em (2.12), tem-se que

$$G = 4\sqrt{\pi\rho}$$

que por sua vez se sbstitui em (2.10)

$$H = 4\sqrt{2\pi\rho}.$$

Ou seja, conclui-se que

$$
\begin{cases}
G &= 4\sqrt{\pi\rho}\\
H &= 4\sqrt{2\pi\rho}\\
u &= 1\\
p &= \rho
\end{cases}
$$

Resta verificar que (2.5) é satisfeita, o que é imediato. Como se viu no capítulo 1, a métrica correspondente a esta família de observadores é dada por

$$ds^2 = -e^{2\phi}(dt + A)^2 + \gamma \tag{2.13}$$

onde

$$
\begin{aligned}
G &= i_1(\mathbf{G}) = -d\phi && (2.14)\\
H &= i_2(\mathbf{H}) = -e^{\phi}dA && (2.15)
\end{aligned}
$$

De (2.14) tem-se que

$$\mathrm{d}\phi = -4\sqrt{\pi\rho}\mathrm{d}x \Leftrightarrow \phi = -4\sqrt{\pi\rho}x + c \tag{2.16}$$

(escolhemos $c = 0$) e de (2.15)

$$\begin{aligned} H\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x &= -\mathrm{e}^{-4\sqrt{\pi\rho}x}\mathrm{d}A \\ &\Leftrightarrow \mathrm{d}A = 4\sqrt{2}\,\sqrt{\pi\rho}\,\mathrm{e}^{4\sqrt{\pi\rho}x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z \\ &\Leftrightarrow A = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{4\sqrt{\pi\rho}x}\mathrm{d}z + \mathrm{d}f. \end{aligned} \tag{2.17}$$

(escolhemos $f = 0$). Como já tinha sido referido, $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$ e portanto

$$\gamma = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{2.18}$$

Substituindo (2.16), (2.17) e (2.18) em (2.13), obtém-se o elemento de linha do espaço-tempo V

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{e}^{-8\sqrt{\pi\rho}x}\left(\mathrm{d}t + \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{4\sqrt{\pi\rho}x}\mathrm{d}z\right)^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2.$$

□

Corolário 2.1.2. *Nas condições do teorema anterior, para o espaço-tempo V, $\frac{\partial}{\partial z}$ é também um campo de Killing tipo tempo, e para a correspondente família de observadores estacionários o campo gravítico e gravitomagnético são dados por*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G} &= 0 \\ \boldsymbol{H} &= 4\sqrt{2\pi\rho}\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{u} = 0$$

ou seja, estes observadores são comóveis com o fluido.

Demonstração.

Como foi visto no teorema anterior, o elemento de linha da métrica é

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{e}^{-8\sqrt{\pi\rho}x}\left(\mathrm{d}t + \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{4\sqrt{\pi\rho}x}\mathrm{d}z\right)^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2.$$

Pode-se agora rearranjar a métrica de maneira apropriada

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -\mathrm{e}^{-8\sqrt{\pi\rho}x}\left(\mathrm{d}t^2 + 2\mathrm{e}^{8\sqrt{\pi\rho}x}\mathrm{d}z^2 + 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{4\sqrt{\pi\rho}x}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z\right) + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \\ &= -\mathrm{e}^{-8\sqrt{\pi\rho}x}\mathrm{d}t^2 - 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-4\sqrt{\pi\rho}x}\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z - \mathrm{d}z^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 \\ &= -\left(\mathrm{d}z + \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-4\sqrt{\pi\rho}x}\mathrm{d}t\right)^2 + \mathrm{e}^{-8\sqrt{\pi\rho}x}\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2. \end{aligned}$$

Mas o elemento de linha pode ser posto na forma

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{e}^{2\phi'}(\mathrm{d}z + A')^2 + \gamma'$$

com

i)

$$\phi' = 0 \Rightarrow \mathbf{G'} = 0$$

ii)

$$\begin{aligned} A' &= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-4\sqrt{\pi\rho}x}\mathrm{d}t \\ &\Rightarrow H' = 4\sqrt{2}\sqrt{\pi\rho}\ \mathrm{d}x \wedge \left(\mathrm{e}^{-4\sqrt{\pi\rho}x}\mathrm{d}t\right) \\ &\Rightarrow \mathbf{H'} = 4\sqrt{2\pi\rho}\frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

Como o espaço-tempo e o fluido são os mesmos, a densidade e a pressão mantêm-se constantes, logo $\rho = p$.

Usando a primeira equação quasi-Maxwell conclui-se que $\mathbf{u'} = 0$:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}(\mathbf{G}') &= \mathbf{G}'^2 + \frac{1}{2}\mathbf{H}'^2 - 16\pi\rho(\mathbf{u'}^2 + 1) \\ &\Leftrightarrow 16\pi\rho\mathbf{u'}^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathbf{u'} = 0. \end{aligned}$$

Assim, conclui-se que $\frac{\partial}{\partial z}$ também é campo de Killing e tem-se para a correspondente família de observadores estacionários

$$\begin{cases} \mathbf{G'} &= 0 \\ \mathbf{H'} &= 4\sqrt{2\rho\pi}\frac{\partial}{\partial y} \\ \mathbf{u'} &= 0. \end{cases}$$

$\square$

Com esta família de observadores comóveis com o fluido o elemento de linha da métrica da variedade espaço é dada por

$$(\mathrm{d}l)^2 = \mathrm{e}^{-8\sqrt{\rho\pi}x}\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2.$$

Teorema 2.1.3. *Para os observadores comóveis com o fluido, a variedade espaço é o produto de um plano hiperbólico por $\mathbb{R}$.*

Demonstração.

Para mostrar o que é pretendido basta mostrar que

$$\mathrm{e}^{-8\sqrt{\rho\pi}x}\mathrm{d}t^2 + \mathrm{d}x^2$$

é o elemento de linha de um plano hiperbólico, ou seja que a variedade com esta métrica tem curvatura escalar constante negativa.

Seja $\{\omega^0, \omega^1\}$ co-referencial para o referido espaço onde

$$\begin{aligned}\omega^0 &= \mathrm{e}^{-4\sqrt{\rho\pi}x}\mathrm{d}t \\ \omega^1 &= \mathrm{d}x\end{aligned}$$

de maneira que os coeficientes da métrica g nesse co-referencial sejam $g_{ij} = \delta_{ij}$.

Logo, só é necessário calcular uma forma de conexão ω_1^0. Uma vez que

$$\mathrm{d}\omega^0 = -4\sqrt{\pi\rho}\omega^0 \wedge \omega^1$$

e

$$\mathrm{d}\omega^1 = 0,$$

pela primeira equação estrutural de Cartan tem-se

$$\omega_1^0 = -4\sqrt{\rho\pi}\ \omega^0$$

e calculando as componentes do tensor de Ricci, como se pode ver em apêndice, obtém-se

$$\begin{aligned}R_{00} &= R_{11} = -16\pi\rho \\ R_{01} &= R_{01} = 0\end{aligned}$$

donde

$$R = -32\pi\rho$$

portanto, constante e negativa.

□

Nota 2.1.4. *Uma vez que a curvatura escalar é $R = -32\pi\rho$, o elemento de linha para o espaço hiperbólico pode também ser dado por*

$$\mathrm{d}l^2 = -\frac{2}{R}(\mathrm{d}r^2 + \sinh^2 r\ \mathrm{d}\phi^2) = \frac{1}{2\omega^2}\big(\mathrm{d}r^2 + \sinh^2 r\ \mathrm{d}\phi^2\big)$$

com $\omega = \sqrt{8\pi\rho}$.

Assim, o elemento de linha para o espaço-tempo pode também ser escrito como

$$\mathrm{d}s^2 = -\Big(\mathrm{d}t + \frac{1}{\omega}(1-\cosh r)\mathrm{d}\phi\Big)^2 + \frac{1}{2\omega^2}\big(\mathrm{d}r^2 + \sinh^2 r\ \mathrm{d}\phi^2\big) + \mathrm{d}z^2$$

visto ter-se

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H} = 2\omega\frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow H &= 2\omega\frac{1}{2\omega^2}\sinh r\ \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\phi \\ &= -\mathrm{d}\Big(\frac{1}{\omega}(1-\cosh r)\mathrm{d}\phi\Big).\end{aligned}$$

Note-se que esta é a única escolha de constante que deixa A bem definido quando $r \to 0$:

$$A = \frac{k - \cosh r}{\omega \sinh r} \sinh r \ \mathrm{d}\phi \Rightarrow \|\boldsymbol{A}\| = \frac{k - \cosh r}{\omega \sinh r}$$

$$\lim_{r \to 0} \frac{k - \cosh r}{\omega \sinh r} \neq \infty \Leftrightarrow k = 1.$$

Fazendo a seguinte mudança de variáveis

$$\begin{cases} r = 2u \\ t = \frac{\sqrt{2}}{\omega} t' \end{cases}$$

o elemento de linha pode também ser escrito como

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{2}{\omega^2}\big(- \mathrm{d}t'^2 + 2\sqrt{2} \sinh^2 u \ \mathrm{d}t' \ \mathrm{d}\phi + \mathrm{d}u^2 + \sinh^2 u (1 - \sinh^2 u) \mathrm{d}\phi^2 \big) + \mathrm{d}z^2$$

(ver [2]). A constante ω pode ser identificada com a vorticidade do fluido (ver apêndice).

2.2 Geodésicas

Após determinar a métrica do Universo de Gödel, é natural perguntar quais serão as geodésicas deste espaço (ver [5]). Uma vez que o Universo de Gödel é o produto de $\mathbb{R}$ por uma variedade Lorentziana de dimensão 3, cujo elemento de linha é

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -\Big(\mathrm{d}t + \frac{1}{\omega}(1 - \cosh r)\mathrm{d}\phi\Big)^2 + \frac{1}{2\omega^2}(\mathrm{d}r^2 + \sinh^2 r \ \mathrm{d}\phi^2) \\ &= \frac{1}{2\omega^2}\Big(- \big(\mathrm{d}t' + \sqrt{2}(1 - \cosh r)\mathrm{d}\phi\big)^2 + \mathrm{d}r^2 + \sinh^2 r \ \mathrm{d}\phi^2\Big) \end{aligned}$$

com

$$t' = \sqrt{2}\omega t,$$

basta analisar as geodésicas desta variedade. Na verdade basta analisar a métrica com $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ visto que ω determina apenas um coeficiente de escala da métrica. Por simplicidade chama-se ainda a esta variedade o Universo de Gödel.

Teorema 2.2.1. *As projecções das geodésicas tipo tempo na variedade espaço do Universo de Gödel são circunferências de raio inferior a um raio máximo, r_{max}, que verifica*

$$\tanh r_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Demonstração.
Para a métrica

$$\mathrm{d}s^2 = -(\mathrm{d}t + \sqrt{2}(1 - \cosh r)\mathrm{d}\phi)^2 + \mathrm{d}r^2 + \sinh^2 r \ \mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2$$

tem-se

$$\begin{aligned} G &= 0 \\ A &= \sqrt{2}(1-\cosh r)\mathrm{d}\phi \\ H &= \sqrt{2}\sinh r\ \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\phi \Rightarrow \mathbf{H} = \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Pela equação das geodésicas tem-se

$$\nabla_u u = 0 \Leftrightarrow \frac{D\mathbf{u}}{\mathrm{d}\tau} = \sqrt{1+\mathbf{u}^2}\ \mathbf{u}\times\mathbf{H}.$$

onde $\frac{D}{\mathrm{d}\tau}$ re refere à conexão de Levi-Civita na variedade espaço.

No referencial $\{e_i\}_{i=1}^2$ com

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{\partial}{\partial r} \\ e_2 &= \frac{1}{\sinh r}\frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned}$$

tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u^1 e_1 + u^2 e_2 = \dot{r}\frac{\partial}{\partial r} + \dot{\phi}\frac{\partial}{\partial \phi} \\ &= \dot{r}e_1 + \sinh r\ \dot{\phi}e_2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \mathrm{d}r \\ \omega^2 &= \sinh r\ \mathrm{d}\phi \end{aligned}$$

donde

$$\omega_1^2 = \coth r\ \omega^2.$$

Como se viu atrás, a equação do movimento é

$$\frac{\mathrm{d}u^i}{\mathrm{d}\tau} + u^j\omega_j^i(\mathbf{u}) = \left(\sqrt{1+\mathbf{u}^2}\ \mathbf{u}\times\mathbf{H}\right)^i. \tag{2.19}$$

Calculando $\mathbf{u}\times\mathbf{H}$ obtém-se

$$\mathbf{u}\times\mathbf{H} = \sqrt{2}\sinh r\ \dot{\phi}e_1 - \sqrt{2}\ \dot{r}e_2$$

e substituindo em (2.19) tem-se

$$\begin{cases} \ddot{r} - \sinh r\ \cosh r\ \dot{\phi}^2 & = \left(1 + \dot{r}^2 + \sinh^2 r\ \dot{\phi}^2\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} \sinh r\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} + 2 \coth r\ \dot{r}\dot{\phi} & = -\left(1 + \dot{r}^2 + \sinh^2 r\ \dot{\phi}^2\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}\dot{r}}{\sinh r} \end{cases}$$

Nas equações anteriores, considerando r constante, tem-se o seguinte sistema

$$\begin{cases} -\cosh r\ \dot{\phi} & = \sqrt{2}\left(1 + \sinh^2 r\ \dot{\phi}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \ddot{\phi} & = 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

De (2.20), $\dot{\phi} < 0$ donde pondo $u = \|\mathbf{u}\|$

$$\begin{cases} u & = -\sinh r\ \dot{\phi} \\ \coth r\ u & = \sqrt{2}\left(1 + u^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dot{\phi} & = -\frac{u}{\sinh r} \\ \frac{u}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}} & = \sqrt{2} \tanh r. \end{cases}$$

Quando $u \to \infty$ tem-se $v = \frac{u}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}} \to 1$, donde se conclui que $r_{\max}$ é tal que $\sqrt{2}\ \tanh r_{\max} = 1$.

Assim, conclui-se que a projecção das geodésicas do tipo tempo na variedade espaço são circunferências de raio menor que $r_{\max}$ em torno de um qualquer ponto, visto o plano hiperbólico ser um espaço homogéneo.

□

Logo, qualquer objecto em queda livre descreve trajectórias circulares fechadas.

O tempo próprio gasto por uma partícula a percorrer uma geodésica é $\Delta\tau = 2\pi \sinh r/u$:

$$\Delta\tau = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \mathrm{d}\tau = \int_0^{-2\pi} \frac{1}{\dot{\phi}} \mathrm{d}\phi = -\frac{2\pi}{\dot{\phi}} = \frac{2\pi \sinh r}{u}$$

enquanto que o tempo de coordenadas é $\Delta t = \sqrt{2}\pi(2 - \cosh r)$, como pode ser visto em apêndice.

Teorema 2.2.2. *No Universo de Gödel existe uma curva nula fechada.*

Demonstração.

Basta notar que

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial\phi}, \frac{\partial}{\partial\phi} \right\rangle = -2(1 - \cosh r)^2 + \sinh^2 r$$

e

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial\phi}, \frac{\partial}{\partial\phi} \right\rangle = 0 \quad & \Rightarrow \quad 2(1 - \cosh r)^2 = \sinh^2 r \\ & \Leftrightarrow \quad 2(1 - 2\cosh r\ + \cosh^2 r) = \cosh^2 r\ - 1 \\ & \Leftrightarrow \quad \cosh r = 3 \end{aligned}$$

Portanto as curvas coordenadas $t = const$, $r = r'$ com r' tal que $\cosh r' = 3$ são curvas nulas fechadas.

$\square$

Note-se r' é maior que $r_{\max}$. Aliás, mostra-se que $r' = 2r_{max}$: foi visto que $\tanh r_{max} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donde $\sinh r = 1$ e $\cosh r = \sqrt{2}$ e portanto

$$\tanh 2r_{max} = \frac{2\sinh r_{max}\ \cosh r_{max}}{\cosh^2 r_{max} + \sinh^2 r_{max}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

Sabe-se também que $\cosh r' = 3$ e portanto $\sinh r' = 2\sqrt{2}$ donde $\tanh r' = \tanh(2r_{max})$ ou seja $r' = 2r_{max}$.

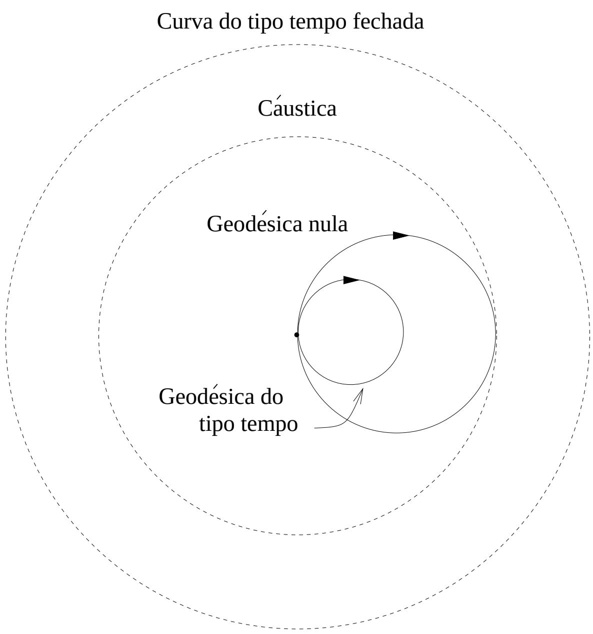

Figura 2.1: Projecções na variedade espaço de geodésicas e curvas causais fechadas.

Mais do que isso: mostra-se que esta curva nula fechada é uma cáustica (ver figura 31 de [2]). Seja p um ponto do espaço-tempo e consideremos todas as geodésicas com origem em p. As geodésicas cujas projecções na variedade espaço verificam $r = r_{\max}$ são geodésicas nulas, tangentes à curva nula fechada $r = 2r_{\max}$. Para mostrar que esta é uma cáustica é necessário que todos os seus pontos sejam conjugados a p. Para tal seja q um ponto da curva nula fechada e considere-se o campo de de Jacobi $-\frac{\partial}{\partial\phi}$ ($-\frac{\partial}{\partial\phi}$ é campo de Killing que se anula em p e logo é campo de Jacobi). As projecções na variedade espaço do campo de Jacobi, $-\pi_*\frac{\partial}{\partial\phi}$, e do vector tangente à geodésica em q, $\pi_* l$, são paralelas. Em q, $-\frac{\partial}{\partial\phi}$ é um vector nulo, e

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial\phi} \right\rangle = -2\sqrt{2}\cosh r_{max} < 0.$$

Como

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial t}, l \right\rangle < 0$$

(uma vez que esta quantidade é conservada ao longo da geodésica e esta aponta na direcção futura), concluimos que $-\frac{\partial}{\partial \phi}$ e l são vectores nulos em q apontando na direcção futura cujas projecções na variedade espaço são paralelas, pelo que são paralelos. Logo p e q são conjugados.

Da demonstração do teorema anterior conlui-se também que qualquer circunferência na variedade espaço com $r < r'$ é projecção de uma curva tipo espaço fechada e com $r > r'$ é projecção de uma curva tipo tempo fechada. A existência destas curvas criou uma certa consternação uma vez que estas curvas 'correm' suavemente de volta a si próprias, o que permitiria a possibilidade teórica de viajar para o passado!!! Uma linha tipo tempo fechada pode ser vista como a curva percorrida por uma pessoa ao longo do tempo, permitindo assim a esta viajar para o seu passado se a aceleração necessária for tolerável e o tempo próprio necessário para tal viagem for inferior ao tempo de vida da pessoa. Tal desafia as noções de causalidade, visto não se poder considerar, em relação a qualquer acontecimento, que a causa é anterior ao efeito causado.

A aceleração necessária para percorrer a curva nula fechada é (ver apêndice)

$$\mathbf{K} = K\frac{\partial}{\partial r}$$

onde

$$K = \frac{\sinh^2 r - \cosh r - 1}{\sinh r\ (\cosh r - 3)}.$$

Note-se que quando $r \to \infty$ tem-se $K \to 1 \ > 0$. Se uma partícula seguir uma circunferência de raio r tal que $\cosh r \geqslant 3$ a aceleração tem sentido $\frac{\partial}{\partial r}$. Tal não é de todo estranho, pois se a partícula se encontrasse em queda livre seguiria uma geodésica, ou seja, seguirira uma circunferência de raio menor. Para tal não acontecer a aceleração tem de contrariar este movimento, tendo portanto sentido $\frac{\partial}{\partial r}$ em vez de $-\frac{\partial}{\partial r}$.

Tendo a aceleração já ter sido calculada pode-se calcular agora $\oint K d\tau$: sendo $\mathbf{u} = \dot{\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}$ com $\dot{\phi} = -\left(\frac{\cosh r + 1}{\cosh r - 3}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sinh r}$ tem-se

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= \int_{\tau_i}^{\tau_f} \mathrm{d}\tau = \int_0^{-2\pi} \frac{1}{\dot{\phi}}\mathrm{d}\phi \\ &= -\int_0^{-2\pi} \sinh r\ \left(\frac{\cosh r - 3}{\cosh r + 1}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}\tau = 2\pi \sinh r\ \left(\frac{\cosh r - 3}{\cosh r + 1}\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

donde

$$\oint K\mathrm{d}\tau = K \oint \mathrm{d}\tau = 2\pi \frac{\sinh^2 r - \cosh r - 1}{\big((\cosh r - 3)(\cosh r + 1)\big)^{\frac{1}{2}}}.$$

Recorde-se que no estudo da métrica considerou-se $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$ para não haver factor de escala ($\frac{1}{2\omega^2} = 1$). Portanto com ω arbitrário este integral vem

$$\oint K'\mathrm{d}\tau' = \frac{1}{2\omega^2} \oint K\mathrm{d}\tau = a^2 \oint K\mathrm{d}\tau$$

onde a é o factor de escala do Universo.

Se um foguetão com massa inicial m_0 quisesse percorrer uma curva tipo tempo fechada, a sua massa final seria dada por

$$m = m_0 \mathrm{e}^{-\frac{1}{b}a^2 \oint K \mathrm{d}\tau}$$

onde b é a velocidade de ejecção do propulsante. Mesmo que o propulsante fosse ejectado à velocidade da luz ($b = 1$), a massa final do foguetão será muito pequena, a não ser que este tenha uma massa inicial elevada ($\mathrm{e}^{-a^2 \oint K \mathrm{d}\tau}$ toma valores pequenos porque o factor de escala do Universo é grande).

2.3 Isometrias

Neste capítulo estudam-se os campos de Killing do Universo de Gödel a fim de determinar as isometrias deste espaço.

Como foi visto atrás, a variedade espaço é o produto do espaço hiperbólico $\mathbb{H}$ por $\mathbb{R}$. A métrica do espaço hiperbólico pode ser escrita como

$$\mathrm{d}l^2 = \frac{1}{y^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y^2$$

e tem-se que

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = 2\omega\frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow H &= 2\omega\frac{1}{y^2}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= -\mathrm{d}\Big(\frac{2\omega}{y}\mathrm{d}x\Big) = -\mathrm{d}\Big(\frac{\sqrt{2}}{y}\mathrm{d}x\Big) \end{aligned}$$

particularizando para $\omega = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Assim o elemento de linha da métrica do Universo de Gödel pode ser escrito como

$$\mathrm{d}s^2 = \Big(\mathrm{d}t - \frac{\sqrt{2}}{y}\mathrm{d}x\Big)^2 + \frac{1}{y^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2. \tag{2.21}$$

Note-se que esta métrica é invariante à esquerda no grupo de Lie $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{H}$. Na verdade usando a translacção à esquerda de $\mathbb{H}$

$$L_{(a,b)}(x, y) = (a, b) \cdot (x, y) = (a + bx, by)$$

tem-se

$$\begin{aligned} \big(L_{(a,b)}\big)^* \frac{1}{y}\mathrm{d}x &= \frac{1}{by}\mathrm{d}(a + bx) = \frac{1}{y}\ \mathrm{d}x \\ \big(L_{(a,b)}\big)^* \frac{1}{y}\mathrm{d}y &= \frac{1}{by}\mathrm{d}(by) = \frac{1}{y}\ \mathrm{d}y \end{aligned}$$

Teorema 2.3.1. *Os campos de Killing do Universo de Gödel são dados pela base:*

i) $\frac{\partial}{\partial t}$

ii) $\frac{\partial}{\partial x}$

iii) $\frac{\partial}{\partial z}$

iv) $x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$

v) $(x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}$

Demonstração.
Considera-se apenas a métrica dada pelo elemento de linha

$$\mathrm{d}s^2 = -(\mathrm{d}t - \frac{\sqrt{2}}{y}\mathrm{d}x)^2 + \frac{1}{y^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y^2 \tag{2.22}$$

uma vez que o espaço com a métrica (2.21) é o produto cartesiano do espaço com a métrica dada por (2.22) com $\mathbb{R}$.

Assim, obviamente, $\frac{\partial}{\partial z}$ é campo de Killing da métrica inicial.

Seja X^a ($X^a = X^\alpha e_\alpha$) campo de Killing da métrica (2.22) e X_a a correspondente forma diferencial ($X_a = X_\alpha \omega^\alpha$). Para tal X_a tem de satifazer

$$\nabla_a X_b + \nabla_b X_a = 0 \tag{2.23}$$

onde

$$\nabla_a X_b = \nabla_\alpha X_\beta \omega^\alpha \otimes \omega^\beta = \big(\partial\alpha X_\beta - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma\big)\omega^\alpha \otimes \omega^\beta$$

Escrevendo a equação (A.3) em coordenadas obtêm-se as seguintes equações:

i) $\partial_0 X_0 = 0$

ii) $\partial_0 X_1 + \partial_1 X_0 - \sqrt{2}X_1 = 0$

iii) $\partial_0 X_2 + \partial_2 X_0 + \sqrt{2}X_1 = 0$

iv) $\partial_1 X_1 - X_2 = 0$

v) $\partial_1 X_2 + \partial_2 X_1 + X_1 = 0$

vi) $\partial_2 X_2 = 0$

onde

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\partial_1 = \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial t} + y\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\partial_2 = y\frac{\partial}{\partial y}$$

Resolvendo estas equações, como se pode ver em apêndice, obtêm-se os campos de Killing do Universo de Gödel.

□

Os três primeiros campos de Killing geram translacções, na coordenada temporal e em duas coordenadas espaciais. O quarto e o quinto campo correspondem a isometrias do espaço hiperbólico, e em particular o quarto gera dilatações no espaço hiperbólico dadas por

$$(x, y) \longmapsto (ax, ay).$$

2.4 Relação com $SL(2, \mathbb{R})$

Considere-se $\mathbb{R}^4$ com a métrica

$$\mathrm{d}s^2 = -(\mathrm{d}y^1)^2 - (\mathrm{d}y^2)^2 + (\mathrm{d}y^3)^2 + (\mathrm{d}y^4)^2.$$

$SL(2, \mathbb{R})$ pode ser identificado com o hiperbolóide

$$(y^1)^2 + (y^2)^2 - (y^3)^2 - (y^4)^2 = 1$$

fazendo a seguinte identificação entre vectores de $\mathbb{R}^4$ e matrizes 2×2

$$(y^1, y^2, y^3, y^4) \longmapsto \begin{pmatrix} y^1 + y^3 & y^4 + y^2 \\ y^4 - y^2 & y^1 - y^3 \end{pmatrix}.$$

Mas este pode ser parametrizado por (r, θ, ψ)

$$\begin{aligned} y^1 &= \cosh r \ \cos\theta \\ y^2 &= \cosh r \ \sin\theta \\ y^3 &= \sinh r \ \cos\psi \\ y^4 &= \sinh r \ \sin\psi. \end{aligned}$$

Nestas novas coordenadas o elemento de linha da métrica induzida em $SL(2, \mathbb{R})$ é dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -(\sinh r \ \cos\theta \ \mathrm{d}r - \cosh r \ \sin\theta \ \mathrm{d}\theta)^2 - (\sinh r \ \sin\theta \ \mathrm{d}r + \cosh r \ \cos\theta \ \mathrm{d}\theta)^2 \\ &\quad + (\cosh r \ \cos\psi \ \mathrm{d}r - \sinh r \ \sin\psi \ \mathrm{d}\psi)^2 + (\cosh r \ \sin\psi \ \mathrm{d}r + \sinh r \ \cos\psi \ \mathrm{d}\psi)^2 \\ &= -\sinh^2 r \ \mathrm{d}r^2 - \cosh^2 r \ \mathrm{d}\theta^2 + \cosh^2 r \ \mathrm{d}r^2 + \sinh^2 r \ \mathrm{d}\psi^2 \\ &= -\cosh^2 r \ \mathrm{d}\theta^2 + \underbrace{\mathrm{d}r^2 + \sinh^2 r \ \mathrm{d}\psi^2}_{\mathbb{H}}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

O espaço com este elemento de linha é o chamado espaço de anti-deSitter. Considere-se a base ortonormada $\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ de $T_{(1,0,0,0)}\mathbb{R}^4$. A cada elemento da base ortonormada fica associada uma matriz 2×2. Fazendo a translacção à esquerda, estas matrizes são enviadas nos seguintes elementos

$$\begin{pmatrix} y^1+y^3 & y^4+y^2 \\ y^4-y^2 & y^1-y^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^1+y^3 & y^4+y^2 \\ y^4-y^2 & y^1-y^3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y^1+y^3 & y^4+y^2 \\ y^4-y^2 & y^1-y^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^4-y^2 & y^1+y^3 \\ y^3-y^1 & y^4-y^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y^1+y^3 & y^4+y^2 \\ y^4-y^2 & y^1-y^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^1+y^3 & -y^4-y^2 \\ y^4-y^2 & y^3-y^1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y^1+y^3 & y^4+y^2 \\ y^4-y^2 & y^1-y^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^4+y^2 & y^1+y^3 \\ y^1-y^3 & y^4-y^2 \end{pmatrix}$$

correspondendo respectivamente aos seguintes vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= (y^1, y^2, y^3, y^4) \\ \mathbf{X}_2 &= (-y^2, y^1, -y^4, y^3) \\ \mathbf{X}_3 &= (y^3, -y^4, y^1, -y^2) \\ \mathbf{X}_4 &= (y^4, y^3, y^2, y^1). \end{aligned}$$

Tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\theta} &= (-y^2, y^1, 0, 0) \\ \frac{\partial}{\partial\psi} &= (0, 0, -y^4, y^3) \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{X}_2 = \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\psi}$$

com

$$\langle \mathbf{X}_2, \mathbf{X}_2 \rangle = -\cosh^2 r + \sinh^2 r = -1.$$

Para obter uma base ortonormada para o hiperbolóide em que $\mathbf{X}_2$ seja um dos vectores, é necessário determinar mais dois vectores unitários e perpendiculares a $\mathbf{X}_2$. Um deles é $\frac{\partial}{\partial r}$ e o outro pode ser escrito como $\alpha\frac{\partial}{\partial\theta} + \beta\frac{\partial}{\partial\psi}$ verificando

$$\begin{cases} \langle \mathbf{X}_2, \alpha\frac{\partial}{\partial\theta} + \beta\frac{\partial}{\partial\psi}\rangle & = & 0 \\ \\ \langle \alpha\frac{\partial}{\partial\theta} + \beta\frac{\partial}{\partial\psi}, \alpha\frac{\partial}{\partial\theta} + \beta\frac{\partial}{\partial\psi}\rangle & = & -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\cosh^2 r\ \alpha + \sinh^2 r\ \beta & = & 0 \\ -\cosh^2 r\ \alpha^2 + \sinh^2 r\ \beta^2 & = & 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha & = & \tanh r \\ \beta & = & \coth r. \end{cases}$$

Assim, a nova base ortonormada é

$$\left\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\psi}, \tanh r\frac{\partial}{\partial\theta} + \coth r\frac{\partial}{\partial\psi}\right\}$$

e a correspondente base dual é

$$\{\mathrm{d}r, \cosh^2 r\ \mathrm{d}\theta - \sinh^2 r\ \mathrm{d}\psi, -\sinh r\ \cosh r\ (\mathrm{d}\theta - \mathrm{d}\psi)\}.$$

Pode-se ter para nova coordenada temporal

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial}{\partial\psi} = \frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\psi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \theta & = & t \\ \psi & = & \tilde{\psi} + t \end{cases}$$

Assim, com as coordenadas $(t, r, \tilde{\psi})$ a base dual escreve-se como

$$\{\mathrm{d}r, \mathrm{d}t - \sinh^2 r\ \mathrm{d}\tilde{\psi}, \sinh r\ \cosh r\ \mathrm{d}\tilde{\psi}\}.$$

Nestas novas coordenadas, a métrica do espaço de anti-deSitter é dada por

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}t - \sinh^2 r\ \mathrm{d}\tilde{\psi})^2 + \mathrm{d}r^2 + \cosh^2 r\ \sinh^2 r\ \mathrm{d}\tilde{\psi}^2.$$

Podemos considerar uma *nova* métrica em que o vector $\mathbf{X}_2$ é multiplicado por uma constante, assim como o correspondente covector

$$\mathrm{d}t - \sinh^2 r\ \mathrm{d}\tilde{\psi} \longmapsto \mu(\mathrm{d}t - \sinh^2 r \mathrm{d}\tilde{\psi}).$$

O elemento de linha da nova métrica é dado por

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -\mu^2(\mathrm{d}t - \sinh^2 r\ \mathrm{d}\tilde{\psi})^2 + \mathrm{d}r^2 + \cosh^2 r\ \sinh^2 r\ \mathrm{d}\tilde{\psi}^2 \\ &= -(\mathrm{d}\tilde{t} - \mu\sinh^2 r\ \mathrm{d}\tilde{\psi})^2 + \mathrm{d}r^2 + \cosh^2 r\ \sinh^2 r\ \mathrm{d}\tilde{\psi}^2 \end{aligned}$$

com $\tilde{t} = \mu t$. Para $\mu = \sqrt{2}$ este é o elemento de linha da métrica de Gödel:

$$\mathrm{d}s^2 = -(\mathrm{d}\tilde{t} - \sqrt{2}\sinh^2 r\ \mathrm{d}\tilde{\psi})^2 + \mathrm{d}r^2 + \cosh^2 r\ \sinh^2 r\ \mathrm{d}\tilde{\psi}^2.$$

De facto, seja $u = 2r$. Para esta mudança de variáveis tem-se $1 - \cosh u = 2\sinh^2 r$. Assim

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= -\left(\mathrm{d}\tilde{t} - \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\cosh u)\mathrm{d}\tilde{\psi}\right)^2 + \frac{1}{4}\mathrm{d}u^2 + \frac{1}{4}\sinh^2 u\ \mathrm{d}\tilde{\psi}^2 \\ &= -\left(\mathrm{d}\tilde{t} - \frac{1}{\sqrt{2}}(1-\cosh u)\mathrm{d}\tilde{\psi}\right)^2 + \frac{1}{4}(\mathrm{d}u^2 + \sinh^2 u\ \mathrm{d}\tilde{\psi}^2) \end{aligned}$$

que é a métrica de Gödel

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(\mathrm{d}t + \frac{1}{\omega}(1-\cosh r)\mathrm{d}\phi\right)^2 + \frac{1}{2\omega^2}(\mathrm{d}r^2 + \sinh^2 r\ \mathrm{d}\phi^2)$$

(visto anteriormente) com $\omega = \sqrt{2}$.

Esta foi a maneira como Gödel obteve inicialmente a sua métrica. (Ver [3].)

Teorema 2.4.1. *O Universo de Gödel é dado por uma métrica invariante à esquerda no revestimento universal de* $SL(2,\mathbb{R})$.

Apêndice A

Apêndice

A.1 Cálculo do tensor de Ricci (Teorema 2.1.3)

A primeira equação estrutural de Cartan é dada por

$$\mathrm{d}\omega^{\alpha} + \omega^{\alpha}_{\beta} \wedge \omega^{\beta} = 0 \tag{A.1}$$

e a segunda é dada por

$$\Omega^{\beta}_{\alpha} = \mathrm{d}\omega^{\beta}_{\alpha} + \omega^{\beta}_{\gamma} \wedge \omega^{\gamma}_{\alpha}. \tag{A.2}$$

De (A.1) tem-se

$$\omega^{0}_{1} = -4\sqrt{\pi\rho}\ \omega^{0}$$

e por (A.2) obtem-se

$$\begin{aligned}\Omega^{0}_{1} &= \mathrm{d}(-4\sqrt{\pi\rho}\omega^{0}) \\ &= 16\pi\rho \mathrm{e}^{-4\sqrt{\pi\rho}x}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}t \\ &= -16\pi\rho\omega^{0} \wedge \omega^{1}.\end{aligned}$$

Mas por outro lado,

$$\Omega^{0}_{1} = R_{01}{}^{0}{}_{1}\omega^{0} \wedge \omega^{1}.$$

Obtém-se então

$$R_{01}{}^{0}{}_{1} = R_{10}{}^{1}{}_{0} = -16\pi\rho.$$

As componentes do tensor de Ricci calculam-se da seguinte maneira

$$R_{ij} = R_{ki}{}^{k}{}_{j}.$$

e são portanto

$$\begin{aligned}R_{00} &= R_{11} = -16\pi\rho \\ R_{10} &= R_{01} = 0.\end{aligned}$$

A.2 Cálculo da vorticidade do fluido

Seja U^a a velocidade-4 do fluido. $U^a = \frac{\partial}{\partial t}$ visto que na segunda família de observadores se tem $\mathbf{u} = 0$.

Assim

$$U_a = g_{\alpha\beta}U^{\alpha}\mathrm{d}x^{\beta} = g_{0\beta}\mathrm{d}x^{\beta} = -\mathrm{d}t - \frac{1}{\omega}(1-\cosh r)\mathrm{d}\phi = \theta^0$$

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{\omega}\sinh r\ \mathrm{d}r \wedge \mathrm{d}\phi = \frac{1}{\omega}2\omega^2\Big(\frac{1}{\sqrt{2}\omega}\mathrm{d}r\Big) \wedge \Big(\frac{\sinh r}{\sqrt{2}\omega}\mathrm{d}\phi\Big) = 2\omega\theta^r \wedge \theta^{\phi}$$

onde

$$\begin{aligned}\theta^r &= \frac{1}{\sqrt{2}\omega}\mathrm{d}r\\ \theta^{\phi} &= \frac{\sinh r}{\sqrt{2}\omega}\mathrm{d}\phi.\end{aligned}$$

Tem-se

$$U \wedge \mathrm{d}U = 2\omega\theta^0 \wedge \theta^r \wedge \theta^{\phi}$$

$${}^*(U \wedge \mathrm{d}U) = 2\omega\theta^z.$$

Por definição, a vorticidade ω^a do fluido é dada por

$$\begin{aligned}\omega^a &= \frac{1}{2}\eta^{abcd}U_b\nabla_{[d}U_{c]} = \frac{1}{2}\eta^{abcd}U_b(\nabla_d U_c - \nabla_c U_d)\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{4}\eta^{abcd}U_b(dU)_{dc} = \frac{1}{4}\eta^{abcd}U_{[b}(dU)_{dc]}\\ &= \frac{1}{4}\eta^{abcd}\frac{2!1!}{3!}(U\wedge dU)_{bdc} = \frac{1}{12}\eta^{abcd}(U\wedge dU)_{bdc}\\ &= \frac{1}{2}\ {}^*(U\wedge \mathrm{d}U) = \omega\frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}$$

ou seja, a constante ω pode ser identificada como a vorticidade do fluido.

A.3 Tempo de coordenadas gasto a percorrer uma geodésica

$$\begin{aligned}\Delta t &= \int_{t_i}^{t_f}\mathrm{d}t = \int_0^{-2\pi}\frac{\dot{t}}{\dot{\phi}}\mathrm{d}\phi\\ &= -2\pi\frac{\dot{t}}{\dot{\phi}} = -2\pi\frac{u^0}{\dot{\phi}} - 2\pi g_{t\phi}\\ &= -2\pi\frac{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}{-\frac{u}{\sinh r}} + 2\sqrt{2}\pi(1-\cosh r)\\ &= \sqrt{2}\pi(2-\cosh r)\end{aligned}$$

onde usámos o facto de que se

$$\mathbf{U} = u^0 e_0 + \mathbf{u} = \dot{t}\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}$$

e supondo

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = \alpha \frac{\partial}{\partial t} + \beta \Big(\frac{\partial}{\partial \phi}\Big)^{\perp}$$

(onde $\left(\frac{\partial}{\partial \phi}\right)^{\perp}$ é ortogonal a $\frac{\partial}{\partial t}$) se tem que

$$\alpha = -g_{t\phi}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbf{U} &= \dot{t}\frac{\partial}{\partial t} - \dot{\phi} g_{t\phi}\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\phi}\beta\Big(\frac{\partial}{\partial \phi}\Big)^{\perp} \\
&= (\dot{t} - \dot{\phi} g_{t\phi})\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\phi}\beta\Big(\frac{\partial}{\partial \phi}\Big)^{\perp} \\
&\Rightarrow u^0 = \dot{t} - \dot{\phi} g_{t\phi} \\
&\Leftrightarrow \dot{t} = u^0 + \dot{\phi} g_{t\phi}
\end{aligned}$$

A.4 Cálculo da aceleração necessária para percorrer a curva nula fechada

Vai ser agora calculada a aceleração necessária para percorrer a curva nula fechada:

$$\mathbf{K} = \left(\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}\tau} - u^0 \mathbf{G}\cdot\mathbf{u}\right)\mathbf{e}_0 + \frac{\hat{D}\mathbf{u}}{\mathrm{d}\tau} - (u^0)^2\mathbf{G} - u^0\mathbf{u}\times\mathbf{H}.$$

Para tal, começa-se por calcular $\frac{\hat{D}\mathbf{u}}{\mathrm{d}\tau}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\hat{D}\mathbf{u}}{\mathrm{d}\tau} &= \hat{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = u^2\frac{1}{\sinh^2 r}\hat{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial\phi}}\frac{\partial}{\partial \phi} \\
&= u^2\frac{1}{\sinh^2 r}\hat{\Gamma}^i_{\phi\phi}\mathbf{e}_i
\end{aligned}$$

com

$$\mathbf{u} = -u\frac{1}{\sinh^2 r}\frac{\partial}{\partial \phi}.$$

Calculando

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial \phi}\right\rangle = (\cosh r - 1)(3 - \cosh r)$$

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle = g_{t\phi} = \sqrt{2}(\cosh r - 1)$$

o vector unitário tangente é dado por

$$U^a = -\frac{\partial}{\partial\phi}\big((\cosh r - 1)(\cosh r - 3)\big)^{-\frac{1}{2}} \qquad < 0 \quad \text{para} \quad \left\langle U, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle < 0$$

e a energia por unidade de massa de repouso é dada por

$$\begin{aligned} u^0 &= -\left\langle U, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial\phi}, \frac{\partial}{\partial t}\right\rangle \big((\cosh r - 1)(\cosh r - 3)\big)^{-\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2}\Big(\frac{\cosh r - 1}{\cosh r - 3}\Big)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

donde u é

$$u = \|\mathbf{u}\| = \big((u^0)^2 - 1\big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\frac{\cosh r + 1}{\cosh r - 3}\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

É necessário ainda calcular $\hat{\Gamma}^i_{\phi\phi}$. Para tal considera-se o lagrangeano

$$L = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + \sinh^2 r\ \dot{\phi}^2)$$

e pelas equações de Euler-Lagrange calculam-se os símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ddot{r} - \sinh r\ \cosh r\ \dot{\phi}^2 = 0 \\ &\Rightarrow \quad \Gamma^r_{\phi\phi} = -\sinh r\ \cosh r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \ddot{\phi} + 2\,\mathrm{cotanh}\, r\ \dot{r}\dot{\phi} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \mathrm{cotanh}\, r. \end{aligned}$$

Assim

$$\frac{\hat{D}\mathbf{u}}{\mathrm{d}\tau} = \hat{\nabla}_{\mathbf{u}}\mathbf{u} = -u^2\,\mathrm{cotanh}\, r\ \frac{\partial}{\partial r} = -\frac{\cosh r + 1}{\cosh r - 3}\,\mathrm{cotanh}\, r\frac{\partial}{\partial r}.$$

A aceleração $\mathbf{K}$ necessária para percorrer a curva nula fechada é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \Big(\frac{\mathrm{d}u^0}{\mathrm{d}\tau} - u^0\mathbf{G}\cdot\mathbf{u}\Big)\mathbf{e}_0 + \frac{\hat{D}\mathbf{u}}{\mathrm{d}\tau} - (u^0)^2\mathbf{G} - u^0\mathbf{u}\times\mathbf{H} \\ &= \frac{\hat{D}\mathbf{u}}{\mathrm{d}\tau} - u^0\mathbf{u}\times\mathbf{H} \end{aligned}$$

visto $\mathbf{G} = 0$ e $u^0 = u^0(r)$.

Ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbf{K} &= -\frac{\cosh r + 1}{\cosh r - 3}\,\mathrm{cotanh}\, r\frac{\partial}{\partial r} + 2\frac{(\cosh^2 r - 1)^{\frac{1}{2}}}{\cosh r - 3}\frac{\partial}{\partial r} \\ &= -\frac{-\sinh^2 r + \cosh r + 1}{\sinh r(\cosh r - 3)}\frac{\partial}{\partial r}.\end{aligned}$$

A.5 Cálculo dos campos de Killing

Usando a métrica

$$\mathrm{d}s^2 = -\Big(\mathrm{d}t - \frac{\sqrt{2}}{y}\mathrm{d}x\Big)^2 + \frac{1}{y^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{1}{y^2}\mathrm{d}y^2$$

define-se o co-referencial ortonormado

$$\begin{aligned}\omega^0 &= \mathrm{d}t - \frac{2}{y}\mathrm{d}x \\ \omega^1 &= \frac{1}{y}\mathrm{d}x \\ \omega^2 &= \frac{1}{y}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

A base dual é formada pelos campos vectoriais

$$\begin{aligned}X_0 &= \frac{\partial}{\partial t} \\ X_1 &= \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial t} + y\frac{\partial}{\partial x} \\ X_2 &= y\frac{\partial}{\partial y}.\end{aligned}$$

Pela primeira equação estrutural de Cartan calculam-se as formas de conexão

$$\begin{aligned}\omega^0_1 &= -\frac{1}{\sqrt{2}y}\mathrm{d}y \\ \omega^0_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}y}\mathrm{d}x \\ \omega^1_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Sabendo as formas de conexão é possível calcular os símbolos de Christoffel, usando

$$\omega^\alpha_\beta = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta}\omega^\gamma$$

donde

$$\begin{aligned}
\Gamma^0_{21} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
\Gamma^0_{12} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\Gamma^1_{20} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
\Gamma^1_{02} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
\Gamma^1_{12} &= -1 \\
\Gamma^2_{01} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\Gamma^2_{11} &= 1 \\
\Gamma^2_{10} &= \frac{1}{\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

Seja X^a campo de Killing da métrica em questão e X_a a correspondente forma diferencial. Para tal X_a tem de satifazer

$$\nabla_a X_b + \nabla_b X_a = 0 \tag{A.3}$$

onde

$$\nabla_a X_b = \nabla_\alpha X_\beta \omega^\alpha \otimes \omega^\beta = \left(\partial\alpha X_\beta - \Gamma^\gamma_{\alpha\beta} X_\gamma\right)\omega^\alpha \otimes \omega^\beta$$

que escrita em coordenadas dá origem às seguintes equações

(i) $\partial_0 X_0 = 0$

(ii) $\partial_0 X_1 + \partial_1 X_0 - \sqrt{2} X_1 = 0$

(iii) $\partial_0 X_2 + \partial_2 X_0 + \sqrt{2} X_1 = 0$

(iv) $\partial_1 X_1 - X_2 = 0$

(v) $\partial_1 X_2 + \partial_2 X_1 + X_1 = 0$

(vi) $\partial_2 X_2 = 0$

onde

$$\partial_0 = \frac{\partial}{\partial t}$$

$$\partial_1 = \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial t} + y\frac{\partial}{\partial x}$$

$$\partial_2 = y\frac{\partial}{\partial y}.$$

Portanto vão-se resolver estas equações em ordem a X_0, X_1 e X_2.

$$(i) \Leftrightarrow X_0 = f(x,y)$$

$$(vi) \Leftrightarrow X_2 = g(t,x)$$

$$\begin{array}{rcll} (iii) & \Leftrightarrow & X_1 & = -\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_2 X_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\partial_0 X_2 \\ & & & = -\frac{y}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial y}f(x,y) - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\partial}{\partial t}g(t,x) \end{array}$$

$$\partial_0(iii) - \sqrt{2}(ii) \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \frac{i(x)}{y}$$

$$\sqrt{2}(ii) - (iv) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}y\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t}g(t,x) - g(t,x) + \frac{1}{\sqrt{2}}i(x) = 0$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} \frac{\partial}{\partial x}g(t,x) & = & 0 \\ g(t,x) & = & \frac{1}{\sqrt{2}}i(x) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow X_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}y\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$$

$$(v) \Leftrightarrow f(x,y) = \frac{1}{2}yi'(x) + j(x) + \frac{1}{y}k(x)$$

Mas já tinha sido visto que

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \frac{i(x)}{y}$$

logo

$$\frac{1}{2}yi''(x) + j'(x) + \frac{1}{y}k'(x) = \frac{1}{y}i(x)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} i''(x) & = & 0 \\ j'(x) & = & 0 \\ k'(x) & = & i(x) \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} i(x) & = & \alpha x + \beta \\ j(x) & = & \gamma \\ k(x) & = & \frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta x + \delta \end{array} \right.$$

Donde

$$f(x,y) = \frac{1}{2}y\alpha + \gamma + \frac{1}{y}(\frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta x + \delta)$$

e, portanto, conclui-se que

1- $X_0 = \frac{1}{2}\alpha y + \gamma + \frac{1}{2}\alpha\frac{x^2}{y} + \beta\frac{x}{y} + \delta\frac{1}{y}$

2- $X_1 = -\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}y + \frac{\alpha}{2\sqrt{2}}\frac{x^2}{y} + \frac{\beta}{\sqrt{2}}\frac{x}{y} + \frac{\delta}{\sqrt{2}}\frac{1}{y}$

3- $X_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{2}}x + \frac{\beta}{\sqrt{2}}$

Assim, particularizando quatro vectores linearmente independentes $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ e tendo em conta que

$$X^a = g^{ab}X_b = -X_0\partial 0 + X_1\partial 1 + X_2\partial 2$$

obtém-se os quatro campos de Killing

i) $\frac{\partial}{\partial t}$

ii) $\frac{\partial}{\partial x}$

iii) $\frac{\partial}{\partial z}$

iv) $x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$

v) $-2\sqrt{2}\ \frac{\partial}{\partial t} + (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}$

No entanto, visto que $\frac{\partial}{\partial t}$ é campo de Killing, v) pode ser substituido por $(x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x} + 2xy\frac{\partial}{\partial y}$.

Bibliografia

[1] W.M. Oliva, *Geometric Mechanics*, Springer, 2002.

[2] S.W. Hawking, G.F.R. Ellis, *The large scale struture of space-time*, Cambridge University Press, 1973.

[3] K. Gödel, *An example of a new type of cosmological solutions of Einstein's field equations of gravitation*, 1949.

[4] K. Gödel, *Rotating universes in general relativity theory*, 1952.

[5] I. Ozsváth, E. Schucking, *Gödel's trip*, American Association of Physics Teachers, 2003.