Relatividade Matemática

Ficha 7

A entregar até à aula de Terça-feira dia 27 de Abril

1. Seja (M, g) a variedade Lorentziana globalmente hiperbólica correspondente à região exterior da solução de Schwarzschild, isto é, $M = \mathbb{R} \times \left(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{B_{2m}(0)}\right)$ e

$$g = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2\right)$$

(onde $m > 0$).

(a) Mostre que para qualquer $r_0 > 2m$ a curva

$$c(t) = \left(t, r_0, \frac{\pi}{2}, \sqrt{\frac{m}{{r_0}^3}} t\right)$$

é uma geodésica, que é do tipo tempo, luz ou espaço consoante $r_0 > 3m$, $r_0 = 3m$ ou $r_0 < 3m$.

(b) Justifique que o ponto $q = \left(\pi\sqrt{\frac{{r_0}^3}{m}}, r_0, \frac{\pi}{2}, \pi\right)$ é conjugado ao ponto $p = \left(0, r_0, \frac{\pi}{2}, 0\right)$ ao longo de c (não precisa de resolver a equação de Jacobi).

(c) Mostre explicitamente que c deixa de ser maximizante para $t > \pi\sqrt{\frac{{r_0}^3}{m}}$.

2. Neste exercício usaremos as definições e notação do exercício 3 da ficha 6. Uma métrica esfericamente simétrica pode ser sempre posta na forma

$$ds^2 = \mp e^{2\nu(t,r)} dt^2 \pm e^{2\lambda(t,r)} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2\right).$$

Neste caso para uma congruência de geodésica radiais com

$$L = \pm e^{-\nu} \frac{\partial}{\partial t} \pm e^{-\lambda} \frac{\partial}{\partial r}$$

podemos escolher, $X = \frac{1}{r} Z$ e $Y = \frac{1}{r} W$, onde $\{Z, W\}$ é um referencial ortonormado na esfera S^2, e portanto satisfaz $[L, Z] = [L, W] = 0$.

(a) Mostre que a expansão da congruência é neste caso

$$\widehat{\theta} = \langle \nabla_X L, X \rangle + \langle \nabla_Y L, Y \rangle = 2L \cdot (\log r).$$

(b) Mostre que a região $r > 2m$ da métrica de Schwarzschild não contém qualquer esfera prisioneira.

(c) Mostre que (para uma escolha correcta da orientação temporal) todas as esferas na região $r < 2m$ da métrica de Schwarzschild são prisioneiras.

(d) Recorde a expressão da métrica para os modelos FLRW:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(d\rho^2 + f^2(\rho)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right),$$

onde $f(\rho) = \rho$, $\sin\rho$ ou $\sinh\rho$ consoante a métrica espacial é plana, esférica ou hiperbólica. Mostre que todos estes modelos contêm esferas prisioneiras desde que $\dot{a}(t)$ seja suficientemente negativo.

(e) O universo de de Sitter corresponde ao caso em que $f(\rho) = \sin\rho$ e $a(t) = \cosh t$, e é uma solução das equações de Einstein no vácuo com constante cosmológica. Apesar de possuir esferas prisioneiras é geodesicamente completo. Porque é que isto não contradiz o teorema de singularidade de Penrose?