

# INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

---

## Distorções Relativistas

---

LAURA MELO

7 de Julho de 2017

### Conteúdo

<b>1</b>	<b>Conceitos</b>	<b>1</b>
1.1	Tranformações de Lorentz . . . . .	1
1.2	Geometria de Minkowski . . . . .	1
1.2.1	Diagrama Espaço-Tempo . . . . .	1
1.2.2	Métrica de Minkowski . . . . .	2
1.3	Projeção de Mercator . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Desenvolvimento</b>	<b>4</b>
2.1	Efeito na projeção de Mercator . . . . .	7
2.1.1	Efeito de Doppler . . . . .	8
2.1.2	Potência Total . . . . .	9
2.1.3	Luminosidade . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Exemplos</b>	<b>10</b>

# 1 Conceitos

## 1.1 Transformações de Lorentz

Einstein formulou o seu trabalho em Teoria da Relatividade começando por dois postulados:

1. Princípio da Relatividade: quaisquer dois referenciais inerciais são equivalentes.
2. Invariância da Velocidade da Luz: a velocidade da luz é a mesma em todos os referenciais inerciais.

No sentido de criar uma adaptação das transformações de Galileu que fosse compatível com o segundo postulado, Einstein deduziu as Transformações de Lorentz (que relacionam o tempo  $t$  e posição  $x$  num referencial  $S'$  que se mova com velocidade  $v$  em relação a outro  $S$ ):

$$\begin{cases} t' = \gamma(t - vx) \\ x' = \gamma(x - vt) \end{cases} \quad \text{com } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{v}{c})^2}}$$

Sendo a velocidade da luz a mesma para todos os observadores em qualquer referencial inercial podemos então atribuir-lhe o valor  $c = 1$ .

Neste caso, passamos a ter:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

## 1.2 Geometria de Minkowski

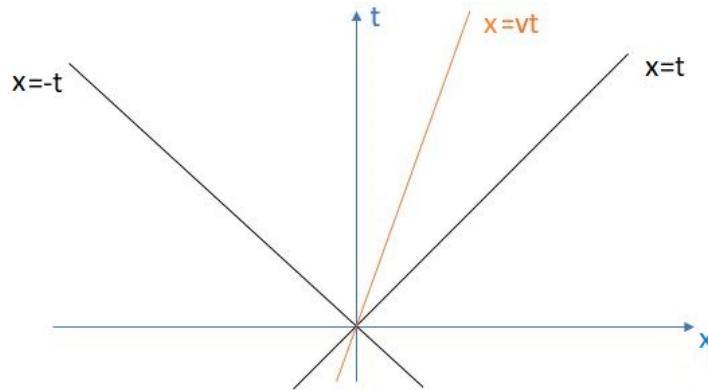
### 1.2.1 Diagrama Espaço-Tempo

Um diagrama de espaço-tempo corresponde a representar a posição  $x$  de uma partícula num determinado instante de tempo  $t$ . Construímos desta maneira a história de uma partícula onde representamos a sua posição para cada instante  $t$ :  $(t, x)$ .

Deste modo, um raio de luz que, como referido, move-se com velocidade  $\pm 1$ , terá uma história  $x = y_0 \pm t$ , sendo  $y_0$  a posição do sinal no instante  $t = 0$ .

Pelas transformações de Lorentz, sabemos que a velocidade de uma partícula nunca poderá ser superior à da luz.

Isto significa que, em dado instante, se desenharmos as "possíveis trajetórias" de um raio de luz, a história de uma dada partícula não poderá intersecá-las:



A representação da história de uma partícula no espaço obriga-nos obviamente a trabalhar em  $\mathbb{R}^4$ . Representamos agora o espaço-tempo  $(t, x, y, z)$  como  $(y_0, y_1, y_2, y_3)$ .

No caso da luz, como se propaga em todas as direções com velocidade  $\pm 1$  então, em cada instante  $y_0$ , a sua possível posição será ao longo de uma superfície esférica de raio  $y_0$ . Temos desta forma a equação do cone de luz futuro ( $y_0 > 0$ ):

$$y_0^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

### 1.2.2 Métrica de Minkowski

O estudo da Relatividade Restrita baseia-se em estudar a Geometria de Minkowski e as suas propriedades para representar o espaço-tempo ao invés da habitual Geometria Euclideana.

Definimos  $\Delta\tau$  como o intervalo entre dois acontecimentos causalmente relacionados, i.e., acontecimentos tais que a  $|\Delta x| \leq |\Delta t|$ , em  $S$ :

$$\Delta\tau^2 = \Delta t^2 - \Delta x^2$$

Este intervalo não depende do referencial usado pois:

$$\begin{aligned} \Delta\tau'^2 &= \Delta t'^2 - \Delta x'^2 \\ &= \gamma^2(\Delta t - v\Delta x)^2 - \gamma^2(\Delta x - v\Delta t)^2 \\ &= \gamma^2(\Delta t^2 + v^2\Delta x^2 - 2v\Delta t\Delta x - \Delta x^2 - v^2\Delta t^2 + 2v\Delta t\Delta x) \\ &= \gamma^2(1 - v^2)\Delta t^2 - \gamma^2(1 - v^2)\Delta x^2 \\ &= \Delta t^2 - \Delta x^2 \\ &= \Delta\tau^2 \end{aligned}$$

Os acontecimentos ao longo da história de um sinal luminoso apresentam  $\Delta\tau = 0$  pois  $c = 1$ , i.e.,  $|\Delta x| = |\Delta t|$ .

### 1.3 Projeção de Mercator

A projeção de Mercator é a mais famosa forma de representação do globo terrestre. Foi apresentada pela primeira vez em 1569 por Gerhard Kramer e ajudou muito os marinheiros da época pois esta representação, apesar de distorcer os tamanhos, é conforme, ou seja, preserva os ângulos.

Esta é uma projeção cilíndrica do globo que distorce drasticamente os tamanhos reais quanto maior ou quanto menor for a latitude nas direções este ou oeste:

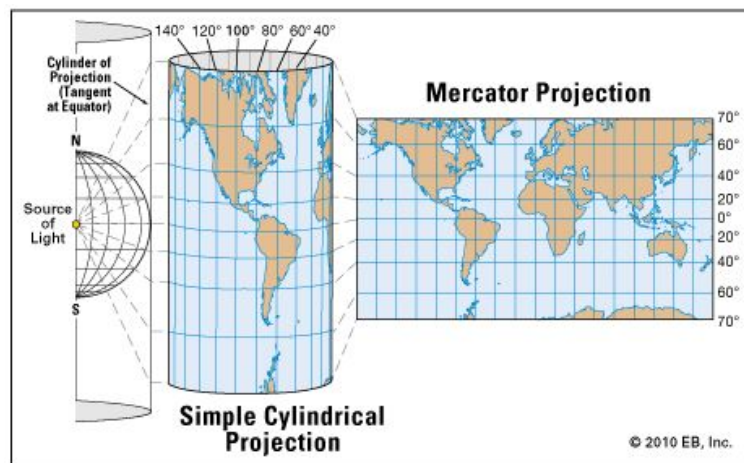


Figura 1: Projeção de Mercator

A métrica da esfera é dada por:

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2$$

sendo  $\theta$  e  $\varphi$  os usuais ângulos das coordenadas esféricas.

Podemos tomar  $\psi \in \mathbb{R}$  como sendo:

$$\sin(\theta) = \frac{1}{\cosh(\psi)}$$

$$\Rightarrow \cos(\theta)d\theta = -\frac{\sinh(\psi)}{\cosh^2(\psi)} d\psi$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta^2}{\sin^2(\theta)} = \frac{1}{\sin^2(\theta) \cos^2(\theta)} \frac{\sinh^2(\psi)}{\cosh^4(\psi)} d\psi^2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{\cosh^2(\psi)}} \frac{\sinh^2(\psi)}{\cosh^2(\psi)} d\psi^2 = \frac{\sinh^2(\psi)}{\cosh^2(\psi) - 1} d\psi^2 = d\psi^2$$

Deste modo, a métrica na forma de Mercator fica então:

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2 = \sin^2(\theta) \left( \frac{d\theta^2}{\sin^2(\theta)} + d\varphi^2 \right) = \frac{1}{\cosh^2(\psi)} (d\psi^2 + d\varphi^2)$$

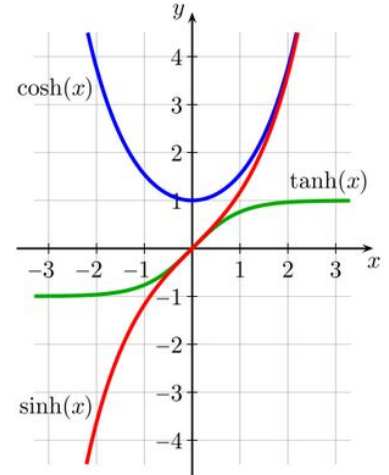
## 2 Desenvolvimento

Como já foi dito, as velocidades que consideramos não são superiores em módulo à da luz, i.e.:

$$-1 \leq v \leq 1$$

Podemos então representar as velocidades como  $v = \tanh(u)$ ,  $u \in \mathbb{R}$  visto que, observando o seguinte gráfico, a  $\tanh$  toma todos os valores entre  $-1$  e  $1$ . Aproveitamos também para relembrar algumas propriedades das funções hiperbólicas:

1.  $\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$
2.  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$
3.  $\sinh(-x) = -\sinh(x)$
4.  $\cosh(-x) = \cosh(x)$
5.  $\sinh(x + y) = \sinh(x) \cosh(y) + \cosh(x) \sinh(y)$
6.  $\cosh(x + y) = \cosh(x) \cosh(y) + \sinh(x) \sinh(y)$



A representação de  $v$  como  $v = \tanh(u)$  irá simplificar as nossas contas daqui para a frente pois neste caso as constantes das Transformações de Lorentz tomam valores fáceis de relacionar:

$$\begin{cases} v = \tanh(u) \\ \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\tanh^2(u)}} = \sqrt{\cosh^2(u)} = |\cosh(u)| = \cosh(u) \\ \gamma v = \cosh(u) \tanh(u) = \cosh(u) \frac{\sinh(u)}{\cosh(u)} = \sinh(u) \end{cases}$$

Vamos então imaginar um referencial  $S'$  que se move paralelamente ao longo do eixo  $y_3$  em relação a outro referencial  $S$  com uma velocidade  $v = \tanh(u)$ .

Podemos então representar as histórias das partículas em  $S'$  com base nas suas coordenadas em  $S$ :

$$\begin{cases} y'_0 = \gamma(y_0 - v y_3) = \cosh(u) y_0 - \sinh(u) y_3 \\ y'_1 = y_1 \\ y'_2 = y_2 \\ y'_3 = \gamma(y_3 - v y_0) = \cosh(u) y_3 - \sinh(u) y_0 \end{cases} \quad (1)$$

Um raio luminoso poderá então ser representado pela curva:

$$x(\lambda) = \lambda y$$

em que  $\langle y, y \rangle = 0$  pois  $\Delta\tau = 0$  e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . As suas coordenadas espaço-tempo no referencial  $S$  são dadas por  $(y_0, y_1, y_2, y_3)$  e no referencial  $S'$  por  $(y'_0, y'_1, y'_2, y'_3)$  como indicado em (1).

Se quisermos indicar a direção de um objecto que é visto no céu temos de ter em conta que o estamos a ver na direção oposta à da propagação de um raio de luz.

Isto quer dizer que, sendo  $(x_1, x_2, x_3)$  a direção desse objecto, teremos então:

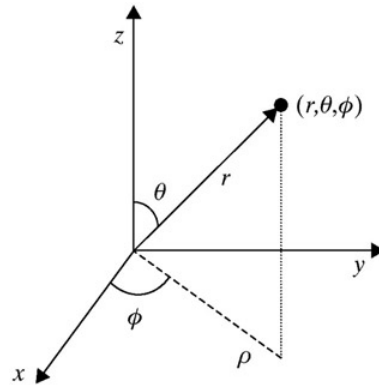
$$x_i = -\frac{y_i}{y_0} \in S^2$$

Por (1), obtemos as transformações para o referencial  $S'$  em relação a  $S$ :

$$\begin{cases} x'_i = -\frac{y'_i}{y'_0} = -\frac{y_i}{\cosh(u)y_0 - \sinh(u)y_3} = \frac{x_i}{\cosh(u) + \sinh(u)x_3}, & i = 1, 2 \\ x'_3 = -\frac{y'_3}{y'_0} = -\frac{\cosh(u)y_3 - \sinh(u)y_0}{\cosh(u)y_0 - \sinh(u)y_3} = \frac{\cosh(u)x_3 - \sinh(u)}{\cosh(u) + \sinh(u)x_3} \end{cases} \quad (2)$$

## Coordenadas Esféricas

As coordenadas esféricas de um dado ponto são dadas por:

$$\begin{cases} x_1 = \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ x_2 = \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ x_3 = \cos(\theta) \end{cases} \quad \text{com} \quad \begin{cases} \theta \in [0, \pi] \\ \varphi \in [0, 2\pi] \end{cases}$$


Vimos anteriormente em (2) que:

$$(x'_1, x'_2) = \frac{1}{\cosh(u) + \sinh(u) \cos(\theta)} (x_1, x_2)$$

Temos assim que  $(x'_1, x'_2) \propto (x_1, x_2)$  e desta observação torna-se óbvio que os ângulos  $\varphi$  e  $\varphi'$  têm de ser iguais em ambos referenciais pois:

$$(x'_1, x'_2) \propto (x_1, x_2) \Rightarrow \sin(\theta') \left( \cos(\varphi'), \sin(\varphi') \right) \propto \sin(\theta) \left( \cos(\varphi), \sin(\varphi) \right) \Rightarrow \varphi' = \varphi$$

É então possível obter a representação das coordenadas esféricas no referencial  $S'$  em relação às coordenadas esféricas de  $S$ :

$$\begin{cases} \sin(\theta') \cos(\varphi') = \frac{\sin(\theta) \cos(\varphi)}{\cosh(u) + \sinh(u) \cos(\theta)} \Leftrightarrow \sin(\theta') = \frac{\sin(\theta)}{\cosh(u) + \sinh(u) \cos(\theta)} \\ \cos(\theta') = \frac{\cosh(u) \cos(\theta) + \sinh(u)}{\cosh(u) + \sinh(u) \cos(\theta)} \end{cases}$$

Para verificar que a relação dos ângulos está bem definida mostramos que

$$\sin^2(\theta') + \cos^2(\theta') = 1$$

O que, neste caso, equivale a mostrar:

$$\sin^2(\theta) + (\cosh(u) \cos(\theta) + \sinh(u))^2 = (\cosh(u) + \sinh(u) \cos(\theta))^2$$

$$\begin{aligned} & \sin^2(\theta) + (\cosh(u) \cos(\theta) + \sinh(u))^2 \\ &= \sin^2(\theta) + \cosh^2(u) \cos^2(\theta) + 2 \sinh(u) \cosh(u) \cos(\theta) + \sinh^2(u) \end{aligned}$$

Como  $\cosh^2(u) = 1 + \sinh^2(u)$ :

$$\begin{aligned} &= \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) + \sinh^2(u) \cos^2(\theta) + \sinh^2(u) + 2 \sinh(u) \cosh(u) \cos(\theta) \\ &= 1 + \sinh^2(u) + \sinh^2(u) \cos^2(\theta) + 2 \sinh(u) \cosh(u) \cos(\theta) \\ &= \cosh^2(u) + 2 \cosh(u) \sinh(u) \cos(\theta) + (\sinh(u) \cos(\theta))^2 \\ &= (\cosh(u) + \sinh(u) \cos(\theta))^2 \end{aligned}$$

## 2.1 Efeito na projeção de Mercator

Nesta secção iremos por fim salientar algumas consequências das transformações de Lorentz e de lidar com velocidades comparáveis às da luz, começando por notar que na métrica de Mercator, a relação entre o que um observador no referencial  $S'$  vê e o que outro no referencial  $S$  vê é bastante mais simples do que inicialmente se poderia supor. São também abordados os deslocamentos ao nível da frequência, potência e luminosidade de um sinal luminoso que são simples consequências daquilo que estudámos.

Notamos primeiro a seguinte relação entre  $\theta$  e  $\psi$ :

$$\cot^2(\theta) = \frac{1}{\sin^2(\theta)} - 1 = \cosh^2(\psi) - 1 = \sinh^2(\psi) \quad (3)$$

Deste modo conseguimos finalmente relacionar  $\psi'$  com  $\psi$  pois:

$$\begin{aligned} \cosh(\psi') &= \frac{1}{\sin(\theta')} \\ &= \frac{\cosh(u) + \sinh(u) \cos(\theta)}{\sin(\theta)} \\ &= \cosh(\psi) \cosh(u) + \cot(\theta) \sinh(u) \\ &\stackrel{(3)}{=} \cosh(\psi) \cosh(u) + \sinh(\psi) \sinh(u) \\ &= \cosh(\psi + u) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sinh(\psi') &= \cot(\theta') \\ &= \frac{\cosh(u) \cos(\theta) + \sinh(u)}{\sin(\theta)} \\ &= \cot(\theta) \cosh(u) + \cosh(\psi) \sinh(u) \\ &= \sinh(\psi) \cosh(u) + \cosh(\psi) \sinh(u) \\ &= \sinh(\psi + u) \end{aligned}$$

Uma vez que  $\cosh(\psi') = \cosh(\psi + u)$  e  $\sinh(\psi') = \sinh(\psi + u)$ , só podemos ter:

$$\boxed{\psi' = \psi + u}$$

Deste modo, um observador de um referencial que se desloque em  $y_3$  com uma velocidade  $v = \tanh(u)$  irá ver o que o observador em  $S$  vê deslocado por essa mesma constante  $u$ .

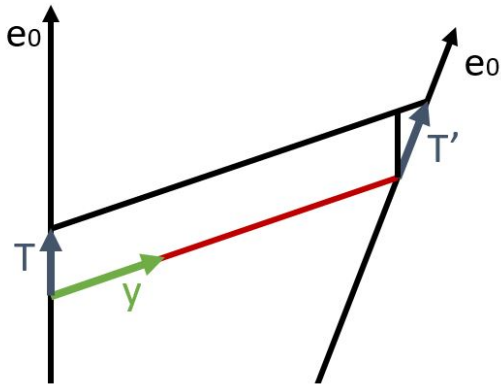


### 2.1.1 Efeito de Doppler

Sendo  $T$  o período e  $\nu$  a frequência de um raio luminoso temos, como sempre, a relação  $T = \frac{1}{\nu}$ . Assim:

$$Ty_0 = T'y'_0 \Leftrightarrow \frac{y_0}{\nu} = \frac{y'_0}{\nu'}$$

Vamos então mostrar que a relação é válida. Na seguinte figura torna-se óbvio que  $T'e'_0 = Te_0 + \lambda y$ , sendo  $\lambda$  uma constante real:



Os raios luminosos na geometria de Minkowsky, como vimos anteriormente, satisfazem:

$$\begin{aligned} ||y||^2 &= \langle y, y \rangle = 0 \\ \Rightarrow \langle y, \lambda y \rangle &= 0 \\ \Rightarrow \langle y, Te_0 \rangle &= \langle y, Te_0 + \lambda y \rangle \\ \Leftrightarrow \langle y, Te_0 \rangle &= \langle y, T'e'_0 \rangle \\ \Leftrightarrow T \langle y, e_0 \rangle &= T' \langle y, e'_0 \rangle \\ \Leftrightarrow Ty_0 &= T'y'_0 \end{aligned}$$

Temos então:

$$\begin{aligned} \frac{\nu'}{\nu} &= \frac{y'_0}{y_0} \\ &= \frac{\cosh(u) y_0 - \sinh(u) y_3}{y_0} = \cosh(u) + \sinh(u) x_3 = \cosh(u) + \sinh(u) \cos(\theta) \\ &= \sin(\theta) \cosh(\psi') \\ &= \frac{\cosh(\psi')}{\cosh(\psi)} \end{aligned}$$

### 2.1.2 Potência Total

Pela mesma razão, os fótons emitidos no referencial  $S$  ao longo de um período  $T$  são observados em  $S'$  ao longo de  $T' = T \frac{\cosh(\psi)}{\cosh(\psi')}$  o que altera o número de fótons emitidos por unidade tempo ( $N$ ) em:

$$\frac{N'}{N} = \frac{\cosh(\psi')}{\cosh(\psi)}$$

Deste modo, sendo  $P$  a potência recebida por um objecto e  $h$  a constante de Planck, temos:

$$\frac{P'}{P} = \frac{E'}{E} = \frac{N'h\nu'}{Nh\nu} = \left( \frac{\cosh(\psi')}{\cosh(\psi)} \right)^2$$

### 2.1.3 Luminosidade

Um elemento de área nas coordenadas de Mercator é dado por:

$$dA = \frac{1}{\cosh^2(\psi)} d\psi d\varphi$$
$$\Rightarrow \frac{dA'}{dA} = \frac{\cosh^2(\psi)}{\cosh^2(\psi')}$$

Consequentemente, a luminosidade dos objectos muda conforme o referencial no seguinte rácio:

$$\frac{L'}{L} = \frac{\frac{P'}{dA'}}{\frac{P}{dA}} = \left( \frac{\cosh(\psi')}{\cosh(\psi)} \right)^4$$

### 3 Exemplos

Nesta secção procuramos apresentar imagens que ilustrem os efeitos apresentados.

A visão de um observador quando viaja a velocidades comparáveis às da luz sofre o efeito estudado na secção 2.1, que se chama de aberração. O observador verá então algo como a seguinte figura:

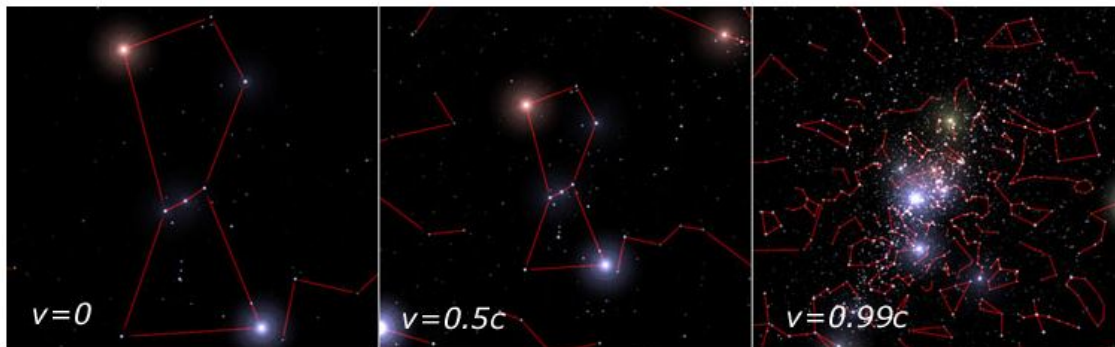


Figura 2: Efeito aberração

O efeito de Doppler e da luminosidade juntos resultam em:

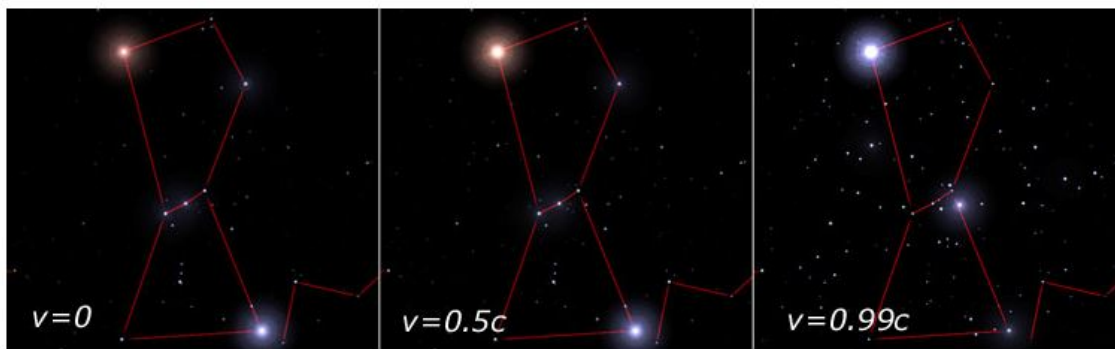


Figura 3: Efeito de Doppler e diferenças na luminosidade

Combinando os dois efeitos, veríamos então:

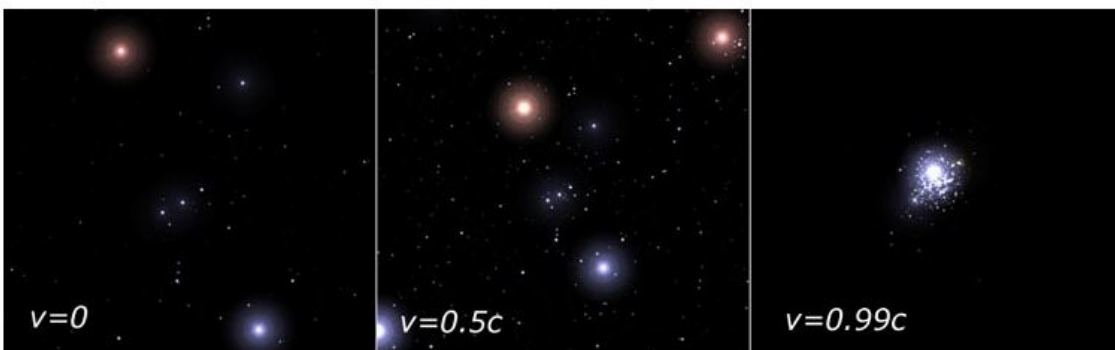


Figura 4: Combinação dos dois efeitos  
Fonte [1]

## Referências

- [1] <http://math.ucr.edu/home/baez/physics/Relativity/SR/Spaceship/spaceship.html>