

Relatividade Matemática

Ficha 5

A entregar até à aula de Terça-feira dia 13 de Abril

1. Dê um exemplo de uma variedade Lorentziana temporalmente orientada que seja:
 - (a) Cronológica mas não causal;
 - (b) Causal mas não fortemente causal.
2. Seja (M, g) a variedade Lorentziana temporalmente orientada que se obtém removendo o fecho do semieixo positivo dos xx ao espaço de Minkowski bidimensional. Mostre que:
 - (a) (M, g) é estavelmente causal mas não globalmente hiperbólica;
 - (b) Existem pontos $p, q \in M$ tais que $J^+(p) \cap J^-(q)$ não é compacto;
 - (c) Existem pontos $p, q \in M$ com $q \in I^+(p)$ tais que o supremo dos comprimentos de curvas do tipo tempo unindo p a q não é atingido por nenhuma curva do tipo tempo.
3. Seja (Σ, h) uma variedade Riemanniana. Mostre que a variedade Lorentziana $(M, g) = (\mathbb{R} \times \Sigma, -dt \otimes dt + h)$ é globalmente hiperbólica se e só se (Σ, h) é completa.
4. Mostre que os espaço-tempos seguintes são globalmente hiperbólicos:
 - (a) Espaço-tempo de Minkowski;
 - (b) Universos de FLRW;
 - (c) A região $\{r > 2m\}$ da solução de Schwarzschild.