Relatividade Matemática

Ficha 4

A entregar até à aula de Terça-feira dia 30 de Março

1. Dê exemplos de variedades Lorentzianas (M, g) temporalmente orientadas, pontos $p \in M$ e curvas causais $\lambda : I \to M$ tais que:

   (a) $I^+(p) = M$;

   (b) $J^+(p)$ não é fechado;

   (c) $\partial I^+(p)$ é compacta (e não vazia);

   (d) λ está contida num compacto e é inextensível para o futuro;

   (e) λ está contida em $\partial I^+(p)$ mas não possui extremo passado.

2. Mostre que nenhuma variedade Lorentziana temporalmente orientada compacta pode ser cronológica.

3. Seja (M, g) uma variedade Lorentziana temporalmente orientada estavelmente causal e h um campo tensorial simétrico duas vezes covariante com suporte compacto. Mostre que para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno o campo tensorial $g_\varepsilon = g + \varepsilon h$ é ainda uma métrica Lorentziana em M, e que (M, g_ε) é cronológico.

4. Seja (M, g) o quociente do espaço de Minkowski bidimensional pelo grupo discreto de isometrias gerado pela aplicação $f(t, x) = (t + 1, x + 1)$. Mostre que (M, g) é cronológico mas que existem perturbações arbitrariamente pequenas de (M, g) (no sentido do exercício anterior) que não o são.