Relatividade Matemática

Ficha 6

A entregar até à aula de Terça-feira dia 20 de Abril

1. Seja (M, g) uma variedade Lorentziana.

   (a) Use a fórmula para a derivada de Lie de um tensor,
   $$(\pounds_X g)(Y, Z) = X \cdot g(Y, Z) - g(\pounds_X Y, Z) - g(Y, \pounds_X Z)$$
   para mostrar que
   $$(\pounds_X g)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_Z X).$$

   (b) Mostre que esta fórmula pode ser escrita como
   $$(\pounds_X g)_{\mu\nu} = \nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu.$$

   (c) Suponha que X é um campo de Killing, i.e. $\pounds_X g = 0$. Use a equação de Killing
   $$\nabla_\mu X_\nu + \nabla_\nu X_\mu = 0$$
   para mostrar que X é uma solução da equação de Jacobi. Interprete este facto geometricamente.

2. Suponha que o tensor energia-momento é diagonalizável, $(T_{\mu\nu}) = \operatorname{diag}(\rho, p_1, p_2, p_3)$. Mostre que:

   (a) $T_{\mu\nu}$ satisfaz a condição de energia fraca se e só se $\rho \geq 0$ e $\rho + p_i \geq 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

   (b) $T_{\mu\nu}$ satisfaz a condição de energia forte se e só se $\rho + \sum_{i=1}^{3} p_i \geq 0$ e $\rho + p_i \geq 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

   (c) $T_{\mu\nu}$ satisfaz a condição de energia dominante se e só se $\rho \geq |p_i|$ $(i = 1, 2, 3)$.

   (d) $T_{\mu\nu}$ satisfaz a condição de energia nula se e só se $\rho + p_i \geq 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

   (e) As três primeiras condições são independentes à excepção de que a condição de energia dominante implica a condição de energia fraca.

   (f) As três primeiras condições implicam a condição de energia nula.

3. Seja (M, g) uma variedade Lorentziana e $L \in \mathfrak{X}(U)$ um campo vectorial geodésico nulo (sem zeros) definido num aberto $U \subset M$. Eventualmente reduzindo U, é possível construir um referencial $\{L, N, X, Y\}$, paralelo ao longo das curvas integrais de L, tal que[1]
   $$g(N, N) = g(L, X) = g(L, Y) = g(N, X) = g(N, Y) = g(X, Y) = 0$$
   e
   $$g(X, X) = g(Y, Y) = 1 = -g(L, N).$$
   Deste modo as fibras de $\widehat{TU}$ podem ser identificadas com $\operatorname{span}\{X, Y\}$.

[1] Note que a congruência só define L e N a menos de uma transformação de Lorentz no seu plano, e X e Y a menos de uma rotação no seu plano.

(a) Mostre que

$$g = -L^\sharp \otimes N^\sharp - N^\sharp \otimes L^\sharp + X^\sharp \otimes X^\sharp + Y^\sharp \otimes Y^\sharp,$$

(onde $L^\sharp = g(L, \cdot)$, etc.), e que portanto

$$\widehat{h} = X^\sharp \otimes X^\sharp + Y^\sharp \otimes Y^\sharp.$$

(b) Definindo $B_{\mu\nu} = \nabla_\nu L_\mu$, mostre que

$$\begin{aligned} B = {} & B_{NN} L^\sharp \otimes L^\sharp - B_{NX} L^\sharp \otimes X^\sharp - B_{NY} L^\sharp \otimes Y^\sharp - B_{XN} X^\sharp \otimes L^\sharp - B_{YN} Y^\sharp \otimes L^\sharp \\ & + B_{XX} X^\sharp \otimes X^\sharp + B_{XY} X^\sharp \otimes Y^\sharp + B_{YX} Y^\sharp \otimes X^\sharp + B_{YY} Y^\sharp \otimes Y^\sharp. \end{aligned}$$

e que portanto

$$\widehat{B} = B_{XX} X^\sharp \otimes X^\sharp + B_{XY} X^\sharp \otimes Y^\sharp + B_{YX} Y^\sharp \otimes X^\sharp + B_{YY} Y^\sharp \otimes Y^\sharp.$$

Conclua que

$$\widehat{\omega} = \frac{1}{2} \left(B_{XY} - B_{YX} \right) X^\sharp \wedge Y^\sharp.$$

(c) Mostre que

$$L^\sharp \wedge dL^\sharp = -L^\sharp \wedge \widehat{\omega}.$$

Conclua que L é ortogonal a hipersuperfícies se e só se $\widehat{\omega} = 0$.