Relatividade Matemática

Ficha 2

A entregar até à aula de Sexta-feira dia 6 de Março

Nesta ficha iremos resolver as equações de Einstein no vácuo (sem constante cosmológica) para a métrica Lorentziana esfericamente simétrica dada por

$$ds^2 = -(A(t,r))^2 dt^2 + (B(t,r))^2 dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \,,$$

onde A e B são funções positivas de classe C^∞.

1. Use as primeiras equações estruturais de Cartan,

$$\begin{cases} \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \\ d\omega^\mu + \omega^\mu{}_\nu \wedge \omega^\nu = 0 \end{cases} ,$$

para mostrar que as formas de conexão não nulas do referencial ortonormado dual a

$$\omega^0 = Adt, \qquad \omega^r = Bdr, \qquad \omega^\theta = rd\theta, \qquad \omega^\varphi = r\sin\theta d\varphi$$

são (usando a notação $\dot{} = \frac{\partial}{\partial t}$ e $' = \frac{\partial}{\partial r}$)

$$\omega^0{}_r = \omega^r{}_0 = \frac{A'}{B}dt + \frac{\dot{B}}{A}dr \,;$$
$$\omega^\theta{}_r = -\omega^r{}_\theta = \frac{1}{B}d\theta \,;$$
$$\omega^\varphi{}_r = -\omega^r{}_\varphi = \frac{\sin\theta}{B}d\varphi \,;$$
$$\omega^\varphi{}_\theta = -\omega^\theta{}_\varphi = \cos\theta d\varphi \,.$$

2. Use as segundas equações estruturais de Cartan,

$$\Omega^\mu{}_\nu = d\omega^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\alpha \wedge \omega^\alpha{}_\nu \,,$$

para mostrar que as formas de curvatura neste referencial são

$$\Omega^0{}_r = \Omega^r{}_0 = \left(\frac{A''B - A'B'}{AB^3} + \frac{\dot{A}\dot{B} - A\ddot{B}}{A^3 B} \right) \omega^r \wedge \omega^0 \,;$$
$$\Omega^0{}_\theta = \Omega^\theta{}_0 = \frac{A'}{rAB^2}\,\omega^\theta \wedge \omega^0 + \frac{\dot{B}}{rAB^2}\,\omega^\theta \wedge \omega^r \,;$$
$$\Omega^0{}_\varphi = \Omega^\varphi{}_0 = \frac{A'}{rAB^2}\,\omega^\varphi \wedge \omega^0 + \frac{\dot{B}}{rAB^2}\,\omega^\varphi \wedge \omega^r \,;$$
$$\Omega^\theta{}_r = -\Omega^r{}_\theta = \frac{B'}{rB^3}\,\omega^\theta \wedge \omega^r + \frac{\dot{B}}{rAB^2}\,\omega^\theta \wedge \omega^0 \,;$$
$$\Omega^\varphi{}_r = -\Omega^r{}_\varphi = \frac{B'}{rB^3}\,\omega^\varphi \wedge \omega^r + \frac{\dot{B}}{rAB^2}\,\omega^\varphi \wedge \omega^0 \,;$$
$$\Omega^\varphi{}_\theta = -\Omega^\theta{}_\varphi = \frac{B^2 - 1}{r^2 B^2}\,\omega^\varphi \wedge \omega^\theta.$$

3. Usando
$$\Omega^{\mu}{}_{\nu} = \sum_{\alpha<\beta} R_{\alpha\beta}{}^{\mu}{}_{\nu}\,\omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta}\,,$$
determine as componentes $R_{\alpha\beta}{}^{\mu}{}_{\nu}$ do tensor de curvatura neste referencial ortonormado, e mostre que as componentes não nulas do tensor de Ricci neste referencial são
$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{A''B - A'B'}{AB^3} + \frac{\dot{A}\dot{B} - A\ddot{B}}{A^3 B} + \frac{2A'}{rAB^2}\,;\\
R_{0r} &= R_{r0} = \frac{2\dot{B}}{rAB^2}\,;\\
R_{rr} &= \frac{A'B' - A''B}{AB^3} + \frac{A\ddot{B} - \dot{A}\dot{B}}{A^3 B} + \frac{2B'}{rB^3}\,;\\
R_{\theta\theta} &= R_{\varphi\varphi} = -\frac{A'}{rAB^2} + \frac{B'}{rB^3} + \frac{B^2-1}{r^2B^2}\,.
\end{aligned}$$
Conclua que as componentes não nulas do tensor de Einstein neste referencial são
$$\begin{aligned}
G_{00} &= \frac{2B'}{rB^3} + \frac{B^2-1}{r^2B^2}\,;\\
G_{0r} &= G_{r0} = \frac{2\dot{B}}{rAB^2}\,;\\
G_{rr} &= \frac{2A'}{rAB^2} - \frac{B^2-1}{r^2B^2}\,;\\
G_{\theta\theta} &= G_{\varphi\varphi} = \frac{A''B - A'B'}{AB^3} + \frac{\dot{A}\dot{B} - A\ddot{B}}{A^3 B} + \frac{A'}{rAB^2} - \frac{B'}{rB^3}\,.
\end{aligned}$$

4. Mostre que se escrevermos
$$B(t,r) = \left(1 - \frac{2m(t,r)}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
para alguma função m de classe C^{∞} então
$$G_{00} = \frac{2m'}{r^2}.$$
Conclua que as equações de Einstein $G_{00} = G_{0r} = 0$ são equivalentes a
$$B = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-\frac{1}{2}}\,,$$
onde $M \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração.

5. Mostre que a equação de Einstein $G_{00} + G_{rr} = 0$ é equivalente a $A = \frac{\alpha(t)}{B}$ para alguma função positiva α de classe C^{∞}.

6. Verifique que as equações de Einstein $G_{\theta\theta} = G_{\varphi\varphi} = 0$ são automaticamente satisfeitas.

7. Argumente que é sempre possível reescalar a coordenada t de forma a que a métrica se escreva na forma
$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$
(**Teorema de Birkhoff**).