Projecto em Matemática 2009/2010

A Geometria da Relatividade

Semana 1 Recorde a definição das funções hiperbólicas:

$$\cosh u = \frac{e^u + e^{-u}}{2}, \qquad \sinh u = \frac{e^u - e^{-u}}{2}, \qquad \tanh u = \frac{\sinh u}{\cosh u}.$$

(a) Mostre que $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$.

(b) Mostre que em unidades nas quais $c = 1$ a fórmula para uma transformação de Lorentz com velocidade $v = \tanh u$ pode ser escrita como

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh u & -\sinh u \\ -\sinh u & \cosh u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}.$$

(c) Mostre que

$$\cosh(u_1 + u_2) = \cosh u_1 \cosh u_2 + \sinh u_1 \sinh u_2;$$
$$\cosh(u_1 + u_2) = \sinh u_1 \cosh u_2 + \cosh u_1 \sinh u_2.$$

(d) Mostre que o resultado da composição de duas transformações de Lorentz com velocidades $v_1 = \tanh u_1$ e $v_2 = \tanh u_2$ é uma transformação de Lorentz com velocidade $v = \tanh(u_1 + u_2)$.

(e) Verifique directamente $v = \tanh(u_1 + u_2)$ é o resultado da fórmula de adição relativista das velocidades $v_1 = \tanh u_1$ e $v_2 = \tanh u_2$.

Semana 2 *Acidente!* Ao passar pela Terra a 80% da velocidade da luz, a *Enterprise* faz disparar os motores altamente experimentais da sonda *Einstein*, que imediatamente começa a acelerar com aceleração 1g na mesma direcção do movimento da *Enterprise*. Pode mostrar-se que se medirmos intervalos de tempo e distâncias em anos e anos-luz, respectivamente, as equações do movimento da *Einstein* serão

$$t = \sinh \tau;$$
$$x = \cosh \tau - 1,$$

(onde τ é o tempo próprio).

a) Quanto tempo demorará a *Einstein* a alcançar a *Enterprise*
   - *(i)* de acordo com um observador no referencial (inercial) da Terra?
   - *(ii)* de acordo com os tripulantes da *Enterprise*?
   - *(iii)* de acordo com o cronómetro da *Einstein*?

b) Qual a velocidade da *Einstein* em relação à *Enterprise* quando a alcança?

c) Sabendo que teoricamente os motores da *Einstein* continuarão a funcionar eternamente, o capitão Kirk pondera a hipótese de destruir a sonda. Quanto tempo tem o capitão para tomar a sua decisão?

Semana 3 Considere a métrica redonda na esfera S^2 escrita nas usuais coordenadas esféricas:

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2.$$

(a) Mostre que a projecção cilíndrica corresponde à mudança de coordenadas $z = \cos\theta$, e que nestas coordenadas a métrica se escreve

$$ds^2 = \frac{dz^2}{1-z^2} + \left(1-z^2\right) d\varphi^2.$$

(b) Mostre que a projecção estereográfica corresponde à mudança de coordenadas

$$(x,y) = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}(\cos\varphi, \sin\varphi),$$

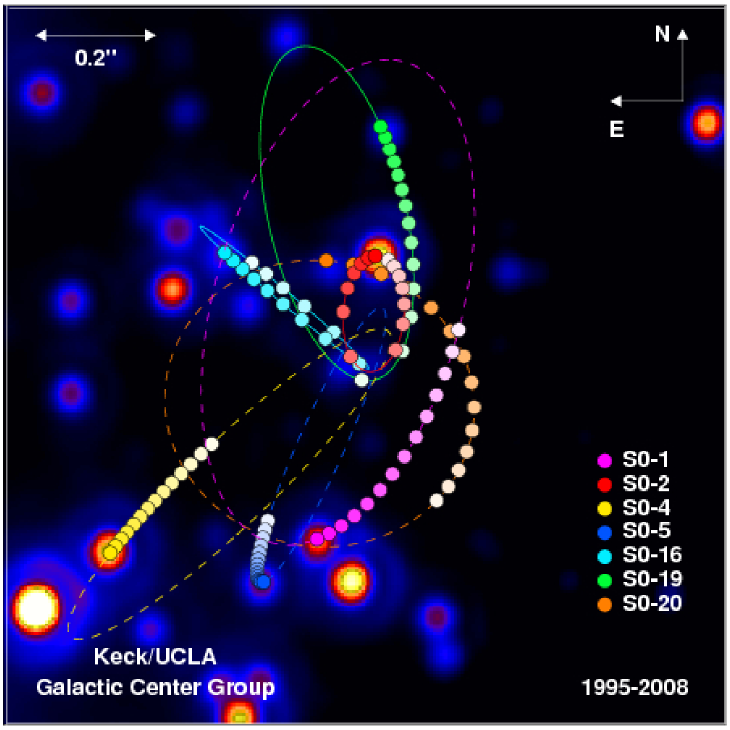
e que nestas coordenadas a métrica se escreve

$$ds^2 = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}\left(dx^2+dy^2\right).$$

(c) Mostre que a transformação de coordenadas definida por $\sin\theta = \dfrac{1}{\cosh u}$ (projecção de Mercator) põe a métrica na forma

$$ds^2 = \frac{1}{\cosh^2 u}\left(du^2 + d\varphi^2\right).$$

Semana 4 A figura mostra as órbitas das estrelas do centro galáctico em torno de Sagitário A^*, o buraco negro no centro da nossa galáxia, que se encontra aproximadamente a 26 000 anos-luz. Em particular a estrela SO-2 descreveu uma órbita completa no período indicado. Use este facto para estimar a massa de Sagitário A^*.



Semana 5 Recorde o enunciado do exercício que ilustra o paradoxo dos gémeos: Dois gémeos, Alice e Bernardo, separam-se no seu 20º aniversário: enquanto Alice fica na Terra (que constitui muito aproximadamente um referencial inercial), Bernardo parte a 80% da velocidade da luz na direcção de um planeta situado a 8 anos-luz da Terra, que alcança portanto 10 anos mais tarde (medidos no referencial da Terra). Após uma curta estadia, Bernardo regressa à Terra, novamente a 80% da velocidade da luz. Consequentemente, a Alice tem 40 anos anos quando revê o seu irmão, enquanto que o Bernardo tem apenas 32 anos.

(a) Tanto na viagem de ida como no regresso o Bernardo está em referenciais inerciais, onde a fórmula da dilatação do tempo é válida. Quanto tempo espera ele que se passe para a Alice?

(b) O Bernardo é então forçado a concluir que a Alice viveu o tempo em falta durante o pequeno (de acordo com ele) intervalo de tempo em que esteve a acelerar. Verifique que isto é consistente com a fórmula do desvio gravitacional para o vermelho.

Semana 6 As geodésicas causais do espaço-tempo de Schwarzschild podem ser obtidas a partir do Lagrangeano

$$L = \frac{1}{2}\left[-\left(1-\frac{2M}{r}\right)\dot{t}^2 + \left(1-\frac{2M}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right].$$

(a) Mostre que as equações das geodésicas causais futuras (parametrizadas pelo tempo próprio se não nulas) podem ser escritas na forma

$$\begin{cases} \dot{r}^2 = E^2 - \left(\sigma + \dfrac{L^2}{r^2}\right)\left(1-\dfrac{2M}{r}\right) \\[2ex] \left(1-\dfrac{2M}{r}\right)\dot{t} = E \\[2ex] r^2\dot{\theta} = L \end{cases}$$

onde $E > 0$ e L são constantes de integração, $\sigma = 1$ para geodésicas do tipo tempo e $\sigma = 0$ para geodésicas nulas.

(b) Mostre que se $L \neq 0$ então $u = \dfrac{1}{r}$ satisfaz

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{M\sigma}{L^2} + 3Mu^2.$$

(c) Para situações em que as correcções relativistas são pequenas temos $Mu \ll 1$, e portanto para geodésicas do tipo tempo vale a equação aproximada

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{M}{L^2}.$$

Mostre que a solução desta equação é a fórmula para uma secção cónica em coordenadas polares,

$$u = \frac{M}{L^2}(1 + \varepsilon\cos(\theta - \theta_0)),$$

onde as constantes de integração $\varepsilon \geq 0$ e θ_0 são a **excentricidade** e o **argumento do periélio**.

(d) Mostre que para $\varepsilon \ll 1$ esta solução aproximada satisfaz

$$u^2 = \frac{2M}{L^2}u - \frac{M^2}{L^4}.$$

Argumente que as geodésicas do tipo tempo próximas de órbitas circulares nas quais as correcções relativistas são pequenas são soluções aproximadas da equação

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \left(1 - \frac{6M^2}{L^2}\right)u = \frac{M}{L^2}\left(1 - \frac{3M^2}{L^2}\right),$$

e que portanto o periélio avança aproximadamente

$$\frac{6\pi M}{r}$$

radianos por revolução.

(e) Mostre que se desprezarmos correcções relativistas então as geodésicas nulas satisfazem

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = 0.$$

Mostre que a solução desta equação é a fórmula para uma recta em coordenadas polares,

$$u = \frac{1}{b}\sin(\theta - \theta_0),$$

onde as constantes de integração $b > 0$ e θ_0 são o **parâmetro de impacto** (mínimo da distância ao centro) e o ângulo entre a recta e o eixo dos xx.

(f) Assuma que $Mu \ll 1$, e inclua correcções relativistas procurando soluções aproximadas da forma

$$u = \frac{1}{b}\left(\sin\theta + \frac{M}{b}v\right)$$

(onde pusémos $\theta_0 = 0$ por simplicidade). Mostre que v é uma solução aproximada da equação

$$\frac{d^2v}{d\theta^2} + v = 3\sin^2\theta,$$

e portanto u é aproximadamente dado por

$$u = \frac{1}{b}\left(\sin\theta + \frac{M}{b}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta\right)\right),$$

onde α e β são constantes de integração.

(g) Mostre que para a parte incidente da geodésica nula ($\theta \simeq 0$) se tem aproximadamente

$$u = 0 \Leftrightarrow \theta = -\frac{M}{b}(2 + \alpha).$$

Similarmente, mostre que para a parte da geodésica nula que se afasta ($\theta \simeq \pi$) se tem aproximadamente

$$u = 0 \Leftrightarrow \theta = \pi + \frac{M}{b}(2 - \alpha).$$

Conclua que θ varia de aproximadamente

$$\Delta\theta = \pi + \frac{4M}{b}$$

radianos, e que portanto a geodésica nula é deflectida na direcção do centro por aproximadamente

$$\frac{4M}{b}$$

radianos.

Semana 7 Mostre que:

(a) A constante de Hubble será sempre superior a 57 quilómetros por segundo por megaparsec.

(b) A luz que está a ser emitida agora por uma galáxia a mais de 5200 megaparsecs nunca alcançará a Terra.

(c) Objectos a mais de 19200 megaparsecs nunca serão visíveis da Terra.