

# Relatividade Matemática

## Ficha 7

*A entregar até à aula de Sexta-feira dia 17 de Abril*

1. Seja  $g$  uma métrica Lorentziana escrita na forma dada pelo Lema de Gauss,

$$g = -dt^2 + h_{ij}dx^i dx^j,$$

e considere a congruência geodésica tangente a  $\frac{\partial}{\partial t}$ .

- (a) Mostre que a segunda forma fundamental  $B$  da congruência satisfaz

$$B_{ij} = \Gamma_{ij}^0 = \frac{1}{2} \frac{\partial h_{ij}}{\partial t},$$

isto é,

$$B = \frac{1}{2} \mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial t}} g = K,$$

onde  $K$  é a segunda forma fundamental das hipersurfaces de  $t$  constante.

- (b) Conclua que a expansão da congruência das galáxias num modelo FLRW é

$$\theta = \frac{3\dot{a}}{a} = 3H.$$

2. Seja  $(M, g)$  uma variedade Lorentziana.

- (a) Use a fórmula para a derivada de Lie de um tensor,

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = X \cdot g(Y, Z) - g(\mathcal{L}_X Y, Z) - g(Y, \mathcal{L}_X Z)$$

para mostrar que

$$(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X).$$

- (b) Mostre que esta fórmula pode ser escrita como

$$(\mathcal{L}_X g)_{\mu\nu} = \nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu.$$

- (c) Suponha que  $X$  é um campo de Killing, i.e.  $\mathcal{L}_X g = 0$ . Use a equação de Killing

$$\nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu = 0$$

para mostrar que  $X$  é uma solução da equação de Jacobi. Interprete este facto geometricamente.

3. Suponha que o tensor energia-momento é diagonalizável,  $(T_{\mu\nu}) = \text{diag}(\rho, p_1, p_2, p_3)$ . Mostre que:

- (a)  $T_{\mu\nu}$  satisfaz a condição de energia forte se e só se  $\rho + \sum_{i=1}^3 p_i \geq 0$  e  $\rho + p_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ).
- (b)  $T_{\mu\nu}$  satisfaz a condição de energia fraca se e só se  $\rho \geq 0$  e  $\rho + p_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ).
- (c)  $T_{\mu\nu}$  satisfaz a condição de energia dominante se e só se  $\rho \geq |p_i|$  ( $i = 1, 2, 3$ ).
- (d)  $T_{\mu\nu}$  satisfaz a condição de energia nula se e só se  $\rho + p_i \geq 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ).
- (e) As três primeiras condições são independentes à exceção de que a condição de energia dominante implica a condição de energia fraca.
- (f) As três primeiras condições implicam a condição de energia nula.