

Relatividade Matemática

Ficha 12

A entregar até à aula de Sexta-feira dia 22 de Maio

1. Denotando por h_0 a métrica de curvatura constante canónica em \mathbb{R}^3 , S^3 ou H^3 , calcule a constante cosmológica e determine os desenvolvimentos globalmente hiperbólicos máximos dos seguintes conjuntos de dados iniciais para as equações de Einstein no vácuo (com constante cosmológica):

- (a) $(\mathbb{R}^3, h_0, 0)$;
- (b) (\mathbb{R}^3, h_0, h_0) ;
- (c) $(S^3, h_0, 0)$;
- (d) $(H^3, h_0, 0)$;
- (e) (H^3, h_0, h_0) ;
- (f) $(\mathbb{R}^3, h_0, \text{diag}(p_1, p_2, p_3))$ com $p_1 + p_2 + p_3 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$.

2. Seja (S, h, K) um conjunto de dados iniciais para as equações de Einstein no vácuo, com K de traço e divergência nulos. Dada uma função positiva $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , considere a métrica conformemente reescalada $\tilde{h} = u^4 h$ e o tensor simétrico $\tilde{K} = u^{-2} K$. Usando coordenadas normais quando apropriado, mostre que:

(a) Os símbolos de Christoffel $\tilde{\Gamma}_{jk}^i$ de \tilde{h} estão relacionados com os símbolos de Christoffel $\bar{\Gamma}_{jk}^i$ de h através de

$$\tilde{\Gamma}_{jk}^i = \bar{\Gamma}_{jk}^i + 2\partial_j(\log u)h^i{}_k + 2\partial_k(\log u)h^i{}_j - 2\partial^i(\log u)h_{jk}.$$

(b) \tilde{K} tem divergência zero para a conexão de Levi-Civita de \tilde{h} .

(c) O tensor de Ricci \tilde{R}_{ij} de \tilde{h} está relacionado com o tensor de Ricci \bar{R}_{ij} de h através de

$$\tilde{R}_{ij} = \bar{R}_{ij} - 2\bar{\nabla}_i\partial_j(\log u) - 2\bar{\Delta}(\log u)h_{ij} + 4\partial_i(\log u)\partial_j(\log u) - 4|\text{grad}(\log u)|^2 h_{ij}.$$

(d) A curvatura escalar \tilde{R} de \tilde{h} está relacionada com a curvatura escalar \bar{R} de h através de

$$\tilde{R} = u^{-4}\bar{R} - 8u^{-5}\bar{\Delta}u.$$