Relatividade Matemática

Ficha 4

A entregar até à aula de Sexta-feira dia 20 de Março

Considere novamente a métrica Lorentziana esfericamente simétrica dada por

$$ds^2 = -(A(t,r))^2 dt^2 + (B(t,r))^2 dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2,$$

onde A e B são funções positivas de classe C^∞. Recorde que no referencial ortonormado dual a

$$\omega^0 = Adt, \qquad \omega^r = Bdr, \qquad \omega^\theta = rd\theta, \qquad \omega^\varphi = r\sin\theta d\varphi,$$

o tensor de Einstein tensor tem componentes (usando a notação $\dot{} = \frac{\partial}{\partial t}$ and $' = \frac{\partial}{\partial r}$)

$$\begin{aligned}
G_{00} &= \frac{2B'}{rB^3} + \frac{B^2-1}{r^2B^2} = \frac{2m'}{r^2}\,;\\
G_{0r} &= G_{r0} = \frac{2\dot{B}}{rAB^2}\,;\\
G_{rr} &= \frac{2A'}{rAB^2} - \frac{B^2-1}{r^2B^2}\,;\\
G_{\theta\theta} &= G_{\varphi\varphi} = \frac{A''B - A'B'}{AB^3} + \frac{\dot{A}\dot{B} - A\ddot{B}}{A^3B} + \frac{A'}{rAB^2} - \frac{B'}{rB^3}\,,
\end{aligned}$$

onde

$$B(t,r) = \left(1 - \frac{2m(t,r)}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

1. Assumindo

   - $G_{0r} = 0$ (de modo que B, e portanto m, não dependem de t);
   - $G_{00} + G_{rr} = 0$ (de modo que $A = \frac{\alpha(t)}{B}$ para alguma função positiva α);
   - $\alpha(t) = 1$ (o que pode sempre ser conseguido reescalando t),

   mostre que

   $$G_{\theta\theta} = G_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}\left(A^2\right)'' + \frac{1}{r}\left(A^2\right)'.$$

2. Prove que a solução esfericamente simétrica mais geral da equação de Einstein no vácuo com constante cosmológica Λ é a **métrica de Kottler**

   $$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda}{3}r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2.$$

3. Obtenha o diagrama de Penrose para a extensão analítica máxima da solução de Kottler com $\Lambda > 0$ e $0 < M < \frac{1}{3\sqrt{\Lambda}}$.

4. Considere agora o campo electromagnético esfericamente simétrico

$$F = E(t,r)\,\omega^r \wedge \omega^0.$$

Mostre que este campo satisfaz as equações de Maxwell no vácuo

$$dF = d \star F = 0$$

se e só se

$$E(t,r) = \frac{e}{r^2},$$

onde a constante $e \in \mathbb{R}$ é a carga eléctrica em unidades nas quais $4\pi\varepsilon_0 = 1$ ($\star$ representa o operador de Hodge; será necessário usar $\star(\omega^r \wedge \omega^0) = \omega^\theta \wedge \omega^\varphi$).

5. Como veremos, este campo electromagnético corresponde ao tensor energia-momento

$$T = \frac{E^2}{8\pi}\left(\omega^0 \otimes \omega^0 - \omega^r \otimes \omega^r + \omega^\theta \otimes \omega^\theta + \omega^\varphi \otimes \omega^\varphi\right).$$

Prove que a solução esfericamente simétrica mais geral da equação de Einstein com um campo electromagnético deste tipo é a **métrica de Reissner-Nordström**

$$g = -\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{e^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2.$$

6. Obtenha o diagrama de Penrose para a extensão analítica máxima da solução de Reissner-Nordström com $M > 0$ e $0 < e^2 < M^2$.