Classificação de Modelos Cosmológicos Homogéneos

Manuel Santos (79172)

20 de Julho de 2016

Resumo

As equações de Einstein apenas descrevem localmente o espaço-tempo, pelo que não caracterizam a sua topologia, deixando em aberto várias possibilidades. Neste trabalho vamos começar por fazer uma breve descrição dos diferentes grupos de isometria admitidos no espaço-tempo, dando alguns exemplos de modelos cosmológicos. De seguida exploramos um pouco o caso particular das classificações de Bianchi, onde admitimos que o grupo de isometria é simplesmente transitivo em subvariedades de dimensão 3. Esta classificação foi levada a cabo pelo matemático italiano Luigi Bianchi num contexto puramente matemático com o objectivo de classificar grupos e álgebras de Lie. Contudo, tem uma aplicação directa na classificação de modelos cosmológicos. Por fim, vamos explorar uma solução exacta do Tipo I destes modelos, conhecida como modelo de Kasner. Iremos introduzir alguns conceitos matemáticos necessários para uma melhor compreensão, mas não apresentaremos os conceitos de variedade e de cálculo tensorial.

Conteúdo

1 Classificação por grupos de isometria

O grande objectivo dos modelos cosmológicos é descrever como o espaço-tempo, M_4, evolui. Em 1915 Einstein descobriu as equações cujo as soluções são as métricas possíveis que caracterizam a estrutura do universo e o modo como objectos inerciais se movem no espaço-tempo. Temos então:

$$T = G + \Lambda g \tag{1}$$

$$G = Ric - \frac{1}{2}Sg \tag{2}$$

onde T é o tensor de energia-momento que contém toda a informação sobre a matéria no universo; G é o tensor de gravidade de Einstein que contém o tensor de curvatura de Ricci, Ric, a curvatura escalar, S, e a métrica, g. Por fim, Λ é a constante cosmológica que descreve o valor da densidade de energia no vácuo.

Como a equação (1) pode ser escrita na forma de um sistema de equações diferenciais parciais, as soluções são apenas locais, não permitindo uma descrição da topologia do espaço-tempo. Podemos distinguir duas características do nosso universo: **homogéneo** (idêntico quando observado em qualquer ponto do universo) e **isotrópico** (igual em todas as direcções). Observações experimentais levam a concluir que, devido à **radiação cósmica de fundo**, o espaço é isotrópico na zona do Planeta Terra e, aplicando o **princípio Copernicano** de que a Terra não se encontra numa zona especial do universo, podemos assumir que este é de facto isotrópico.

Com isso concluimos que existe uma métrica em $M_4 = \mathbb{R}_+ \times \Sigma$ dada por

$$g = -dt \otimes dt + a^2(t)\left(\frac{1}{1-kr^2}dr \otimes dr + r^2 d\theta \otimes d\theta + r^2 \sin^2\theta d\phi \otimes d\phi\right) \tag{3}$$

onde $k = 1, 0, -1$ consoante a curvatura é negativa, zero ou positiva. Isto corresponde aos espaços $\Sigma = \mathbb{S}^3, \mathbb{R}^3$ e $\mathbb{H}^3$ respectivamente. Estes modelos são os modelos de cosmologia de **Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker** (FLRW). Também são um exemplos de soluções exactas das equações de Einstein.

Contudo, existem geometrias que não são homeomorfas a nenhuma das três geometrias anunciadas. É o caso de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ que admite uma métrica **anisotrópica** mas ainda homogénea. Isto significa que os espaços a três dimensões com curvatura constante são um caso particular dos espaços homogéneos [3].

Com o objecivo de classificar e compreender melhor os diversos espaços homogéneos e a actuação do **grupo de isometria** (transformações que deixam a métrica invariante) sobre o espaço, apresentamos algumas definições matemáticas, começando por esclarecer o que significa a actuação de um grupo num conjunto.

Definição 1. *Um grupo G actua num conjunto M se existe homomorfismo ϕ do grupo G para as funções bijectivas de M para M, i.e,*

$$\phi(g)(p) = A(g, p)$$

onde $A : G \times M \to M$ satisfaz:

- *se e é a identidade de G, então $A(e,p) = p$, $\forall\, p \in M$;*

- *se $h, g \in G$, então $A(h, A(g,p)) = A(hg, p)$, $\forall\, p \in M$.*

*Dizemos que o grupo **actua transitivamente** em M se*

$$\forall\, x, y \in M \quad \exists\, g \in G : \, g(x) = y,$$

onde $g(x) = \phi(g)(x)$.

Definição 2. *Chamamos a $O_x = \{y \in M : \, g(x) = y, \, g \in G\}$ a órbita de x e a $I_x = \{g \in G : \, g(x) = x\}$ o grupo de isotropia de x.*

Note-se que quando $O_x = M$, o grupo actua transitivamente em M. O seguinte resultado relaciona a dimensão do grupo G com a dimensão da órbita e do grupo de isotropia de x:

Teorema 1.1. *Se G é um grupo de Lie e M é uma variedade então*

$$dim(G) = dim(O_x) + dim(I_x)$$

Deste teorema surgem duas maneiras de caracterizar a acção do grupo no conjunto.

Definição 3.

*Se $dim(G) = dim(O_x)$ dizemos que G é **simplesmente transitivo** em O_x.*

*Se $dim(G) > dim(O_x)$ dizemos que G é **multiplamente transitivo**.*

Note-se que se G é transitivo então $dim(G) \geq dim(M)$, limitando assim inferiormente a dimensão de G. Para além disso, se tivermos que G é simplesmente transitivo temos que existe apenas uma transformação $g \in G$ tal que $g(x) = y$, $\forall\, x \in M$ e nesse caso $dim(G) = dim(M)$. Quando $dim(G) > dim(M)$ existe um grupo de isotropia I_x tal que $dim(I_x) = s = dim(G) - dim(M)$

O seguinte resultado permite limitar superiormente a dimensão do grupo de isometria:

Teorema 1.2. *Seja M uma variedade pseudo-Riemanniana de dimensão n. A dimensão do seu grupo de isometria G tem de satisfazer a seguinte desigualdade:*

$$dim(G) \leq \frac{n(n+1)}{2}$$

Como estamos interessados no estudo de M_4, temos que $n = 4$ e por isso o seu grupo de isometrias satisfaz:

$$dim(G) \leq 10$$

Seguindo a análise feita em [3] temos as seguintes hipóteses:

1. $dim(G) = 10$, os modelos não são fisicamente realista;

2. $6 < dim(G) \leq 10$, G é necessariamente transitivo em M_4 mas não é fisicamente realista devido às altas dimensões associadas. Estes grupos foram classificados por Petrov [8].

3. $dim(G) \leq 6$, os modelos são fisicamente realistas e neste caso G pode actuar transitivamente em todo o M_4 ou em subvariedades:

   (a) Se G é **simplesmente transitivo** em todo o M_4 então $dim(G) = 4$ e a variedade é homogénea em todo o espaço-tempo.

   Temos como **exemplos** o universo estático de Einstein, o universo de de Sitter (curvatura positiva) e o universo de anti-de Sitter (curvatura negativa). Contudo, estes modelos não vão de encontro às observações experimentais pois não admitem uma expansão do universo devido à métrica espacial não evoluir no tempo.

   (b) Se G tem um **subgrupo transitivo** apenas no espaço, o espaço-tempo é chamado *espacialmente homogéneo* e neste caso:

      i. Se $dim(G) = 6$, G decompõe-se num grupo simplesmente transitivo de dimensão 3 no espaço e num grupo de isotropia de dimensão 3.
      Exemplo: os modelos de universo de Freidmann-Lemître que são espacialmente homogéneos e isotrópicos

      ii. Se $dim(G) = 4$, G é multiplamente transitivo em subespaços tridimensionais. Estes modelos foram considerados por Kantowski e Sachs.

      iii. Se $dim(G) = 3$ e G é simplesmente transitivo em subespaços de dimensão 3 chegamos à **classificação de Bianchi**.

Na próxima seccção vamos ver, de uma forma resumida, como é feita a classificação de Bianchi. Primeiro faremos algumas considerações sobre grupos e álgebras de Lie.

2 Classificação de Bianchi

Definição 4. *Um **grupo de Lie** G é uma variedade suave que ao mesmo tempo é um grupo e tal que as operações de grupo:*

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \rightarrow & G \\ (g,h) & \mapsto & gh \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcl} G & \rightarrow & G \\ g & \mapsto & g^{-1} \end{array}$$

são funções diferenciáveis.

Temos como exemplo de grupos de Lie os grupos de isometria transitivos em espaço tridimensionais.

A classificação das cosmologias de Bianchi baseia-se na classificação das **álgebras de Lie** destes grupos de Lie. Vejamos então a definição de álgebras de Lie:

Definição 5. *Uma **álgebra de Lie** é um espaço vectorial $\mathfrak{g}$ sobre algum corpo $\mathbb{K}$ com uma operação binária $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ chamada parênteses de Lie que satisfaz as seguintes propriedades:*

- *Bilinearidade:*

  $[aX + bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z], \quad [Z, aX + bY] = a[Z,X] + b[Z,Y],$

  para $\forall\, a, b \in \mathbb{K}$ *e* $\forall\, X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

- *Anti-simétrico:*
  $[X, Y] = -[Y, X], \; \forall\, X, Y \in \mathfrak{g}$

- *Identidade de Jacobi:*
  $[X, [Y, Z]] + [Z, [X, Y]] + [Y, [Z, X]] = 0, \; \forall\, X, Y, Z \in \mathfrak{g}$

Sabemos que quando a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tem dimensão finita o seu parênteses de Lie é determinado por umas constantes de estrutura $C^i_{j\,h}$ em relação a uma base apropriada X_i de $\mathfrak{g}$. Por isso, descrever uma álgebra de Lie equivale a descrever estas constantes. Neste caso temos então,

$$[X_j, X_h] = C^i_{j\,h}\, X_i$$

Notemos que estamos a usar a convenção de Einstein. Ou seja, omite-se os somatórios dos índices repetidos. Sem a convenção a expressão anterior escrever-se-ia:

$$[X_j, X_h] = \sum_{i=1}^{n} C^i_{j\,h}\, X_i$$

com $dim(\mathfrak{g}) = n$.

O seguinte resultado é-nos bastante útil, permitindo relacionar os grupos de Lie com as suas álgebras de Lie:

Teorema 2.1 (Terceiro Teorema de Lie)**.** *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie de dimensão finita. Então existe um só grupo de Lie simplesmente conexo G com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Se um grupo de Lie H tem como álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, existe um único homomorfismo de grupo de Lie $\pi : G \to H$ que é um revestimento e H é difeomorfo a $G/ker(\pi)$.*

Como as equações de Einstein apenas dizem respeito ao comportamento local da solução, o estudo dos diferentes grupos de Lie reduz-se ao estudo das álgebras de Lie. Para isso apenas precisamos de saber as constantes de estrutura e a forma como estas variam com uma mudança de base.

Para tal, podemos olhar para o parênteses de Lie como um tensor-(2,1) com as restrições que vêm da sua definição. Ou seja, as componentes do tensor satisfazem as seguintes propriedades:

$$C^s_{i\,j} C^a_{s\,k} + C^s_{j\,k} C^a_{s\,i} + C^s_{k\,i} C^a_{s\,j} = 0 \tag{4}$$

$$C^i_{j\,h} = -\,C^i_{h\,j} \tag{5}$$

Com estas propriedades e definindo em $\mathfrak{g}$ o vector covariante a

$$a_i := C^j_{j\,i} \tag{6}$$

e o 2-tensor Q dado por

$$Q^{i\,j} := \frac{1}{2}\,\epsilon^{i\,h\,k}(C^j_{h\,k} - \delta^j_h a_k) \tag{7}$$

onde $\epsilon^{i\,h\,k}$ é o 3-tensor canónico totalmente anti-simétrico e δ^j_h o símbolo de Kronecker, chegamos a um resultado que permite decompor as constantes de estrutura em função de a e Q, a chave para classificação de Bianchi.

Lema 1.

1. *Q é um 2-tensor simétrico;*

2. *Q e a satisfazem*

$$Q^{i\,j}a_i = 0$$

3. *As constantes de estrutura são dadas por*

$$C^{j}_{l\,m} = \epsilon_{i\,l\,m}Q^{i\,j} + \frac{1}{2}(\delta^{j}_{l}a_m - \delta^{j}_{m}a_l)$$

Temos então que a matriz Q e o vector a são praticamente livres, com a única condição de que o vector a está no núcleo de Q. Com isto reduzimos a classificação das álgebras de Lie à construção das possíveis matrizes e vectores que compõem as constantes de estrutura.

Contudo, como os $C^{k}_{i\,j}$ dependem da base utilizada, é possível obter várias matrizes M e vectores a diferentes que representam a mesma álgebra. Por isso, utilizando a propriedade 1 do Lema 1, podemos escolher uma base apropriada tal que M é uma matriz diagonal apenas composta por $1, 0$ ou -1. A classificação de Bianchi é feita em relação à característica e assinatura da matriz M:

Classe de Grupo	Tipo de Grupo	Assinatura	Característica
A(a=0)	I	$(0,0,0)$	0
	II	$(+,0,0)$	1
	VI_0	$(0,+,-)$	2
	VII_0	$(0,+,+)$	2
	$VIII$	$(-,+,+)$	3
	IX	$(+,+,+)$	3
B(a≠0)	V	$(0,0,0)$	0
	IV	$(0,0,+)$	1
	VI_h	$(0,+,-)$	2
	VII_h	$(0,+,+)$	2

Tabela 1: Classificação das Cosmologias de Bianchi em dez grupos

Sabemos ([1], pag 40) que existe uma correspondência entre a álgebra de Lie e o campo de vectores invariantes à esquerda, i.e existe um isomorfismo

$$\mathfrak{X}_L(G) \cong \mathfrak{g}$$

Através da seguinte definição e proposição podemos apresentar o tipo de métricas possíveis numa álgebra de Lie.

Definição 6. *A métrica g num grupo de Lie G é* ***invariante à esquerda*** *se*

$$L^{*}_{h}\,g = g, \qquad \forall\, h \in G$$

onde L_h é a ***translacção à esquerda*** *e L^{*}_{h} é o* ***pull-back****.*

Proposição 2.1. *Uma métrica $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ num grupo de Lie G é invariante à esquerda se e só se*

$$\langle v, w \rangle_h \ = \langle DL_{h^{-1}} v, DL_{h^{-1}} w \rangle_e, \qquad \forall\, v, w \in T_h G, \forall\, h \in G$$

Pela proposição concluímos que quaisquer vectores em $\mathfrak{X}_L(G)$ têm entre si produto interno constante ao longo do grupo com uma métrica invariante à esquerda. Por isso, escolhendo uma base em $\mathfrak{X}_L(G)$, a métrica no espaço-tempo pode ser escrita na forma:

$$g = -dt^2 + g_{ij}(t) w^i \otimes w^j \tag{8}$$

Notemos que os coeficientes da métrica dos modelos de FLRW apresentados em (3) apenas dependem do tempo nas coordenadas espaciais. Por isso, temos que para variedades Riemannianas que são grupos de Lie com métricas invariantes à esquerda, os modelos de FLRW são os únicos exemplos de métricas homogéneas e isotrópicas. Neste caso quando $k = 0$ ($M_4 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$) o modelo admite um grupo simplesmente transitivo de Tipo I, para $k = 1$ ($M_4 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^3$) admite um do Tipo IX e se $k = -1$ ($M_4 = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{H}^3$) o modelo é invariante pelo grupo do Tipo V ([3]).

3 Modelos de Kasner

Concluímos anteriormente que os universos de Bianchi descrevem modelos cosmológicos homogéneos mas não necessariamente isotrópicos. Classificadas as possíveis álgebras de Lie, vamos ver um exemplo de modelo do universo homogéneo e não isotrópico de classe A e Tipo I: modelos de Kasner. Foi descoberto por Kasner em 1925 mas bastante estudado e desenvolvido como modelo cosmológico por Lemaître em 1933.

Este modelo, para além de também ser uma solução exacta, é uma generalização dos modelos de FLRW. Isto porque neste caso tomamos funções $a_i(t)$ diferentes para cada $i = 1, 2, 3$ e que apenas dependem do tempo. A título de curiosidade, nos modelos de FLRW a função $a(t)$ determina o raio do universo.

Apesar do comportamento do modelo não estar de acordo com as observações experimentais no presente estado do universo, tem interesse compreendê-lo para entender melhor o espaço-tempo perto da singularidade inicial.

Para este caso tomamos como grupo de isometria G o grupo abeliano $\mathbb{R}^3$, onde as constantes de estrutura são nulas, i.e $C^k_{i\,j} = 0$. Recorrendo à seguinte relação ([2], pag 39):

$$dw^k = -\frac{1}{2} C^k_{ij} w^i \wedge w^j$$

concluímos que $dw^k = 0$, pelo que podemos escolher $w^i = dx^i$, visto que $d(dx^i) = 0$.

Temos então uma métrica da forma:

$$g = -dt^2 + a_i(t)^2\, dx^i \otimes dx^i$$

e definida em $K := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$.

Recordemos a equação de Einstein (1):

$$G + \Lambda g = T$$

onde $G = Ric - \frac{1}{2} S\, g$.

Como pretendemos analisar o caso no vácuo, o tensor de energia-momento T e a constante cosmológica Λ são zero. Pelo que apenas ficamos com

$$G \quad = \quad 0 \tag{9}$$

Definindo um referencial ortonormado

$$e_0 = \partial_t = \frac{\partial}{\partial t} \qquad e_i = \frac{1}{a_i}\partial_i = \frac{1}{a_i}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

temos o seguinte lema de [6]:

Lema 2.

$$G(e_\alpha, e_\beta) = 0 \quad \forall\, \alpha, \beta \iff Ric(e_\alpha, e_\beta) = 0 \quad \forall\, \alpha, \beta$$

Baseando-nos no facto que os únicos parênteses de Lie e as únicas componentes da conexão de Levi-Civita não nulas são

$$[e_0, e_i] = -\frac{\dot{a}_i}{a_i} \qquad [e_i, e_0] = \frac{\dot{a}_i}{a_i}$$

$$\nabla_{e_i} e_0 = \frac{\dot{a}_i}{a_i} e_i \qquad \nabla_{e_i} e_i = \frac{\dot{a}_i}{a_i} e_0$$

e após alguma manipulação algébrica podemos concluir que:

$$\begin{aligned}
Ric(e_0, e_i) &= 0 \\
Ric(e_i, e_j) &= 0 \\
Ric(e_0, e_0) &= -\left(\left(\frac{\dot{a}_i}{a_i}\right)^2 + \partial_t\left(\frac{\dot{a}_i}{a_i}\right)\right) && (10) \\
Ric(e_i, e_i) &= \partial_t\left(\frac{\dot{a}_i}{a_i}\right) + \frac{\dot{a}_i}{a_i}\theta && (11)
\end{aligned}$$

para $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ e $\theta = \frac{\dot{a}_j}{a_j}$.

Por fim, recorrendo ao Lema 2 e à expressão (11) podemos concluir que

$$\partial_t\left(\frac{\dot{a}_i}{a_i}\right) + \theta\frac{\dot{a}_i}{a_i} = 0 \tag{12}$$

Para simplicar escrevemos $\theta_i = \frac{\dot{a}_i}{a_i}$ e temos então $\theta = \sum_{i=1}^{3} \theta_i$. Reescrevendo (12),

$$\partial_t(\theta_i) + \theta\theta_i = 0 \tag{13}$$

Note-se que (12) e (13) não estão escritas pela convenção de Einstein. Com o objectivo de tornar as coisas mais claras vamos explicitar o somatório na próxima expressão:

$$
\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=1}^{3} \partial_t(\theta_i) + \theta\theta_i \\
&= \partial_t\left(\sum_{i=1}^{3} \theta_i\right) + \theta \sum_{i=1}^{3}(\theta_i) \\
&= \dot{\theta} + \theta^2
\end{aligned}
$$

Como $\theta = \theta(t)$, podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
& \dot{\theta}(t) && = -\theta^2(t) \\
\Longleftrightarrow \quad & -\tfrac{\dot{\theta}(t)}{\theta^2(t)} && = 1 \\
\Longleftrightarrow \quad & \left(\tfrac{1}{\theta(t)}\right) && = 1 \\
\Longleftrightarrow \quad & \theta(t) && = \frac{1}{t - t_0}
\end{aligned}
$$

Temos por isso que $\theta(t)$ tem solução para $t \in]t_0, \infty[$ e $t_0 \in \mathbb{R}$. Seguindo o raciocínio de [6], concluímos que t_0 pode tomar qualquer valor real se for feita uma devida translação da coordenada do tempo. O ponto t_0 vai ser considerado o instante em que o espaço-tempo passou a existir (**Big Bang**). Para efeitos de simplicidade definimos $t_0 = 0$.

Com o objectivo de calcular as funções $a_i(t)$ vamos determinar primeiro as funções $\theta_i(t)$:

Proposição 3.1. *Seja $\theta(t) = \frac{1}{t}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$ e $\theta(t_a) > 0$ para algum $t_a \in \mathbb{R}_+$. Então,*

$$
\theta_i(t) = \frac{p_i}{t} \quad e \quad \sum_{i=1}^{3} p_i = 1
$$

Demonstração. Temos de (13) que

$$
\dot{\theta}_i(t) + \frac{\theta_i(t)}{t} = 0
$$

Por inspecção vemos que temos como solução

$$
\theta_i(t) = \frac{p_i}{t}
$$

onde $\theta_i(t)$ está também definido em $]0, \infty[$. Para além disso temos,

$$
\frac{1}{t} = \theta(t) = \sum_{i=1}^{3} \theta_i(t) = \sum_{i=1}^{3} \frac{p_i}{t} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{3} p_i
$$

obtendo por fim $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$.

$\square$

Temos o resultado que permite calcular as funções $a_i(t)$:

Proposição 3.2. *Seja* $\theta(t) = \frac{1}{t}$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$ *e* $\theta(t_a) > 0$. *Temos então a solução*

$$a_i(t) = C_i\, t^{p_i}, \quad \forall\, t \in]0, \infty[$$

onde $C_i \in \mathbb{R}_+$

Demonstração. Usando a definição de $\theta_i(t)$ e o lema anterior concluímos que

$$\dot{a}_i(t) - \frac{p_i\, a_i(t)}{t} = 0$$

tendo como solução

$$a_i(t) = C_i\, t^{p_i}$$

Assumindo que $\theta(t_a) = \frac{1}{t_a} > 0$ e que $a_i(t_a) = C_i t_a^{p_i} > 0$, concluímos que as constantes C_i são todas positivas. □

Chegamos então à seguinte métrica:

$$g = -dt^2 + C_i^2\, t^{2p_i} dx^i \otimes dx^i$$

Reescalando as coordenadas de forma conveniente podemos obter ainda ($C_i = 1$),

$$g = -dt^2 + t^{2p_i} dx^i \otimes dx^i$$

É ainda possível provar que

$$\sum_{i=1}^{3} p_i^2 = 1 \tag{14}$$

o que restringe mais a liberdade de escolha dos p_i. Isto vem do facto de se verificar $Ric(e_0, e_0) = 0$ quando $\theta(t) = \frac{1}{t}$ ([6], pag 12).

Concluímos assim que a equação de Einstein no vácuo é satisfeita, i.e $G = 0$ ([6], Teorema 20).

Temos por fim a definição da classe das métricas de Kasner:

Definição 7. *O conjunto das métricas da forma*

$$g = -dt^2 + t^{2p_i} dx^i \otimes dx^i$$

na variedade $K = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^3$ *com* p_i *a satisfazerem:*

$$\sum_{i=1}^{3} p_i = 1 \qquad \sum_{i=1}^{3} p_i^2 = 1$$

é chamada a ***classe das métricas de Kasner***

4 Conclusão

Como vimos, o conjunto dos modelos cosmológicos homogéneos é bastante vasto. Em grande medida devido à natureza local das equações de Einstein como referido anteriormente. Embora as observações experimentais apontem para a existência de um universo isotrópico, existem mais opções de universos teóricos não isotrópicos. No caso particular da classificação de Bianchi, apenas podemos contar três modelos do universo com curvatura constante. Apesar disso mantém-se o interesse pelo estudo de modelos não isotrópicos de um ponto de vista matemático e geométrico. Contudo estes modelos podem-nos dar informações cruciais para compreendermos a evolução do universo nos seus primórdios, perto da singularidade inicial ($t = 0$). Para além disso, este estudo também se revela frutífero no contexto da Teoria da Unificação, onde são necessárias dimensões extra do espaço tempo (como utilizado na Teoria da Cordas) o que leva a que a geometria do espaço seja invariavelmente anisotrópica de modo a ser compatível com a expansão das três dimensões espaciais [7].

Referências

[1] Leonor Godinho, José Natário. *An Introduction to Riemannian Geometry.* Springer-Verlag, 2012.

[2] G. F. R. Ellis, J. Wainwright. *Dynamical Systems in Cosmology.* Cambridge University Press, 1997.

[3] Marc Lachièze-Rey, Jean-Pierre Luminet.
`http://arxiv.org/abs/gr-qc/9605010v2`

[4] Y. Choquet-Bruhat. *General Relativity and the Einstein Equations.* Oxford University Press, 2009.

[5] Michael P. Ryan, Lawrence C. Shepley. *Homogeneous Relativistic Cosmologies.* Princeton University Press, 1975.

[6] Oliver Lindblad Petersen. *Bianchi type I solutions to Einstein's vacuum equations.*
`http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:650621/FULLTEXT01.pdf`

[7] Maurizio Gasperini. *Theory of Gravitational Interactions.* Springer-Verlag, 2013.

[8] Petrov, A.Z. *Einstein spaces.* Pergamon Press, Oxford, 1969.