

Relatividade Matemática

Ficha 11

A entregar até à aula de Sexta-feira dia 15 de Maio

Considere a métrica Lorentziana dada em coordenadas locais (t, x^1, \dots, x^n) por

$$g = -dt^2 + h_{ij}(t, x)dx^i dx^j.$$

Note que as hipersuperfícies de t constante são variedades Riemannianas com métrica induzida $h(t) = h_{ij}dx^i dx^j$ e segunda forma fundamental $K(t) = \frac{1}{2} \frac{\partial h_{ij}}{\partial t} dx^i dx^j$.

1. Mostre que os símbolos de Christoffel nestas coordenadas são

$$\Gamma_{ij}^0 = K_{ij}; \quad \Gamma_{jk}^i = \bar{\Gamma}_{jk}^i; \quad \Gamma_{0j}^i = K_j^i,$$

onde $\bar{\Gamma}_{jk}^i$ são os símbolos de Christoffel de h .

2. Mostre que as componentes do tensor de Riemann nestas coordenadas são

$$\begin{aligned} R_{0i0}^j &= -\frac{\partial}{\partial t} K_i^j - K_{il} K^{lj}; \\ R_{ij0}^l &= -\bar{\nabla}_i K_j^l + \bar{\nabla}_j K_i^l; \\ R_{ijl}^m &= \bar{R}_{ijl}^m + K_{il} K_j^m - K_{jl} K_i^m, \end{aligned}$$

onde $\bar{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de h e \bar{R}_{ijl}^m são as componentes do tensor de Riemann de h .

3. Mostre que as componentes do tensor de Ricci nestas coordenadas são

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{\partial}{\partial t} K_i^i - K_{ij} K^{ij}; \\ R_{0i} &= -\bar{\nabla}_i K_j^j + \bar{\nabla}_j K_i^j; \\ R_{ij} &= \bar{R}_{ij} + \frac{\partial}{\partial t} K_{ij} - 2K_{il} K_j^l + K_l^l K_{ij}, \end{aligned}$$

onde \bar{R}_{ij} são as componentes do tensor de Ricci de h .

4. Mostre que

$$\frac{\partial h^{ij}}{\partial t} = -2K^{ij}.$$

5. Conclua que a componente $(0, 0)$ do tensor de Einstein nestas coordenadas é

$$G_{00} = \frac{1}{2} \left(\bar{R} + (K_i^i)^2 - K_{ij} K^{ij} \right),$$

onde \bar{R} é a curvatura escalar de h .