Relatividade Matemática

Ficha 6

A entregar até à aula de Sexta-feira dia 10 de Abril

1. Considere o espaço-tempo de Minkowski tridimensional $(\mathbb{R}^3, g)$, onde

$$g = -dt^2 + dx^2 + dy^2.$$

Seja $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ a curva $c(t) = (t, \cos t, \sin t)$. Mostre que apesar de $\dot{c}(t)$ ser nulo para todo o $t \in \mathbb{R}$ se tem $c(t) \in I^+(c(0))$ para todo o $t > 0$. Que tipo de movimento representa esta curva?

2. Seja (M, g) uma variedade Lorentziana estavelmente causal e h um campo tensorial-2 simétrico com suporte compacto. Mostre que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno o campo tensorial $g_\varepsilon = g + \varepsilon h$ é ainda uma métrica Lorentziana em M, e que (M, g_ε) é cronológico.

3. Seja (M, g) o quociente do espaço-tempo de Minkowski bidimensional pelo grupo discreto de isometrias gerado pela aplicação $f(t, x) = (t + 1, x + 1)$. Mostre que (M, g) é cronológico, mas existem perturbações arbitrariamente pequenas de (M, g) (no sentido do exercício acima) que não são cronológicas.

4. Seja (M, g) o espaço-tempo bidimensional obtido removendo o semieixo dos xx positivos do espaço-tempo de Minkowski bidimensional (ver figura). Mostre que:

   (a) (M, g) é estavelmente causal mas não globalmente hiperbólico;

   (b) existem pontos $p, q \in M$ tais que $J^+(p) \cap J^-(q)$ não é compacto;

   (c) existem pontos $p, q \in M$ com $q \in I^+(p)$ tais que o supremo dos comprimentos de curvas do tipo tempo unindo p a q não é realizado por nenhuma curva do tipo tempo.