Relatividade Matemática

Ficha 14

A entregar até Sexta-feira dia 19 de Junho

1. A partir da acção de Einstein-Hilbert-Klein-Gordon,

$$S = \int_M \left[R - 8\pi \left(g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \, \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2 \right) \right] \epsilon,$$

obtenha o tensor energia momento para ϕ:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \, \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(\partial_\alpha \phi \, \partial^\alpha \phi + m^2 \phi^2 \right).$$

2. Seja h a métrica Riemanniana esfericamente simétrica definida em $\mathbb{R}^3$ por

$$h = \frac{dr^2}{1 - \frac{2m(r)}{r}} + r^2 \left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi^2 \right),$$

onde m é uma função de classe C^∞.

(a) Verifique que em coordenadas Cartesianas se tem

$$h_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\frac{2m(r)}{r^3}}{1 - \frac{2m(r)}{r}} x^i x^j.$$

(b) Mostre que se existe

$$M = \lim_{r \to \infty} m(r)$$

então h é assimptoticamente plana e a sua massa ADM é M (em particular coincide com a massa de Komar no caso apropriado).

(c) Verifique que a curvatura escalar de h é

$$R = \frac{4}{r^2} \frac{dm}{dr}.$$

e use este facto para provar o Teorema da Massa Positiva para a métrica h.

(d) Mostre que $r = r_0$ é uma superfície mínima se e só se $m(r_0) = \frac{r_0}{2}$ (caso em que r é uma coordenada bem definida apenas para $r > r_0$), e use este facto para provar a desigualdade de Penrose para a métrica h.