

# Relatividade Matemática

## Ficha 5

*A entregar até à aula de Sexta-feira dia 27 de Março*

1. Dê exemplos de variedades Lorentzianas  $(M, g)$  conexas e temporalmente orientadas contendo pontos  $p, q \in M$  tais que:
  - (a) Não existem geodésicas unindo  $p$  a  $q$ ;
  - (b) Existem duas geodésicas distintas (a menos de reparametrização) unindo  $p$  a  $q$ ;
  - (c)  $q \in I^+(p)$  mas não existe nenhuma geodésica do tipo tempo futura unindo  $p$  a  $q$ ;
  - (d)  $J^+(p) \neq \overline{I^+(p)}$ ;
  - (e)  $q \in \partial I^+(p)$  mas não existe nenhuma geodésica nula futura unindo  $p$  a  $q$ .
2. Seja  $(M, g)$  uma variedade Lorentziana temporalmente orientada e  $p \in M$ . Mostre que:
  - (a)  $I^+(p)$  é aberto;
  - (b)  $J^+(p) \subset \overline{I^+(p)}$ ;
  - (c)  $I^+(p) = \text{int } J^+(p)$
  - (d) se  $r \in J^+(p)$  e  $q \in I^+(r)$  então  $q \in I^+(p)$ ;
  - (e) se  $r \in I^+(p)$  e  $q \in J^+(r)$  então  $q \in I^+(p)$ .