Universidade Técnica de Lisboa

Instituto Superior Técnico

Departamento de Matemática

Cosmologias em espaçotempos estacionários

João Lopes Costa

Dissertação para a obtenção do grau de

Mestre em Matemática Aplicada

Área de Especialização: Geometria e Topologia

Orientador:
Prof. José Natário

Setembro 2003

Resumo

Neste trabalho obtemos uma classificação parcial das cosmologias espacialmente homogéneas de classe A em espaçotempos estacionários, i.e, soluções da equação de Einstein para espaçotempos cujo quociente pelas curvas integrais de um campo de Killing global pode ser identificado com um grupo de Lie com métrica invariante a esquerda e álgebra de Lie de classe A (o que perfaz seis das nove possibilidades para variedade espaço).

O resultado principal é a obtenção da classificação global das cosmologias espacial e temporalmente homogéneas de classe A.

Abstract

In the present work we give a partial classification of spatially homogeneous cosmologies in stationary spacetimes, i.e., solutions of Einstein's equation for spacetimes whose quotient by the integral curves of a global Killing vector field can be identified with a Lie group with left-invariant metric and class A Lie algebra (corresponding to six of the nine possibilities for the space manifold)

The main result is the global classification of space and time homogeneous class A cosmologies.

Palavras Chave

Cosmologia

Espaçotempo estacionário

Equações Quasi-Maxwell

Grupo de Lie

Tensor invariante à esquerda

Álgebras de Lie de classe A

Keywords

Cosmology

Stationary spacetime

Quasi-Maxwell equations

Lie group

Left-invariant tensor

Class A Lie algebra

Índice

Agradecimentos

O autor prefere agradecimentos pessoais.

Introdução

O anti-solipsista princípio de Copérnico generalizado permite-nos formalizar geometricamente a nossa concepção do cosmos. A difícil aceitação de que o nosso (ou qualquer outra espécie de) umbigo não define o centro do universo, traduz-se na ideia de que a percepção das "principais caracterísiticas"do Universo, pelo menos as físicas, é independente da posição do observador. Matematicamente obtemos um espaçotempo Q folheado por variedades espaço Σ, i.e., $Q = \mathbb{R} \times \Sigma$, nas quais actua um grupo de simetrias. Se impusermos que essa acção seja simplesmente transitiva, podemos identificar Σ com um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda.

"Os matemáticos são como os franceses, se lhes dizemos qualquer coisa traduzem-na imediatamente para a sua língua transformando-a noutra completamente diferente" [Goethe]

O vazio, enquanto inexistência de matéria, é preenchido pela introdução de um fluido perfeito, que representará as pequenas singularidades que observamos e que designamos por galáxias. E o vazio, enquanto incapacidade de fazer previsões, é ultrapassado pela fé na teoria da relatividade geral, mais precisamente, na equação de Einstein.

Obtemos então o que se designa por modelo cosmológico, ou se preferirem, por modelo cosmológico espacialmente homogéneo. Poderiamos invocar dados experimentais como forma de questionar se faz sentido falar em modelos espacialmente não homogéneos, mas tal acção entraria em contradição com o facto de ao longo desta dissertação estarmos interessados na classificação de modelos cosmológicos que não se coadunam com as observações experimentais. O sr. Hubble "viu"o Universo a expandir-se, ao passo que nós, ao impormos como simplificação matemática que o espaçotempo seja estacionário, "vemos"a nossa métrica invariante ao longo do tempo.

No primeiro capítulo encontra-se um resumo do apêndice C do livro "Geometric Mechanics" [O]. Neste explicita-se a forma como a simetria imposta ao espaçotempo nos premite obter um sistema de equações, dependendo apenas da informação contida na variedade espaço, equivalente à equação de Einstein. Estas equações apresentam ainda a agradável característica de se assemelharem às equações de Maxwell e, assim sendo, são designadas por equações Quasi-Maxwell.

Os contributos originais, ou pelo menos, os métodos originais através dos quais obtivemos resultados conhecidos, encontram-se nos restantes capítulos. No segundo capítulo é estudada a forma da informação contida nas equações Quasi-Maxwell quando consideramos que a variedade espaço é um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda. Para além de resultados gerais obtemos resultados para grupos de Lie com álgebra de Lie de classe A, que correspondem às seis (de entre um total de nove) possibilidades para variedade espaço que nos propusemos a estudar.

As equações Quasi-Maxwell correspondentes a modelos cosmológicos são um sistema de 10 equações algébricas a 14 incógnitas. Feridos pela contínua contemplação de uma matemática incapaz de calcular, só nos resta, perante um problema aparentemente tratável, o árduo e doloroso trabalho de resolução das equações. A exposição desse trabalho é feita no capítulo 3, onde é obtida um classificação parcial das cosmologias de classe A . Como meia vitória tivemos a obtenção de uma classificação global das cosmologias espacial e temporalmente homogéneas.

Notação: Ao longo deste trabalho usaremos exaustivamente a notação de Einstein, na qual se presupõe que indíces repetidos se encontram a somar sobre todo o seu domínio. Da necessidade de distinção entre objectos definidos no espaçotempo e objectos definidos na variedade espaço, impomos que os indíces gregos α, β, γ,... tomem valores entre 0 e 3 e que os índices latinos i, j, k,... tomem valores no conjunto $\{1, 2, 3\}$.

Capítulo 1

Como a equação de Einstein adquire a forma Quasi-Maxwell num espaçotempo estacionário.

Consideremos um *espaçotempo estacionário* (Q, g), i.e., uma variedade Lorentziana onde se encontra definido um campo de Killing do tipo tempo T. Suponhamos que as curvas integrais desse campo intersectam transversalmente uma e uma só vez uma subvariedade tridimensional de Q, que passeremos a designar por variedade espaço Σ. Σ é portanto difeomorfa ao quociente de Q pelas curvas integrais de T e estas últimas fornecem-nos uma projecção natural $\Pi : Q \to \Sigma$, que coincide com a aplicação quociente.

Podemos integrar T utilizando sempre como condição inicial um ponto da variedade espaço e assim construir uma *função de tempo global* $t : Q \to \mathbb{R}$, tomando para $t(p)$ o valor do parâmetro correspondente a $p \in Q$ ao longo da respectiva curva integral. Σ é a hipersuperfície de equação $t = 0$.

A partir de coordenadas locais $\{x^i\}$ da variedade espaço é então possivel construir coordenadas locais $\{t, x^i\}$ para Q, nas quais $T = \frac{\partial}{\partial t}$ e consequentemente

$$\pounds_T g = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} = 0.$$

É esta atemporalidade da métrica que dá origem à designação de *espaçotempo estacionário.*

Tendo em conta que $g_{00} = \langle T, T \rangle < 0$, concluímos que, usando as coordenadas $\{t, x^i\}$, podemos sempre escrever o elemento de linha na forma:

$$ds^2 = -e^{2\phi}\left(dt + A_i dx^i\right)^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j$$

O facto da métrica não depender do tempo permite-nos considerar os campos tensoriais ϕ, $A = A_i dx^i$, $\gamma = \gamma_{ij} dx^i dx^j$ como definidos na variedade espaço. Esta é a primeira manifestação do tipo de redução que a simetria imposta ao espaçotempo (expressa pela existência do campo de Killing) nos permite e que eventualmente nos levará à dedução de um sistema de equações, equivalente às equações de Einstein, estritamente dependente da informação contida na variedade espaço e suas estruturas.

Se decidirmos escolher um outro campo de Killing do tipo tempo, com as mesmas curvas integrais e que defina a mesma orientação temporal, $T' = e^c T, c \in \mathbb{R}$, e uma outra variedade espaço, de equação $t = f(x^1, x^2, x^3)$, obtemos uma nova função de tempo global

$$t' = e^{-c}(t - f)$$

e esta mudança de coordenada temporal transforma o elemento de linha em

$$ds^2 = -e^{2(\phi+c)} \left(dt' + e^{-c}(A + df)\right)^2 + \gamma_{ij}\, dx^i dx^j.$$

Donde se conclui que as formas diferenciais

$$G = -d\phi \tag{1.1}$$
$$H = -e^{\phi} dA \tag{1.2}$$

não dependem da escolha de função de tempo global. O mesmo se verifica para o campo tensorial γ que se trata de uma métrica Riemanniana em Σ. De facto, dados $u, v \in T_x\Sigma \subseteq T_{(0,x)}Q$ tem-se

$$\gamma(u, v) = g(u^\perp, v^\perp)$$

onde $u^\perp$ é a componente do vector u ortogonal a T. Aproveitando a última igualdade, fazemos notar que enquanto a identificação de vectores do espaçotempo com vectores da variedade espaço é executada naturalmente pela projecção fornecida pela aplicação $\Pi_* : TQ \to T\Sigma$, a identificação "inversa"é feita por levantamento ortogonal relativamente a T, i.e., identificamos o vector $u \in T_x\Sigma$ com os vectores $v \in T_{(t,x)}Q$ tais que $g(v, T) = 0$ e $\Pi_* v = u$.

O campo de Killing T identifica portanto uma classe privilegiada de observadores (*observadores estacionários*), aqueles cujas trajectórias são as curvas integrais de T. O facto de γ não depender do tempo revela que a distância entre estes não varia ao longo do tempo.

"This is just about as close as General Relativity gets to the notion of a ≪global frame of reference≫"(pp 221 [O]).

Tendo escolhido uma função de tempo global t e consequentemente uma variedade espaço $\Sigma = \{t = 0\}$, podemos iniciar o processo de redução das equações Einstein.

Ao longo do texto iremos distinguir entre objectos definidos em (Q, g) e (Σ, γ) colocando um til sobre os pertencentes ao espaçotempo. Esperamos ficar sem tiles, eventualmente.

Um co-referencial ortonormado $\{\widetilde{\omega}^{\alpha}\}$ pode ser definido localmente em Q por

$$\begin{aligned} \widetilde{\omega}^{0} &= e^{\phi}(dt + A) \\ \widetilde{\omega}^{i} &= \Pi^{*}\omega^{i} \end{aligned}$$

onde $\{\omega^{i}\}$ é um co-referencial local para $T^{*}_{|U}\Sigma$. Os correspondentes referenciais locais serão representados por $\{\widetilde{X}_{\alpha}\}$ e $\{X_i\}$ e são tais que $\Pi_{*}\widetilde{X}_i = X_i$ (a partir de agora deixaremos de nos preocupar com a projecção e passaremos a identificar livremente span$\{\widetilde{X}_i\}$ e $T_{|U}\Sigma$).

Por ser (Σ, γ) uma variedade Riemanianna tridimensional, podemos definir as seguintes bijecções:

$$\begin{aligned} \imath_1 : T\Sigma &\rightarrow T^{*}\Sigma \\ \vec{v} &\longmapsto \gamma(\vec{v}, \cdot) \end{aligned}$$

dada localmente por

$$\imath_1(\vec{v}) = \imath_1(v^i X_i) = v^i \omega^i$$

e, considerando a forma de volume ω,

$$\begin{aligned} \imath_2 : T\Sigma &\rightarrow \Lambda^2 T^{*}\Sigma \\ \vec{v} &\longmapsto \omega(\vec{v}, \cdot, \cdot) \end{aligned}$$

que nas bases fixadas adquire a forma

$$\imath_1(v^i X_i) = v^1\omega^2 \wedge \omega^3 + v^2\omega^3 \wedge \omega^1 + v^3\omega^1 \wedge \omega^2.$$

Associados naturalmente às formas invariantes G e H temos então os seguintes campos vectoriais:
Campo Gravítico $\vec{G}$: $\imath_1(\vec{G}) = G$;
Campo Gravitomagnético $\vec{H}$: $\imath_2(\vec{H}) = H$.

Depois de determinar as formas de conexão nos coreferenciais anteriormente fixados podemos deduzir as equações do movimento em função dos campos $\vec{G}$ e $\vec{H}$. Seja

$$\widetilde{u} = u^0 \widetilde{X}_0 + u^i X_i = u^0 \widetilde{X}_0 + \vec{u}$$

o vector tangente unitário a uma geodésica do tipo tempo. u^0 é a energia por unidade de massa de repouso que um observador estacionário mede e

$$g(\widetilde{u}, \widetilde{u}) = -1 \Leftrightarrow -\left(u^0\right)^2 + \vec{u}^{\,2} = -1 \Leftrightarrow \left(u^0\right)^2 = 1 + \vec{u}^{\,2}$$

onde

$$\vec{u}^{\,2} = u^i u^i = \gamma(\vec{u}, \vec{u}).$$

A equação do movimento (equação das geodésicas)

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{u}}\,\widetilde{u} = 0$$

tem componente segundo X_0

$$du^0(\widetilde{u}) = \frac{du^0}{d\tau} = u^0\vec{u}\cdot\vec{G} \tag{1.3}$$

e segundo X_i

$$\nabla_{\vec{u}}\,\vec{u} = \frac{D\vec{u}}{d\tau} = u^0\left(u^0\,\vec{G} + \vec{u}\times\vec{H}\right) \tag{1.4}$$

$$= \left(1+\vec{u}^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\left(1+\vec{u}^2\right)^{\frac{1}{2}}\vec{G} + \vec{u}\times\vec{H}\right). \tag{1.5}$$

Das equações anteriores resulta que os observadores estacionários estão em movimento acelerado com aceleração própria

$$\frac{\widetilde{D}\left(e^{-\phi}T\right)}{d\tau} = -\vec{G}$$

tornando-se assim clara a motivação para a designação de $\vec{G}$. Para se manterem estacionários os observadores têm de anular o efeito do campo gravítico, acelerando.

Com vista ao esclarecimento da designação de $\vec{H}$ como campo gravitomagnético recordemos que a equação do movimento para uma partícula de massa m e carga eléctrica e sob a influência de um campo eléctrico $\vec{E}$ e de um campo magnético $\vec{B}$ é

$$\frac{d\vec{u}}{d\tau} = \frac{e}{m}\left(\left(1+\vec{u}^2\right)^{\frac{1}{2}}\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}\right) \tag{1.6}$$

onde τ é o tempo próprio da partícula e, sendo $\vec{x} = \vec{x}(\tau)$ a componente espacial do movimento da partícula,

$$\vec{u} = \frac{d\vec{x}}{dt}\frac{dt}{d\tau}.$$

Comparando as equações (4) e (6), concluímos então que a equação do movimento de uma partícula em queda livre na variedade espaço de um espaçotempo estacionário é simplesmente a generalização para um espaço curvo da equação (6), com a quantidade $\frac{e}{m}$ substituída por u^0, o que faz todo o sentido se tivermos em conta que

$$u^0 = \frac{mu^0}{m} = \frac{\text{energia total medida por um observador estacionário}}{\text{massa de repouso}}.$$

Determinadas as formas de curvatura, obtemos as seguintes componentes para o tensor de Ricci

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}_{00} &= -\mathrm{div}\,\vec{G} + \vec{G}^{\,2} + \frac{1}{2}\vec{H}^{\,2}\\
\widetilde{R}_{0i}X_i &= \frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\vec{H} - \vec{G}\times\vec{H}\\
\widetilde{R}_{ij} &= R_{ij} + \nabla_i G_j - G_i G_j - \frac{1}{2}\vec{H}^2\gamma_{ij}
\end{aligned}$$

onde $\nabla_i G_j$ são as componentes de ∇G,

$$\mathrm{div}\,\vec{G}\,\omega^1\wedge\omega^2\wedge\omega^3 = d(\imath_2\circ\imath_1^{-1}\,\vec{G}\,)$$

e

$$\imath_2(\mathrm{rot}\,\vec{H}\,) = d(\imath_1^{-1}\,\vec{H}\,).$$

Considere-se um fluido perfeito no espaçotempo. Seja $\{\widetilde{Y}_\alpha\}$ um referencial ortonormado em repouso relativamente ao fluido, ρ e p a energia e pressão de repouso. O tensor energia-momento é por definição

$$T = \rho\widetilde{Y}_0\otimes\widetilde{Y}_0 + p\widetilde{Y}_i\otimes\widetilde{Y}_i.$$

Mas sendo

$$g = -\widetilde{Y}_0\otimes\widetilde{Y}_0 + \widetilde{Y}_i\otimes\widetilde{Y}_i$$

e tendo em conta que $\widetilde{Y}_0$ é simplesmente o campo vectorial $\widetilde{u}$ das velocidades do fluido, obtemos

$$T = (\rho+p)\widetilde{u}\otimes\widetilde{u} + p\,g.$$

Da equação de Einstein

$$\widetilde{G}_{Einstein} = 8\pi\widetilde{T}$$

retiramos

$$\widetilde{Ricci} = 8\pi\left(\widetilde{T} - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,\widetilde{T}g\right)$$

onde $\mathrm{tr}\,\widetilde{T} = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = 3p-\rho$. Mas $\widetilde{u} = u^0\widetilde{X}_0 + \vec{u}$, obtendo-se no referencial original

$$\begin{aligned}
\widetilde{Ricci} = {} & 8\pi\left(\left(u^0\right)^2\widetilde{X}_0\otimes\widetilde{X}_0 + u^0\widetilde{X}_0\otimes\vec{u} + u^0\vec{u}\otimes\widetilde{X}_0 + \vec{u}\otimes\vec{u}\right)\\
& + 4\pi(\rho-p)(-\widetilde{X}_0\otimes\widetilde{X}_0 + \gamma)
\end{aligned}$$

Igualando as componentes do tensor de Ricci fornecidas pelas formas de curvatura com as oriundas da equação de Einstein, obtemos o seguinte sistema de equações sobre a variedade espaço, equivalente à equação de Einstein:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div} \vec{G} = \vec{G}^{\,2} + \frac{1}{2}\vec{H}^{\,2} - 8\pi(\rho+p)\vec{u}^{\,2} - 4\pi(\rho+3p) && (QM.1)\\
&\operatorname{rot} \vec{H} = 2\vec{G}\times\vec{H} - 16\pi(\rho+p)u^0\vec{u} && (QM.2)\\
&R_{ij} + \nabla_i G_j = G_iG_j + \frac{1}{2}H_iH_j - \frac{1}{2}\vec{H}^{\,2}\gamma_{ij}\\
&\qquad + 8\pi\left((\rho+p)u_iu_j + \frac{1}{2}(\rho-p)\gamma_{ij}\right). && (QM.3.ij)
\end{aligned}$$

Existem semelhanças notáveis com as equações de Maxwell [O]. Assim sendo, designaremos as equações anteriores de *equações Quasi-Maxwell*.

As equações Quasi-Maxwell fornecem-nos um método de resolução das equações de Einstein: começamos por postular uma métrica para a variedade espaço, dependendo de uma ou mais funções desconhecidas e, de seguida, tentamos resolver as equações em função dos campos, podendo ser necessário impor algumas condições sobre os mesmos. A solução de Schwarzschild, por exemplo, é a solução estática (i.e. $\vec{H}=0$) que se obtém ao considerarmos uma variedade espaço esfericamente simétrica com campo gravítico radial.

O objectivo deste trabalho é a classificação de soluções que têm como variedade espaço um grupo de Lie com métrica e campos invariantes à esquerda.

Capítulo 2

Sobre a forma das equações Quasi-Maxwell quando a variedade espaço é um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda.

O propósito deste trabalho é a classificação de cosmologias espacialmente homogéneas em espaçotempos estacionários, i.e., a classificação de soluções das equações Quasi-Maxwell (QM) quando Σ é um grupo de Lie e γ é uma métrica invariante à esquerda. O princípio de Copérnico generalizado, homogeneidade espacial, diz-nos que a percepção das "características essenciais" do universo é independente do local de observação, tornando-se natural admitir que $\vec{G}$ e $\vec{H}$ sejam invariantes à esquerda. De um ponto de vista puramente pragmático a última condição permite-nos sonhar com a classificação total das cosmologias em causa.

Para podermos ter em conta a infinidade de métricas invariantes à esquerda fixamos arbitrariamente um referencial global de campos invariantes à esquerda $\{X_i\}$ e impomos a sua ortonormalidade. A validade deste processo advém do facto de uma métrica invariante à esquerda γ ser univocamente determinada pela matriz $(\gamma_{ij}(p))$, definida numa qualquer base de $T_p\Sigma$, com $p \in \Sigma$ arbitrário. Começamos portanto a trabalhar com uma métrica genérica e esperamos que as restrições sobre esta surjam naturalmente com a resolução das equações QM.

A liberdade de se poder sempre considerar $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$ não implica, obviamente, que as soluções sejam independentes da métrica, pois esta continua a impor-se por via dos operadores rotacional e divergência, da conexão e do tensor de Ricci. Tendo a métrica sido definida às custas de "réguas tipo", o referencial ortonormado fixado, e visto estarmos a trabalhar num grupo de Lie, toda a informação acabará por ser codificada pelas constantes de estrutura C^i_{jk}, definidas por

$$[X_i, X_j] = C^k_{ij} X_k = C_{kij} X_k.$$

A última igualdade serve apenas para realçar que por estarmos a trabalhar num referencial ortormado não nos temos de preocupar com a posição vertical dos indíces.

Passemos então a verificar de que forma a referida codificação se processa.

Comecemos por recordar a conhecida fórmula para os símbolos de Christofell

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(C_{ijk} + C_{kij} - C_{jki}\right).$$

Sendo $G = G_i \omega^i$, onde $\{\omega^i\}$ é a base dual de $\{X_i\}$, podemos facilmente obter

$$\begin{aligned}
\nabla_i G_j &= \nabla G(X_i, X_j) = \left(\nabla_{X_i} G\right)(X_j) \\
&= \nabla_{X_i}\left[G(X_j)\right] - G\left(\nabla_{X_i} X_j\right) \\
&= \nabla_{X_i} G_j - G\left(\Gamma^k_{ij} X_k\right).
\end{aligned}$$

Mas $\imath_1(\vec{G}) = G$ diz-nos que $\vec{G}$ e G têm as mesmas componentes e sendo $\vec{G}$ invariante à esquerda concluímos que estas são constantes, donde

$$\nabla_i G_j = 0 - \Gamma^k_{ij}\, G(X_k) = -\Gamma^k_{ij}\, G_k.$$

Como consequência imediata temos

$$\operatorname{div} \vec{G} = \nabla_i G_i = -\Gamma^k_{ii} G_k.$$

A fórmula de Maurer-Cartan

$$d\omega^i = -\frac{1}{2} C^i_{jk} \omega^j \wedge \omega^k$$

assegura-nos que a derivada exterior é uma aplicação linear entre os espaços vectoriais tridimensionais $\Omega^1_L(\Sigma)$ e $\Omega^2_L(\Sigma)$ das 1 e 2-formas invariantes à esquerda, cuja matriz nas bases $\{\omega^i\}$ e $\{\omega^2 \wedge \omega^3, \omega^3 \wedge \omega^1, \omega^1 \wedge \omega^2\}$ é

$$D = \begin{pmatrix} C_{132} & C_{232} & C_{332} \\ C_{113} & C_{213} & C_{313} \\ C_{121} & C_{221} & C_{321} \end{pmatrix}.$$

Como $\operatorname{rot} \vec{H}$ é por definição o único vector que verifica

$$\imath_2(\operatorname{rot}\vec{H}) = d(\imath_1 \vec{H})$$

e tendo em conta que vectores e k-formas relacionados pelas bijecções $\imath_k$, $k = 1, 2$, têm, nas bases fixadas, as mesmas componentes, obtemos

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = (X_1\, X_2\, X_3) \cdot D \cdot \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \end{pmatrix}.$$

Todos os intervenientes nas equações QM até agora estudados são constantes, visto dependerem exclusivamente das componentes de campos invariantes à esquerda e das constantes de estrutura. Assim sendo, o resultado seguinte não deverá causar estranheza.

Proposição 2.0.1 *A densidade e a pressão são funções constantes e $\vec{u}$ é invariante à esquerda.*

$\triangle$: $QM.3.ii$ dá-nos

$$(\rho + p)u_i^2 = -\frac{1}{2}(\rho - p) + \text{constante}.$$

Somando as três equações obtemos

$$(\rho + p)\vec{u}^{\,2} = -\frac{3}{2}(\rho - p) + \text{constante}$$

e ao substituirmos em $QM.1$, vem

$$-3(\rho - p) + \rho + 3p = \text{constante} \Leftrightarrow 3p - \rho = \text{constante}.$$

Olhando agora para $QM.2$, verificamos que

$$\begin{aligned}
(\rho + p)u^0 u_i = \text{constante} \;\; &\Rightarrow \;\; (\rho + p)^2 \left(u^0\right)^2 u_i^2 = \text{constante} \\
&\Leftrightarrow \;\; (\rho + p)\left(\vec{u}^{\,2} + 1\right)(\rho + p)u_i^2 = \text{constante} \\
&\Leftrightarrow \;\; \left[-\frac{3}{2}(\rho - p) + \text{cons.} + (\rho + p)\right] \cdot \left[-\frac{1}{2}(\rho - p) + \text{cons.}\right] = \text{cons.} \\
&\Leftrightarrow \;\; \frac{1}{4}\rho^2 + \frac{5}{4}p^2 - \frac{3}{2}\rho p + \text{termos de 1}^{\text{a}} \text{ ordem} = \text{constante}.
\end{aligned}$$

Mas sendo $\rho = 3p + \text{constante}$, vem

$$-p^2 + \text{termos de 1}^{\text{a}} \text{ ordem} = \text{constante}.$$

Concluímos assim que ρ e p podem tomar no máximo dois valores distintos sobre Σ, resultando da sua continuidade que se tratam de funções constantes.

É agora evidente que para $\rho + p \neq 0$ as componentes do vector $\vec{u}$ são constantes, que é condição suficiente para garantir que se trata de um campo invariante à esquerda. Para $\rho + p = 0$ o vector $\vec{u}$ fica indefinido, podendo assim ser considerado como invariante à esquerda sem influenciar a resolução das equações QM.

$\square$

Corolário 2.0.2 *O campo vectorial $\widetilde{u}$ das velocidades do fluido verifica:*

$$\widetilde{div}\,\widetilde{u} = 0$$

e

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{u}}\,\widetilde{u} = 0.$$

$\triangle$: Como foi visto anteriormente temos apenas de nos concentrar no caso em que $\rho + p \neq 0$. A equação de Euler para um fluido perfeito é

$$\widetilde{\mathrm{div}}\,\widetilde{T} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \widetilde{\mathrm{div}}\,(\rho\,\widetilde{u}) + p\,\widetilde{\mathrm{div}}\,\widetilde{u} = 0 \\ (\rho + p)\widetilde{\nabla}_{\widetilde{u}}\,\widetilde{u} = -\left(\widetilde{\mathrm{grad}}\,p\right)^{\perp} \end{cases}$$

onde $^{\perp}$ designa a projecção ortogonal no hiperplano ortogonal a $\widetilde{u}$. Sendo ρ e p constantes com $\rho + p \neq 0$, vem

$$\begin{cases} (\rho + p)\widetilde{\mathrm{div}}\,\widetilde{u} = 0 \\ (\rho + p)\widetilde{\nabla}_{\widetilde{u}}\,\widetilde{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \widetilde{\mathrm{div}}\,\widetilde{u} = 0 \\ \widetilde{\nabla}_{\widetilde{u}}\,\widetilde{u} = 0 \end{cases}.$$

$\square$

Corolário 2.0.3 *Os vectores $\vec{u}$ e $\vec{G}$ são ortogonais.*

$\triangle$: No primeiro capítulo verificámos que

$$\widetilde{\nabla}_{\widetilde{u}}\,\widetilde{u} = 0 \Rightarrow \frac{du^0}{d\tau} = u^0\vec{u}\cdot\vec{G}.$$

Mas sendo u^0 uma constante não nula

$$0 = u^0\vec{u}\cdot\vec{G} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{G} = 0.$$

$\square$

Para terminar apresentamos um resultado que nos simplifica a classificação desejada, ao permitir-nos restringir a busca de soluções a um único elemento de entre as famílias de métricas que têm referenciais ortogonais que se relacionam por expansão.

Proposição 2.0.4 (Lema do Rescalamento)

A partir de uma solução das equações QM (G_i, H_j, u_k, ρ, p) para a métrica associada a um referencial $\{X_i\}$ podemos construir uma solução $(\widehat{G}_i, \widehat{H}_j, \widehat{u}_k, \widehat{\rho}, \widehat{p})$ para a métrica associada ao referencial $\{\lambda X_i\}$, fazendo

$$\begin{aligned} \widehat{G}_i &= \lambda G_i \\ \widehat{H}_j &= \lambda H_j \\ \widehat{u}_k &= u_k \\ \widehat{\rho} &= \lambda^2 \rho \\ \widehat{p} &= \lambda^2 p. \end{aligned}$$

$\triangle$: Como

$$[\lambda X_i, \lambda X_j] = \lambda^2 [X_i, X_j] = \lambda^2 C_{kij} X_k = \lambda C_{kij} \lambda X_k$$

obtemos

$$\widehat{C}_{kij} = \lambda C_{kij}$$

donde

$$\widehat{\Gamma}_{ijk} = \lambda \Gamma_{ijk} \quad \text{e} \quad \widehat{D} = \lambda D$$

e, portanto,

$$\widehat{R}_{ij} = \lambda^2 R_{ij} \quad , \quad \widehat{\mathrm{div}}\, \widehat{G} = \lambda^2 \mathrm{div}\, G \quad \text{e} \quad \widehat{\mathrm{rot}}\, \widehat{H} = \lambda^2 \mathrm{rot}\, H.$$

Tendo em conta que por construção $\widehat{\gamma}_{ij} = \gamma_{ij} = \delta_{ij}$, o resultado é imediato. $\square$

2.1 Álgebras de Lie de Classe A

Se impusermos que a nossa variedade espaço seja conexa e simplesmente conexa, o Teorema de Lie [K] garante-nos que esta é univocamente determinada, a menos de difeomorfismo, pela sua álgebra de Lie. A consideração de todas as possibilidades para variedade espaço é então transformada, simplificando-se, na classificação das álgebras de Lie tridimensionais. Seguindo [W], sabemos que essa classificação pode ser realizada às custas de um tensor simétrico M do tipo $\binom{0}{2}$ e de um vector A, do núcleo de M, cujas componentes numa dada base da álgebra são C^k_{ki}. Torna-se então natural dividir a classificação em duas classes: classe A para álgebras de Lie com $A = 0$ e classe B para álgebras de Lie verificando $A \neq 0$.

Neste trabalho estamos interessados na classificação de cosmologias de classe A, i.e., cosmologias em que a variedade espaço é um grupo de Lie com álgebra de Lie tal que $C^k_{ki} = 0$, $\forall i$.

Sendo $C^k_{ki} = 0$, $\forall i$, o tensor M (ver [W] para a expressão do tensor) não é mais que o simétrico da derivada exterior restringida ao espaço Ω^1_L. Assim sendo, as seis álgebras de Lie de classe A são classificadas pela característica e assinatura da matriz D.

A matriz D permite-nos ainda a obtencão de uma fórmula útil para as componentes do tensor de Ricci.

Proposição 2.1.1 *Num grupo de Lie com álgebra de Lie de classe A e métrica invariante à esquerda a matriz das componentes do tensor de Ricci na base $\{\omega^i \otimes \omega^j\}$, onde $\{\omega^i\}$ é um co-referencial ortonormado e invariante à esquerda , é dada por*

$$(R_{ij}) = D^2 - \frac{1}{2} \operatorname{tr}\left(D^2\right) I + \operatorname{cof}(D).$$

$\triangle$: Em Apêndice.

$\square$

A simetria de M faz de D uma matriz simétrica e tendo em conta que existe um isomorfismo entre os espaços Ω^1_L e Ω^2_L, fornecido pela aplicação $\imath = \imath_2 \circ \imath_1^{-1}$, podemos invocar o teorema dos eixos principais como forma de garantir a existência de um co-referencial ortonormado $\{\omega_i\}$ e de uma base $\{\imath(\omega_k)\}$ para Ω^2_L, nos quais a matriz da derivada exterior toma a forma

$$D = \operatorname{diag}(C_{132}, C_{213}, C_{321}).$$

Podemos desde já eliminar duas incógnitas das equações QM.

Proposição 2.1.2 *Existe um referencial ortonormado $\{\widehat{X}_i\}$ para o qual a matriz da derivada exterior nas bases $\{\imath_i(\widehat{X}_k)\}$, $i = 1, 2$, é diagonal e $\vec{G} = G\widehat{X}_1$.*

$\triangle$: Como vimos existem bases, associadas a um referencial ortonormado $\{X_i\}$ pelas bijecções $\imath_i$, nas quais $D = \operatorname{diag}(a, b, c)$. Sendo G uma forma fechada e escrevendo $\vec{G} = G_i X_i$, obtemos

$$dG = d(\imath_1 \vec{G}) = 0 \Leftrightarrow aG_1 + bG_2 + cG_3 = 0.$$

Rearanjando de forma correcta os indíces do referencial, a equação anterior dá-nos:
i) Rank(D)= 3 $\Rightarrow a, b, c \neq 0 \Rightarrow \vec{G} = 0$;
ii) Rank(D)= 2 $\Rightarrow a = 0,\ b, c \neq 0 \Rightarrow G_2 = G_3 = 0$;
iii) Rank(D)= 1 $\Rightarrow a, b = 0,\ c \neq 0 \Rightarrow G_3 = 0 \Rightarrow \vec{G} \perp X_3$, bastando-nos escolher, no caso não trivial, $\vec{G} \neq 0$, $\widehat{X}_1 = \frac{1}{|G|}\vec{G}$, $\widehat{X}_3 = X_3$ e $\widehat{X}_2$ de forma a completar a base numa base ortonormada;
iv) Rank(D)= 0 análogo ao caso anterior. □

Terminamos com três resultados úteis que advêm da diagonalização da matriz da derivada exterior.

Proposição 2.1.3 *Os campos invariantes à esquerda têm divergência nula.*

$\triangle$: Da diagonalização de D concluímos que podemos escolher uma base de campos invariantes à esquerda na qual as únicas constantes de estrutura não necessariamente nulas são aquelas que não têm indíces repetidos. Da relação entre os símbolos de Christofell e as constantes de estrutura obtemos

$$\Gamma_{ijk} \neq 0 \Rightarrow (i, j, k) \text{ permutação de } (1, 2, 3).$$

O resultado é agora consequência imediata da fórmula

$$\operatorname{div} \vec{G} = -\Gamma^k_{ii} G_k.$$

□

Equivalentemente, temos

Proposição 2.1.4 $d(\Omega^2_L) = 0$.

$\triangle$: Por ser a derivada exterior uma aplicação linear entre os espaços vectoriais Ω^i_L, i=2,3, basta-nos verificar como transforma um elemento genérico de uma base de Ω^2_L. Escolhendo bases de forma a termos D diagonal obtemos:

$$\begin{aligned} d(\omega^1 \wedge \omega^2) &= d\omega^1 \wedge \omega^2 - \omega^1 \wedge d\omega^2 \\ &= -\frac{1}{2} C^1_{ij} \omega^i \wedge \omega^j \wedge \omega^2 - \omega^1 \wedge \left(-\frac{1}{2} C^2_{kl} \omega^k \wedge \omega^l \right) \\ &= -C^1_{23} \omega^2 \wedge \omega^3 \wedge \omega^2 + C^2_{13} \omega^1 \wedge \omega^1 \wedge \omega^3 = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Corolário 2.1.5 *Os vectores $\vec{G}$ e $\vec{H}$ são ortogonais.*

$\triangle$: Sendo H uma 2-forma invariante à esquerda a proposição anterior dá-nos

$$\begin{aligned} dH = 0 &\Leftrightarrow d\left(-e^{\phi} dA\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow -e^{\phi} d\phi \wedge dA - e^{\phi} d(dA) = 0 \\ &\Leftrightarrow G \wedge H = 0. \end{aligned}$$

Utilizando a proposição 2.1.4, vem

$$G_1 \omega^1 \wedge (H_1 \omega^2 \wedge \omega^3 + H_2 \omega^3 \wedge \omega^1 + H_3 \omega^1 \wedge \omega^2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow G_1 H_1 \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \omega^3 = 0 \Leftrightarrow G_1 H_1 = 0.$$

$\square$

Capítulo 3

Classificação.

A partir de agora álgebra de Lie quererá dizer álgebra de Lie da classe A e quando nos referirmos às equações QM estará subjacente que a variedade espaço é um grupo de Lie com álgebra de Lie de classe A e métrica invarante à esquerda. As bases, $\{X_i\}$, da álgebra de Lie serão sempre ortonormadas e tais que $D = \text{diag}(a, b, c)$. Note-se ainda que nestas condições a proposição 2.1.1 dá-nos

$$(R_{ij}) = \text{diag}\left(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}c^2 + bc\,, -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}c^2 + ac\,, -\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 + ab\right).$$

3.1 Soluções de vácuo com constante cosmológica.

Por uma questão prática comecemos por calcular as soluções das equações QM que verifiquem $\rho + p = 0$. De um ponto vista teórico estas correspondem a soluções de vácuo com constante cosmológica.

Proposição 3.1.1 *A única solução das equações QM de vácuo com constante cosmológica ($\rho + p = 0$) é o espaçotempo de Minkowski, i.e., $\vec{G} = \vec{H} = 0$, $\vec{u}$ indefinido e $\rho = p = 0$. Sendo uma solução com Ricci $= 0$ temos necessariamente $D = diag(0, b, b)$, $b \in \mathbb{R}$.*

$\triangle$: Seja $\rho + p = 0$. A indefinição de $\vec{u}$ permite-nos tomar, sem perda de generalidade (spg), $\vec{u} = 0$.

A equação do movimento é então

$$0 = \left(u^0\right)^2 \vec{G} = 0 \Leftrightarrow \vec{G} = 0.$$

$$QM.1 \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}\vec{H}^2 - 4\pi(\rho + 3p) \Leftrightarrow \vec{H}^2 = 16\pi p$$

e, sendo (R_{ij}) diagonal,

$$QM.3.ij \ (i \neq j) \Leftrightarrow 0 = H_i H_j.$$

Concluímos que dois dos H_i's têm de se anular. Tomemos então, spg, $\vec{H} = HX_1$.

Escrevendo $D = \mathrm{diag}(a, b, c)$, vem

$$QM.2 \Leftrightarrow D \cdot \vec{H} = 0 \Leftrightarrow aH = 0.$$

Se $H = 0$, obtemos $p = 0$ e $\rho + p = 0 \Rightarrow \rho = 0$.

Se $a = 0$

$$QM.3.ii \ (i \neq 1) \Leftrightarrow R_{22} = R_{33} = -\frac{1}{2}\vec{H}^2 + 4\pi(\rho - p) = 4\pi(-2p + \rho - p) = 4\pi(\rho - 3p).$$

Mas

$$R_{22} = R_{33} \Leftrightarrow \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}c^2 = -\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 \Leftrightarrow b^2 = c^2 \Rightarrow R_{22} = R_{33} = 0$$

donde $\rho - 3p = 0$ e, portanto, $\rho = p = 0$.

Em ambos os casos só falta verificar a equação

$$QM.3.11 \Leftrightarrow R_{11} = 4\pi(\rho - p) = 0.$$

O espaçotempo de Minkowsi é assim a única solução com $\rho + p = 0$ desde que se verifique *Ricci* $= 0$. Em apêndice está demonstrado que tal facto só se dá para $D = \mathrm{diag}(0, b, b)$, $b \in \mathbb{R}$.

□

Daqui para a frente em todos os cálculos realizados consideraremos que $\rho + p \neq 0$.

3.2 Soluções com variedade espaço plana.

Nesta secção estamos interessados em calcular as soluções que surgem quando consideramos *Ricci* $= 0$. Estas incluem todas as soluções com Rank$D = 0$, i.e., $\Sigma = \mathbb{R}^3$, e uma solução para Rank$D = 2$.

Por estarmos a trabalhar numa variedade tridimensional o tensor de Ricci determina totalmente o tensor de curvatura e, portanto, a condição *Ricci* $= 0$ é equivalente à variedade (Σ, γ) ser plana.

Teorema 3.2.1 *As soluções com variedade espaço plana, i.e., Ricci = 0, das equações QM surgem em álgebras de Lie com $D = diag(0, b, b)$, $b \in \mathbb{R}$, (ver apêndice) e são da seguinte forma:*

1. *(Universo de Gödel) $b = 0$, $\vec{G} = \pm\sqrt{16\pi p}\, X_1$, $\vec{H} = \pm\sqrt{32\pi p}\, X_2$, $\vec{u} = \pm\, X_3$ e $\rho = p \in \mathbb{R}_0^+$, onde os sinais das componentes deverão respeitar $G \cdot H \cdot u \cdot p > 0$.*

2. *Para todo o $b \in \mathbb{R}$ o espaçotempo de Minkowski é solução (ver proposição 3.1.1).*

$\triangle$: Seja $D = \mathrm{diag}(0, b, b)$, $b \in \mathbb{R}$. Pela proposição 2.1.2 podemos tomar $\vec{G} = GX_1$ e um argumento análogo ao utilizado na sua demonstração, possível por termos os dois últimos valores próprios de D iguais, permite-nos escrever $\vec{H} = H_1X_1 + H_2X_2$, preservando $\gamma_{ij} = \delta_{ij}$ e D na forma inicialmente imposta.

Comecemos pelas soluções com $\vec{G} = 0$.

$$QM.2 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 0 = 16\pi(\rho + p)u^0u_1 \\ bH_2 = -16\pi(\rho + p)u^0u_2 \\ 0 = 16\pi(\rho + p)u^0u_3 \end{array} \right. \Rightarrow u_1 = u_3 = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = uX_2.$$

Temos então, como única equação não trivial de $QM.3.ij$ $(i \neq j)$ a equação

$$QM.3.12 \Leftrightarrow H_1H_2 = 0.$$

Se $H_1 = 0$, temos $\vec{H} = HX_2$ e

$$\begin{array}{rcl} QM.3.ii & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{1}{2}\vec{H}^2 + 4\pi(\rho - p) \\ 0 = \frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{2}\vec{H}^2 + 8\pi(\rho + p)u^2 + 4\pi(\rho - p) \\ 0 = -\frac{1}{2}\vec{H}^2 + 4\pi(\rho - p) \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} H^2 = 8\pi(\rho - p) \\ 8\pi(\rho + p)u^2 = -4\pi(\rho - p) = -\frac{1}{2}H^2 \end{array} \right. \end{array}$$

$$QM.1 \Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}H^2 - 8\pi(\rho + p)u^2 - 4\pi(\rho + 3p) \Leftrightarrow H^2 = 4\pi(\rho + 3p).$$

Consequentemente

$$4\pi(\rho + 3p) = 8\pi(\rho - p) \Leftrightarrow \rho = 5p.$$

Mas, assim sendo,

$$QM3.22 \Leftrightarrow 8\pi(\rho + p)u^2 = -4\pi(\rho - p) \Leftrightarrow 12pu^2 = -4p \Rightarrow p = 0 \Rightarrow \rho = 0.$$

Seja $H_2 = 0 \left(\Rightarrow \vec{H} = HX_1\right)$. Temos então

$$QM.3.ii \iff \begin{cases} 0 = 4\pi(\rho - p) \\ 0 = -\frac{1}{2}H^2 + 8\pi(\rho + p)u^2 + 4\pi(\rho - p) \\ 0 = -\frac{1}{2}H^2 + 4\pi(\rho - p) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} \rho = p \\ \vec{u} = \vec{H} = 0 \end{cases}$$

e $QM.1 \Leftrightarrow 0 = 4\pi(\rho + 3p)$ mas sendo $\rho = p$ obtemos $\rho = p = 0$.

Tomemos agora $\vec{G} \neq 0$.
Do corolário 2.1.5 sai

$$\vec{G} \cdot \vec{H} = 0 \Leftrightarrow H_1 = 0 \Leftrightarrow \vec{H} = HX_2.$$

Comecemos por considerar $b = 0$.

$$QM.2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = u_1 \\ 0 = u_2 \\ 0 = 2GH - 16\pi(\rho + p)u^0 u_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} = uX_3 \\ GH = 8\pi(\rho + p)u^0 u \end{cases} .$$

Como

$$\begin{aligned} \nabla G &= \nabla_i G_j \, \omega^i \otimes \omega^j \\ &= -\Gamma^k_{ij} G_k \, \omega^i \otimes \omega^j \\ &= -\Gamma^1_{23} G_1 \, \omega^2 \otimes \omega^3 - \Gamma^1_{32} G_1 \, \omega^3 \otimes \omega^2 \\ &= -\frac{1}{2}(C_{123} + C_{312} - C_{231}) G \, \omega^2 \otimes \omega^3 - \frac{1}{2}(C_{132} + C_{213} - C_{321}) G \, \omega^3 \otimes \omega^2 \\ &= -\frac{1}{2}(0 - b + b) G \, \omega^2 \otimes \omega^3 - \frac{1}{2}(0 + b - b) G \, \omega^3 \otimes \omega^2 = 0 \end{aligned}$$

as equações $QM.3.ij$ $(i \neq j)$ são triviais.

$$QM.3.ii \iff \begin{cases} 0 = G^2 - \frac{1}{2}H^2 + 4\pi(\rho - p) \\ 0 = 4\pi(\rho - p) \\ 0 = -\frac{1}{2}H^2 + 8\pi(\rho + p)u^2 + 4\pi(\rho - p) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} G^2 = \frac{1}{2}H^2 \Rightarrow \vec{H} \neq 0 \\ \rho = p \\ 16\pi p \, u^2 = \frac{1}{2}H^2 \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} QM.1 &\iff 0 = G^2 + \frac{1}{2}H^2 - 8\pi(\rho + p)u^2 - 4\pi(\rho + 3p) \\ &\iff G^2 = 4\pi(\rho + 3p) = 16\pi p \Rightarrow H^2 = 32\pi p \Rightarrow p \neq 0. \end{aligned}$$

Temos ainda

$$16\pi p\, u^2 = \frac{1}{2}H^2 = 16\pi p \Leftrightarrow u^2 = 1.$$

A verificação da equação $QM.2.3$ é imediata desde que se respeite a sua única imposição: que a escolha dos sinais satizfaça $G \cdot H \cdot u \cdot p > 0$.

Falta apenas considerar $\vec{G} \neq 0$ e $b \neq 0$.

$$QM.2 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = u_1 \\ bH = -16\pi(\rho + p)u^0 u_2 \\ 0 = 2GH - 16\pi(\rho + p)u^0 u_3 \end{cases}$$

Por termos $\nabla G = 0$, $\vec{H} = HX_2$ e $u_1 = 0$ a unica equação não trivial de entre as equações $QM.3.ij$ $(i \neq j)$ é

$$\begin{aligned} QM.3.23 \Leftrightarrow QM.3.32 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 = 8\pi(\rho + p)u_2 u_3 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 = u_2 u_3. \end{aligned}$$

Mas sendo as componentes de $\vec{u}$ constantes

$$\nabla_{\vec{u}}\, \vec{u} = u_i u_j \nabla_{X_i} X_j = u_2 u_3 \left(\nabla_{X_2} X_3 + \nabla_{X_3} X_2\right) = 0.$$

Para $u_3 = 0$ obtemos $\vec{u}$ paralelo a $\vec{H}$ e

$$\text{Eq. movimento} \Leftrightarrow 0 = \left(u^0\right)^2 G \Leftrightarrow G = 0$$

em contradição com a condição atrás imposta.

Se $u_2 = 0$, $QM.2.2 \Rightarrow H = 0$ e a equação do movimento dar-nos-á de novo $G = 0$.

$\square$

3.3 Soluções para álgebras de Lie com Rank$D = 3$.

Procuramos soluções para álgebras de Lie com $D = \text{diag}(a, b, c)$, onde $abc \neq 0$. Tendo em conta que $QM.3.ij \Leftrightarrow QM.3.ji$, visto serem equações que envolvem apenas componentes de tensores simétricos (*Ricci*, $\nabla G = -\nabla d\phi$ e γ), as equações QM são, à partida, um sistema de 10 equações a 14 incógnitas ($\vec{G}$, $\vec{H}$, $\vec{u}$, ρ, p, a, b e c). Como na demonstração da proposição 2.1.2 verificámos que $\vec{G} = 0$, as equações QM ficam reduzidas a 11 incógnitas, sendo de esperar, pelo teorema da função implícita, que as soluções sejam de facto famílias a um parâmetro de soluções. No entanto, o facto das $QM.3.ij$ $(i \neq j)$ serem equivalentes a apenas duas condições faz com que se obtenham famílias de soluções a dois parâmetros.

No caso da família de soluções descrita no ponto 4 do teorema que se segue, a dependência dos dois parâmetros não surge de forma explícita. Note-se que, estando esta família de soluções sujeita a restrições tão apertadas, é possível que se trate de uma família vazia.

Teorema 3.3.1 *As soluções com RankD = 3 são:*

1. *(Universo de Einstein)* $D = diag(a,b,b)$, *com* $a \cdot b > 0$ *(D tem assinatura (+,+,+), sendo a álgebra de Lie em questão do tipo V (ver [W])),* $a(a-b) \geq 0$, $\vec{G} = 0$, $\vec{H} = \pm\sqrt{a(a-b)}\, X_1$, $\vec{u} = \pm\sqrt{\frac{a-b}{b}}\, X_1$ *e* $\rho = -3p = \frac{3ab}{32\pi}$, *onde os sinais das componentes deverão respeitar* $H \cdot u \leq 0$.

2. $D = diag(a,b,b)$, *com* $a \cdot b < 0$ *(D tem assinatura (+,-,-), sendo a álgebra de Lie em questão do tipo VI),* $a(a-2b) > 0$, $\vec{G} = 0$, $\vec{H} = \pm\sqrt{a(a-2b)}\, X_1$, $\vec{u} = \pm\sqrt{-\frac{a}{2b}}\, X_1$ *e* $\rho = p = -\frac{ab}{16\pi}$, *onde os sinais das componentes deverão respeitar* $H \cdot u < 0$.

3. $D = diag(a,b,a-b)$, *com* $a^2 < 8b(a-b)$, $\vec{G} = 0$, $\vec{H} = \pm\sqrt{-\frac{1}{2}a^2 + 4b(a-b)}\, X_1$, $\vec{u} = \pm\frac{a}{\sqrt{16b(a-b)-2a^2}}\, X_1$, $p = -\frac{a^2}{64\pi}$ *e* $\rho = \frac{2b(a-b)-5a^2}{64\pi}$, *onde os sinais das componentes deverão respeitar* $H \cdot u < 0$.

4. $D = diag(a,b,c)$, *com*

$$-3a^2b + 3a^2c + 4ab^2 - 4ac^2 - b^3 - 4b^2c + 4bc^2 + c^3 = 0,$$

$\vec{G} = 0$, $p = \frac{2R_{11}-4R_{22}-4R_{33}-bc}{64\pi}$, $\rho = \frac{10R_{11}-4R_{22}-4R_{33}-5bc}{64\pi}$, $\vec{H} = \pm\sqrt{\frac{2c}{c-b}(R_{22}-R_{11})}\, X_2 \pm \sqrt{\frac{2b}{b-c}(R_{33}-R_{11})}\, X_3$ *e* $\vec{u} = u_2X_2 + u_3X_3$, *com* $8\pi(\rho+p)u_2^2 = \frac{b}{b-c}(R_{22}-R_{11})$ *e* $8\pi(\rho+p)u_3^2 = \frac{c}{c-b}(R_{33}-R_{11})$, *onde os sinais das componentes deverão respeitar* $H_2 \cdot u_2 \cdot b \cdot (\rho+p) < 0$ *e* $H_3 \cdot u_3 \cdot c \cdot (\rho+p) < 0$.

$\triangle$: Seja $D = \text{diag}(a,b,c)$, com $abc \neq 0$, e d_i o i-ésimo valor próprio de D.

$$QM.2 \Leftrightarrow d_iH_i = -16\pi(\rho+p)u^0u_i \Leftrightarrow H_i = -\frac{16\pi(\rho+p)}{d_i}\, u^0u_i$$

e

$$\begin{aligned}
QM.3.ij\ (i \neq j) \quad &\Leftrightarrow \quad 0 = H_iH_j + 16\pi(\rho+p)u_iu_j \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = \frac{[16\pi(\rho+p)]^2}{d_id_j}\left(u^0\right)^2 u_iu_j + 16\pi(\rho+p)u_iu_j \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = 16\pi(\rho+p)u_iu_j\left(\frac{16\pi(\rho+p)}{d_id_j}\left(u^0\right)^2 + 1\right) \\
&\Leftrightarrow \quad 0 = u_iu_j \ \vee \ \left(u^0\right)^2 = -\frac{d_id_j}{16\pi(\rho+p)}
\end{aligned}$$

Temos de considerar os seguintes casos:
A) $u_{i_2} = 0$ *i)* $u_{i_3} = 0$ *ii)* $\left(u^0\right)^2 = -\frac{d_{i_1}d_{i_3}}{16\pi(\rho+p)}$, onde (i_1,i_2,i_3) é uma qualquer permutação de (1,2,3).

$B)\quad (u^0)^2 = -\frac{d_i d_j}{16\pi(\rho+p)} \quad , \forall i,j \in \{1,2,3\}, i \neq j.$

$A\ i)$ Suponhamos, spg, que $u_2 = u_3 = 0 \Rightarrow \vec{u} = uX_1$. $QM.2 \Rightarrow \vec{H} = HX_1$.

$$QM.3.ii\ (i \neq 1) \Leftrightarrow R_{22} = R_{33} = -\frac{1}{2}H^2 + 4\pi(\rho - p)$$

Mas

$$\begin{aligned} R_{22} = R_{33} \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}c^2 + ac = -\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}c^2 + ab \\ &\Leftrightarrow \quad b^2 - c^2 + ac - ab = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (b-c)(b+c) - a(b-c) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (b-c)(b+c-a) = 0 \Leftrightarrow c = b\ \vee\ c = a - b \end{aligned}$$

Existem, portanto, dois sub-casos: $A\ i.1)\ c = b$ e $A\ i.2)\ c = a - b$

$A\ i.1)$ Temos $\vec{u} = uX_1$ $\left(\overset{QM.2}{\Longrightarrow} \vec{H} = HX_1\right)$ e $D = \mathrm{diag}(a,b,b)$. O Lema do Rescalamento (proposição 2.5) permite-nos escolher $a = 1$ sem corrermos o risco de perder soluções.
Seja $\Omega = 8\pi(\rho + p) \neq 0$.
As equações Quasi Maxwell são:

$QM.1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}H^2 = \Omega\, u^2 + \frac{1}{2}\,\Omega + 8\pi p$;

$QM.2 \Leftrightarrow H = -2\Omega\, u^0 u$;

$QM.3.ij\ \ (i \neq j)$ já foram verificadas;

$QM.3.ii \Leftrightarrow \begin{cases} R_{11} = \frac{1}{2} = \Omega\, u^2 + 4\pi(\rho - p) \\ R_{22} = R_{33} = b - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}H^2 + 4\pi(\rho - p) \end{cases}$.

Temos então

$$QM.3.11 + QM.3.22 \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}H^2 + \Omega u^2 + 8\pi(\rho - p).$$

Inserindo $QM.1$ na equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} & b = -\Omega\, u^2 - \frac{1}{2}\,\Omega - 8\pi p + \Omega\, u^2 + 8\pi(\rho - p) \\ \Leftrightarrow\quad & b = -\frac{1}{2}\Omega - 8\pi p + 8\pi(\rho + p) - 16\pi p = \frac{1}{2}\,\Omega - 24\pi p \\ \Leftrightarrow\quad & p = \frac{1}{24\pi}\left(\frac{1}{2}\,\Omega - b\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} QM.3.11 \Leftrightarrow \Omega\, u^2 \quad &= \quad \frac{1}{2} - 4\pi(\rho - p) = \frac{1}{2} - 4\pi(\rho + p) + 8\pi p \\ &= \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\Omega - \frac{1}{3}b \end{aligned}$$

donde

$$u^2 = \frac{3-2b}{6\Omega} - \frac{1}{3}.$$

De mesma maneira obtemos

$$QM.1 \Leftrightarrow H^2 = \frac{2}{3}(\Omega - 2b) + 1.$$

Agora

$$\begin{aligned}
QM.2 \quad &\Leftrightarrow \quad H = -2\,\Omega\, u^0 u \\
&\Rightarrow \quad H^2 = 4\,\Omega^2 \left(u^0\right)^2 u^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4\,\Omega^2} H^2 = u^4 + u^2 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4\,\Omega^2}\left(\frac{2}{3}(\Omega - 2b) + 1\right) - \left(\frac{3-2b}{6\Omega} - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{3-2b}{6\Omega} - \frac{1}{3}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(-\frac{b}{3} + \frac{1}{4} - \frac{(3-2b)^2}{36}\right)\frac{1}{\Omega^2} + \left(\frac{1}{6} + \frac{6-4b}{18} + \frac{2b-3}{6}\right)\frac{1}{\Omega} + \frac{2}{9} = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -b^2 \frac{1}{\Omega^2} + b\frac{1}{\Omega} + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\Omega} = \frac{-b \pm 3b}{-2b^2} \\
&\Leftrightarrow \quad \Omega = \frac{b}{2} \ \vee \ \Omega = -b
\end{aligned}$$

Seja $\Omega = \frac{b}{2}$. Facilmente se obtém

$$H^2 = 1 - b \ , \ \ u^2 = \frac{1-b}{b} \ \ , \ \ p = -\frac{b}{32\pi} \ \text{ e } \ \rho = -3p.$$

Nestas condições $QM.2$ só impõe que a escolha dos sinais para H e u deva obedecer à condição $H \cdot u \cdot b < 0$.

A obtenção das soluções gerais, i.e., para $D = \operatorname{diag}(a, b, b)$, advém de uma nova aplicação do Lema do Rescalamento. Temos então

$$H^2(a, b, b) = a^2 H^2 \left(1, \frac{b}{a}, \frac{b}{a}\right) = a^2\left(1 - \frac{b}{a}\right) = a(a-b)$$

originando-se, aqui, a condição $1 - \frac{b}{a} \geq 0 \Leftrightarrow a(a-b) \geq 0$.

Da mesma forma

$$u^2(a, b, b) = u^2\left(1, \frac{b}{a}, \frac{b}{a}\right) = \frac{1 - \frac{b}{a}}{\frac{b}{a}} = \frac{a-b}{b}$$

impondo-se a condição $\frac{1-\frac{b}{a}}{\frac{b}{a}} \geq 0 \Leftrightarrow a \cdot b \geq 0 \Rightarrow a \cdot b > 0$.

Note-se ainda que a condição $H \cdot u \cdot b < 0$ se transforma em

$$H \cdot u \cdot \frac{a^2 b}{a} < 0 \Leftrightarrow H \cdot u < 0.$$

Para terminar o ponto 1 do teorema, basta ter em conta que

$$p(a,b,b) = a^2\left(-\frac{\frac{b}{a}}{32\pi}\right) = -\frac{ab}{32\pi}.$$

Para demonstrar o ponto 2 do teorema basta escolher $\Omega = -b$ e proceder como no caso anterior.

$\bigtriangledown$

A i.2) Seja $\vec{u} = uX_1$ $\left(\stackrel{QM.2}{\Longrightarrow} \vec{H} = HX_1\right)$ e $D = \mathrm{diag}(a, b, a-b)$. Vamos considerar $a = 1$. Em relação ao caso *A i.1)* as únicas equações que se alteram são

$$QM.3.ii \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} R_{11} = 2b(1-b) = 8\pi(\rho+p)u^2 + 4\pi(\rho-p) \\ R_{22} = R_{33} = 0 = -\frac{1}{2}H^2 + 4\pi(\rho-p) \Leftrightarrow H^2 = 8\pi(\rho-p) \end{array}\right. .$$

A partir da última equação obtemos

$$\begin{aligned} QM.1 \quad &\Leftrightarrow \quad 4\pi(\rho-p) = 8\pi(\rho+p)u^2 + 4\pi(\rho+3p) \\ &\Leftrightarrow \quad 8\pi(\rho+p)u^2 = -16\pi p \\ &\Leftrightarrow \quad u^2 = -\frac{2p}{\rho+p} \\ &\Rightarrow \quad (p \leq 0 \ \wedge \ \rho+p > 0) \ \vee (p \geq 0 \ \wedge \ \rho+p < 0). \end{aligned}$$

No entanto, a segunda condição implica $\rho - p < -2p \leq 0$, em contradição com o facto de $H^2 = 8\pi(\rho - p)$.

Sendo $\rho + p > 0$ os sinais de H e u têm de ser contrários e

$$\begin{aligned} QM.2 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{8\pi(\rho-p)} = 16\pi(\rho+p)\sqrt{\frac{-2p}{\rho+p}+1}\sqrt{\frac{-2p}{\rho+p}} \\ &\Leftrightarrow \quad \rho - p = 64\pi p(p-\rho). \end{aligned}$$

Mas $\rho - p = 0 \Rightarrow H = 0 \stackrel{QM.2}{\Longrightarrow} u = 0 \stackrel{QM.3.11}{\Longrightarrow} R_{11} = 0 \Leftrightarrow bc = 0$, o que é absurdo.

Temos então

$$p = -\frac{1}{64\pi}$$

e

$$QM.3.11 \Leftrightarrow \rho = \frac{32b(1-b)-5}{64\pi}.$$

A partir das últimas igualdades obtemos as expressões de H^2 e u^2 para o caso $a = 1$. A obtenção do caso geral e das restrições sobre a métrica, i.e., sobre a e b, seguem por um processo análogo ao utilizado no caso *A i)*.

$\bigtriangledown$

A ii) Tomemos $u_1 = 0$ ($\Rightarrow H_1 = 0$) e $\left(u^0\right)^2 = -\frac{bc}{16\pi(\rho+p)}$.

Desde já

$$\vec{u}^2 + 1 = -\frac{bc}{16\pi(\rho+p)} \Leftrightarrow 8\pi(\rho+p)\vec{u}^2 = -\frac{1}{2}bc - 8\pi(\rho+p)$$

e

$$QM.1 \Leftrightarrow \vec{H}^2 = -bc - 8\pi(\rho - p).$$

$$QM.3.11 \Leftrightarrow 8\pi(\rho - p) = R_{11} - \frac{1}{2}bc$$

donde

$$\begin{aligned} QM.3.22 + QM.3.33 \;\; &\Leftrightarrow \;\; R_{22} + R_{33} = 4\pi(\rho - p) - 16\pi p \\ &\Leftrightarrow \;\; p = \frac{2R_{11} - 4R_{22} - 4R_{33} - bc}{64\pi}. \end{aligned}$$

A obtenção da expressão para ρ é agora imediata.

$$\begin{aligned} QM.2 \Leftrightarrow \begin{cases} bH_2 = -16\pi(\rho+p)u^0u_2 \\ cH_3 = -16\pi(\rho+p)u^0u_3 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} b^2H_2^2 = [16\pi(\rho+p)]^2 \left(u^0\right)^2 u_2^2 \\ c^2H_3^2 = [16\pi(\rho+p)]^2 \left(u^0\right)^2 u_3^2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} H_2^2 = -16\pi(\rho+p)\frac{c}{b}u_2^2 \\ H_3^2 = -16\pi(\rho+p)\frac{b}{c}u_3^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Usando $(QM.2.2)^2$, vem

$$\begin{aligned} QM.3.22 \;\; &\Leftrightarrow \;\; R_{22} = \frac{1}{2}H_2^2 - \frac{1}{2}\vec{H}^2 + 8\pi(\rho+p)u_2^2 + 4\pi(\rho - p) \\ &\Leftrightarrow \;\; \left(1 - \frac{c}{b}\right) 8\pi(\rho+p)u_2^2 = R_{22} - R_{11}. \end{aligned}$$

Facilmente se verifica que, para as condições impostas inicialmente, não existem soluções com $b = c$, tornando-se imediata a expressão para $8\pi(\rho+p)u_2^2$. A expressão para H_2^2 sai agora da equação $(QM.2.2)^2$ e para que se verifique $QM.2.2$ basta impor que $H_2 \cdot u_2 \cdot b \cdot (\rho + p) < 0$.

As expressões para $8\pi(\rho+p)u_2^2$ e para H_3^2 são obtidas de forma análoga e a restição sobre a métrica sai das equações

$$H_2^2 + H_3^2 = -bc - 8\pi(\rho - p)$$

e

$$8\pi(\rho+p)u_2^2 + 8\pi(\rho+p)u_3^2 = -\frac{1}{2}bc - 8\pi(\rho+p).$$

Tendo em conta a complexidade da restrição obtida podemos aplicar o lema do rescalamento e fixar $a = 1$ e em seguida dividir a expressão por $b - c$, obtendo

$$b^2 + c^2 + 5bc - 4b - 4c + 3 = 0.$$

Expressão esta, que do ponto de vista da existência de soluções é equivalente à expressão inicial.

$\bigtriangledown$

B) É imediato que

$$ab = bc = ac \Leftrightarrow a = b = c.$$

Por simetria podemos tomar $u_2 = u_3 = 0$ e, assim sendo, voltamos ao caso A $i.1$).

$\square$

3.4 Soluções espacial e temporalmente homogéneas.

Uma solução cosmológica diz-se espacial e temporalmente homogénea se o espaçotempo a que se refere for um grupo de Lie quadridimensional com métrica invariante à esquerda. Nos casos em estudo o espaçotempo é de facto um grupo de Lie, nomeadamente $Q = \mathbb{R} \times \Sigma$. O resultado seguinte dá-nos uma condição necessária e suficiente, no formalismo Quasi-Maxwell, para que a métrica g seja invariante à esquerda.

Proposição 3.4.1 *Uma solução das equações QM é espacial e temporalmente homogénea se e só se* $\vec{G} = 0$.

$\bigtriangleup$: $Q = \mathbb{R} \times \Sigma$ é um grupo de Lie com translação à esquerda definida por

$$L_{(t,x)}(k, y) = (t + k, xy).$$

Nas coordenadas locais $\{t, x^i\}$, a aplicação $\left(L_{(t,x)}\right)_*$ é dada pela matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (L_x)_* \end{bmatrix}$$

concluindo-se de imediato que o campo de Killing T é um campo invariante à esquerda.

Seja $\{X_i\}$ uma base ortonormada, para $T\Sigma$, de campos invariantes à esquerda e $\widetilde{X}_i$ o vector obtido por levantamento ortogonal de X_i relativamente a T.

$\vec{G} = 0 \Rightarrow \phi$ constante $\Rightarrow ||T||$ constante, concluindo-se que $\{\frac{T}{||T||}, \widetilde{X}_i\}$ é uma base ortonormada de campos invariantes à esquerda.

A demonstração da outra implicação é imediata, visto que, $g_{00} = g(T, T) = e^{2\phi}$ e $\vec{G} \neq 0 \Rightarrow \phi$ não constante.

$\square$

Concluímos então que, com a excepção do Universo de Gödel, todas as soluções até agora classificadas correspondem a cosmologias espacial e temporalmente homogéneas. Os dois resultados que se seguem concluem a classificação destas cosmologias para variedades espaço com álgebra de Lie de classe A.

Proposição 3.4.2 *Não existem soluções espacial e temporalmente homogéneas para álgebras de Lie de classe A com* $rank D = 1$.

$\triangle$: De forma resumida, seja $D = \text{diag}(0,0,1)$. Por simetria podemos tomar $\vec{H} = H_2X_2 + H_3X_3 \overset{QM.2}{\Longrightarrow} \vec{u} = uX_3$.

Donde $QM.3.23 \Leftrightarrow 0 = H_2H_3$.

Se $H_3 = 0 \overset{QM.2}{\Longrightarrow} \vec{u} = 0$ e

$$QM.3.ii \Leftrightarrow \vec{H}^2 = -1.$$

Se $H_2 = 0$, i.e., $\vec{H} = HX_3$,

$$QM.3.ii \Leftrightarrow \begin{cases} H^2 = 8\pi(\rho - p) + 1 \\ 8\pi(\rho + p)u^2 = \frac{1}{2} - 4\pi(\rho - p) \end{cases}$$

e

$$QM.1 \Leftrightarrow \rho = 5p \Rightarrow p \neq 0.$$

Introduzindo tudo em $QM2.2$ vamos obter $p = 0$.

$\square$

Proposição 3.4.3 *A única solução espacial e temporalmente homógenea com rank$D = 2$ é o espaçotempo de Minkowski.*

$\triangle$: $QM.2 \Rightarrow u_1 = 0$, donde

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{u}}\vec{u} &= u_2u_3(\Gamma^1_{23} + \Gamma^1_{32})X_1 \\ &= \frac{1}{2}u_2u_3(C_{123} + C_{312} - C_{231} + C_{132} + C_{213} - C_{321})X_1 \\ &= \frac{1}{2}u_2u_3(0 - c + b + 0 + b - c)X_1 \\ &= (b-c)u_2u_3X_1. \end{aligned}$$

Temos então

$$\text{Eq. Movimento} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-c)u_2u_3 = u^0(u_2H_3 - u_3H_2) \\ u_3H_1 = 0 \\ u_2H_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow H_1 = 0 \;\vee\; \vec{u} = 0.$$

Facilmente se conclui que para $\vec{u} = 0$ não existem soluções e que as soluções com $H_1 = 0$ e $u_2 \cdot u_3 = 0$ têm $b = c$, obtendo-se o espaçotempo de Minkowski (ver proposição 3.1.1).

Suponhamos então que $H_1 = 0$ e que $u_2 \cdot u_3 \neq 0$. Usando $QM.2$ obtemos

$$\text{Eq. Movimento} \Leftrightarrow QM.3.ij\ (i \neq j) \Leftrightarrow \left(u^0\right)^2 = -\frac{bc}{16\pi(\rho + p)}.$$

Estamos, portanto, numa situação muito próxima à do caso A $ii)$ da demonstração do teorema 3.3.1. Se utilizarmos o mesmo procedimento vamos obter

$$u_2 = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{b^2}{-b^2-c^2+bc}}\,X_2 \Rightarrow -b^2-c^2+bc>0$$

e

$$H_2 = \pm\sqrt{-2bc}\,X_2 \Rightarrow bc<0.$$

Mas

$$u_2^2+u_3^2 = -\frac{bc}{16\pi(\rho+p)} \Leftrightarrow b^2+c^2+5bc=0$$

donde

$$-b^2-c^2+bc>0 \Leftrightarrow b^2+c^2+5bc-6bc<0 \Leftrightarrow bc>0$$

em contradição com a condição imposta pela expressão para H_2.

□

3.5 Soluções numéricas.

O lema do rescalamento, associado à proposição 2.1.2 e ao corolário 2.1.5, permitem transformar as equações QM do caso rank$D=1$ e $\vec{G}\neq 0$, num sistema de 10 equações a 10 incógnitas. A situação - número de incógnitas igual ao número de variáveis - é ideal para utilizar os métodos numéricos disponíveis no *Maple*[1].

Se usarmos as equações QM não é detectada qualquer solução e se substituirmos $QM.2$ pelo seu quadrado, como forma de evitar os radicais, surge uma única. Esta revela, no entanto, não se tratar de uma solução do sistema inicial. Assim sendo, temos fortes indicações para a inexistência de soluções cosmológicas das equações QM para rank$D=1$.

No caso $D=\mathrm{diag}(0,b,c)$, $bc\neq 0$, o lema do rescalamento permite-nos fixar $b=1$, mas mesmo assim obtemos um sistema de 10 equações a 11 incógnitas. Temos, portanto, de fixar valores para c, um a um. Os resultados obtidos são em tudo idênticos aos do caso Rank$D=1$, sendo, no entanto, menos conclusivos, por estarmos condicionados pela finitude, i.e., pelo facto de só podermos testar uma quantidade finita de entre os valores que c pode tomar.

Para terminar, surge-nos como natural a afirmação:

Conjectura 3.5.1 *As cosmologias espacialmente homogéneas de classe A em espaçotempos estacionários são classificadas pelos teoremas 3.2.1 e 3.3.1*

[1]Foi utilizada a opção *fsolve*

Apêndice

Proposição 3.5.2 *Num grupo de Lie com álgebra de Lie de classe A e métrica invariante à esquerda a matriz das componentes do tensor de Ricci na base* $\{\omega^i \otimes \omega^j\}$*, onde* $\{\omega^i\}$ *é um co-referencial ortonormado invariante à esquerda, é dada por*

$$(R_{ij}) = D^2 - \frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(D^2\right) I + \operatorname{cof}(D).$$

$\triangle$: As formas de conexão [2] são dadas por

$$\omega_{ij} = \Gamma_{ikj} = \frac{1}{2}\left[C_{ikj} + C_{jik} - C_{kji}\right]\omega^k.$$

A 2ª equação estrutural de Cartan dá-nos

$$\begin{aligned}
\Omega_{ij} &= d\omega_{ij} + \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} \\
&= \frac{1}{2}\left[C_{ikj} + C_{jik} - C_{kji}\right]\left(-\frac{1}{2}C_{klm}\omega^l \wedge \omega^m\right) \\
&\quad + \frac{1}{4}\left[C_{ilk} + C_{kil} - C_{lki}\right]\left[C_{kmj} + C_{jkm} - C_{mjk}\right]\omega^l \wedge \omega^m.
\end{aligned}$$

Mas as formas de curvatura são por definição

$$\Omega_{ij} = \sum_{l<m} R_{lm}{}^{i}{}_{j}\, \omega^l \wedge \omega^m$$

donde

$$\begin{aligned}
R_{lm}{}^{i}{}_{j} = &- \frac{1}{2}\left[C_{ikj} + C_{jik} - C_{kji}\right] C_{klm} \\
&+ \frac{1}{4}\left[C_{ilk} + C_{kil} - C_{lki}\right]\left[C_{kmj} + C_{jkm} - C_{mjk}\right] \\
&- \frac{1}{4}\left[C_{imk} + C_{kim} - C_{mki}\right]\left[C_{klj} + C_{jkl} - C_{ljk}\right].
\end{aligned}$$

[2] Utilizaremos as convenções de sinal adoptadas em [W]. Note-se que são contrárias às utilizadas em [O].

As componentes do tensor de Ricci são então

$$\begin{aligned} R_{mj} = R_{lm}{}^{l}{}_{j} = & - \frac{1}{2}\left[C_{lkj} + C_{jlk} - C_{kjl}\right] C_{klm} \\ & + \frac{1}{4}\left[C_{llk} + C_{kll} - C_{lkl}\right]\left[C_{kmj} + C_{jkm} - C_{mjk}\right] \\ & - \frac{1}{4}\left[C_{lmk} + C_{klm} - C_{mkl}\right]\left[C_{klj} + C_{jkl} - C_{ljk}\right]. \end{aligned}$$

Se regressarmos aos indíces tradicionais, tendo em conta que $C_{llk} - C_{lkl} = 2C_{llk}$ e que $C_{kll} = 0$, obtemos

$$\begin{aligned} R_{ij} = & - \frac{1}{2}\left[C_{lkj} + C_{jlk} - C_{kjl}\right] C_{kli} \\ & + \frac{1}{2} C_{llk}\left[C_{kij} + C_{jki} - C_{ijk}\right] \\ & - \frac{1}{4}\left[C_{lik} + C_{kli} - C_{ikl}\right]\left[C_{klj} + C_{jkl} - C_{ljk}\right] \\ = & - \frac{1}{2} C_{kli}C_{lkj} + \frac{1}{2} C_{kli}C_{jlk} - \frac{1}{2}C_{kli}C_{klj} \\ & - \frac{1}{2} C_{llk}\left(C_{jik} + C_{ijk}\right) + \frac{1}{2} C_{llk}C_{kij} \\ & - \frac{1}{4}\left[(-C_{lki}C_{klj} + C_{kli}C_{lkj}) + (-C_{lki}C_{lkj} + C_{kli}C_{klj})\right. \\ & \quad \left. +(C_{ilk}C_{klj} + C_{ilk}C_{lkj}) + (-C_{lki}C_{jkl} + C_{kli}C_{jkl}) + C_{ilk}C_{jkl}\right]. \end{aligned}$$

As parcelas das últimas duas linhas que estão entre parêntesis cancelam-se e pela identidade de Jacobi

$$\begin{aligned} C_{llk}C_{kij} &= -C_{kij}C_{lkl} = C_{kjl}C_{lki} + C_{kli}C_{lkj} \\ &= C_{kli}C_{lkj} - C_{lki}C_{klj} = 0. \end{aligned}$$

Obtendo-se finalmente uma expressão para as componentes do tensor de Ricci para um qualquer grupo de Lie, i.e., idependentemente de ter álgebra de Lie de classe A ou B,

$$R_{ij} = \frac{1}{4} C_{ikl}C_{jkl} - \frac{1}{2} C_{kli}C_{klj} - \frac{1}{2} C_{kli}C_{lkj} - \frac{1}{2} C_{llk}(C_{ijk} + C_{jik}).$$

Para álgebras de Lie de classe A a última parcela é nula.

Mas

$$C_{ijk} = -D_{in}\epsilon_{njk},$$

onde $\epsilon_{ijk} = \begin{cases} \text{sng}(i,j,k) & \text{se} \quad (i,j,k) \text{ permutação de } (1,2,3) \\ 0 & \qquad\qquad \text{caso contrário} \end{cases}$.

Temos então

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \frac{1}{4}D_{im}\epsilon_{mkl}D_{jn}\epsilon_{nkl} - \frac{1}{2}D_{km}\epsilon_{mli}D_{kn}\epsilon_{nlj} - \frac{1}{2}D_{km}\epsilon_{mlj}D_{ln}\epsilon_{nki} \\ &= \frac{1}{2}D_{im}D_{jn}\delta_{mn} - \frac{1}{2}D_{km}D_{kn}(\delta_{mn}\delta_{ij} - \delta_{mj}\delta_{in}) + (\mathrm{cof}D)_{ij} \\ &= \frac{1}{2}D_{ik}D_{kj} - \frac{1}{2}D_{kl}D_{kl}\delta_{ij} + \frac{1}{2}D_{ik}D_{kj} + (\mathrm{cof}D)_{ij}, \end{aligned}$$

onde se recorreu à simetria de D e às igualdades

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \quad \text{e} \quad \epsilon_{imk}\epsilon_{lmk} = 2\delta_{il}.$$

□

Proposição 3.5.3 *Um grupo de Lie com álgebra de Lie de Classe A e métrica invariante à esquerda tem Ricci* $= 0$ *se e só se existe uma base ortonormada da álgebra de Lie na qual* $D = diag(0, b, b)$, $b \in \mathbb{R}$.

△: Seja $D = \mathrm{diag}(a, b, c)$. A proposição anterior reduz o problema à verificação das condições $R_{11} = R_{22} = R_{33} = 0$. Em particular temos

$$\begin{cases} R_{11} = R_{22} \Leftrightarrow a = b \;\vee\; c = a + b \\ R_{11} = R_{33} \Leftrightarrow a = c \;\vee\; b = a + c \\ R_{22} = R_{33} \Leftrightarrow b = c \;\vee\; a = b + c \end{cases}.$$

Supondo que $a = b$, vem

$$R_{33} = 0 \Leftrightarrow -a^2 + \frac{1}{2}c^2 + a^2 = 0 \Leftrightarrow c = 0,$$

tal como era pretendido.

Se supusermos que $c = a + b$, temos

$$R_{22} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}(a+b)^2 + a(a+b) = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

A análise dos restantes casos segue de forma análoga.

□

Bibliografia

[L] Landau, L. and Lifshitz, E., *The Classical Theory of Fields*, Butterworth-Heinemann, 1997.

[Ly] Lynden-Bell, Donald and Nouri-Zonoz, Mohammad, *Classical Monopoles: Newton, NUT-space, gravomagnetic lensing and atomic spectra*, Rev.Mod.Phys. 70 (1998) 427-446, 1998.

[K] Knapp, Anthony W., *Lie Groups Beyond an Introduction*, Birkhäuser, Boston 1996.

[O] Oliva, Waldyr M., *Geometric Mechanics*, Springer, 2003.

[R] Ryan, Michael P., *Homogeneous Relativistic Cosmologies*, Princeton University Press, 1975.

[S] Stephani, Hans; Kramer, Dietrich; MacCallum, Malcolm; Hoenselaers, Cornelius and Herlt, Eduard, *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*, Cambridge University Press, 2003.

[W] Wald, Robert M., *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago 1984.

[War] Warner, Frank W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, 2000.