

Relatividade Matemática

Ficha 3

A entregar até à aula de Sexta-feira dia 13 de Março

Considere a métrica Lorentziana esfericamente simétrica

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{1}{1 - kr^2} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right),$$

onde a é uma função positiva de classe C^∞ .

1. Use as primeiras equações estruturais de Cartan,

$$\begin{cases} \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \\ d\omega^\mu + \omega^\mu{}_\nu \wedge \omega^\nu = 0 \end{cases},$$

para mostrar que as formas de conexão para o referencial ortonormado dual a

$$\omega^0 = dt, \quad \omega^r = a(t) (1 - kr^2)^{-\frac{1}{2}} dr, \quad \omega^\theta = a(t)r d\theta, \quad \omega^\varphi = a(t)r \sin \theta d\varphi$$

são

$$\omega^0{}_r = \omega^r{}_0 = \dot{a} (1 - kr^2)^{-\frac{1}{2}} dr;$$

$$\omega^0{}_\theta = \omega^\theta{}_0 = \dot{a} r d\theta;$$

$$\omega^0{}_\varphi = \omega^\varphi{}_0 = \dot{a} r \sin \theta d\varphi;$$

$$\omega^\theta{}_r = -\omega^r{}_\theta = (1 - kr^2)^{\frac{1}{2}} d\theta;$$

$$\omega^\varphi{}_r = -\omega^r{}_\varphi = (1 - kr^2)^{\frac{1}{2}} \sin \theta d\varphi;$$

$$\omega^\varphi{}_\theta = -\omega^\theta{}_\varphi = \cos \theta d\varphi.$$

2. Use as segundas equações estruturais de Cartan,

$$\Omega^\mu{}_\nu = d\omega^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\alpha \wedge \omega^\alpha{}_\nu,$$

para mostrar que as formas de curvatura neste referencial são

$$\Omega^0{}_r = \Omega^r{}_0 = \frac{\ddot{a}}{a} \omega^0 \wedge \omega^r;$$

$$\Omega^0{}_\theta = \Omega^\theta{}_0 = \frac{\ddot{a}}{a} \omega^0 \wedge \omega^\theta;$$

$$\Omega^0{}_\varphi = \Omega^\varphi{}_0 = \frac{\ddot{a}}{a} \omega^0 \wedge \omega^\varphi;$$

$$\Omega^\theta{}_r = -\Omega^r{}_\theta = \left(\frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \omega^\theta \wedge \omega^r;$$

$$\Omega^\varphi{}_r = -\Omega^r{}_\varphi = \left(\frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \omega^\varphi \wedge \omega^r;$$

$$\Omega^\varphi{}_\theta = -\Omega^\theta{}_\varphi = \left(\frac{k}{a^2} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} \right) \omega^\varphi \wedge \omega^\theta.$$

3. Usando

$$\Omega^\mu{}_\nu = \sum_{\alpha < \beta} R_{\alpha\beta}{}^\mu{}_\nu \omega^\alpha \wedge \omega^\beta,$$

determine as componentes $R_{\alpha\beta}{}^\mu{}_\nu$ do tensor de curvatura neste referencial ortonormado, e mostre que as componentes não nulas do tensor de Ricci neste referencial são

$$R_{00} = -\frac{3\ddot{a}}{a};$$

$$R_{rr} = R_{\theta\theta} = R_{\varphi\varphi} = \frac{\ddot{a}}{a} + \frac{2\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2}.$$

Conclua que as componentes não nulas do tensor de Einstein neste referencial são

$$G_{00} = \frac{3\dot{a}^2}{a^2} + \frac{3k}{a^2};$$

$$G_{rr} = G_{\theta\theta} = G_{\varphi\varphi} = -\frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2}{a^2} - \frac{k}{a^2}.$$

4. Mostre que a equação de Einstein com constante cosmológica para um fluido perfeito sem pressão em repouso relativamente às coordenadas espaciais, $G + \Lambda g = 8\pi\rho(t)dt^2$, é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} \\ \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} = \Lambda \end{cases}.$$

Mostre ainda que este sistema pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \frac{4\pi\rho}{3}a^3 = \alpha \\ \frac{1}{2}\dot{a}^2 - \frac{\alpha}{a} - \frac{\Lambda}{6}a^2 = -\frac{k}{2} \end{cases},$$

onde α é uma constante de integração não negativa.

5. Desenhe o diagrama de Penrose das soluções com $\alpha > 0$, $\Lambda > 0$ e $k = 0$ (que actualmente se pensam modelar o nosso Universo físico).