Relatividade Matemática

Ficha 2

A entregar até à aula de Terça-feira dia 16 de Março

Considere a métrica Lorentziana esfericamente simétrica

$$g = -(A(t,r))^2 dt^2 + (B(t,r))^2 dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2.$$

1. Use a condição de compatibilidade com a métrica e as primeiras equações estruturais de Cartan,

$$\begin{cases} \omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \\ d\omega^\mu + \omega^\mu{}_\nu \wedge \omega^\nu = 0 \end{cases}$$

para mostrar que as formas de conexão não nulas para o referencial ortonormado dual a

$$\omega^0 = Adt, \qquad \omega^r = Bdr, \qquad \omega^\theta = rd\theta, \qquad \omega^\varphi = r\sin\theta d\varphi$$

são (usando a notação $\dot{} = \frac{\partial}{\partial t}$ e $' = \frac{\partial}{\partial r}$)

$$\begin{aligned} \omega^0{}_r &= \omega^r{}_0 = \frac{A'}{B}dt + \frac{\dot{B}}{A}dr; \\ \omega^\theta{}_r &= -\omega^r{}_\theta = \frac{1}{B}d\theta; \\ \omega^\varphi{}_r &= -\omega^r{}_\varphi = \frac{\sin\theta}{B}d\varphi; \\ \omega^\varphi{}_\theta &= -\omega^\theta{}_\varphi = \cos\theta d\varphi. \end{aligned}$$

2. Use as segundas equações estruturais de Cartan

$$\Omega^\mu{}_\nu = d\omega^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\alpha \wedge \omega^\alpha{}_\nu$$

para mostrar que as formas de curvatura neste referencial são

$$\begin{aligned} \Omega^0{}_r &= \Omega^r{}_0 = \left(\frac{A''B - A'B'}{AB^3} + \frac{\dot{A}\dot{B} - A\ddot{B}}{A^3B} \right) \omega^r \wedge \omega^0; \\ \Omega^0{}_\theta &= \Omega^\theta{}_0 = \frac{A'}{rAB^2}\,\omega^\theta \wedge \omega^0 + \frac{\dot{B}}{rAB^2}\,\omega^\theta \wedge \omega^r; \\ \Omega^0{}_\varphi &= \Omega^\varphi{}_0 = \frac{A'}{rAB^2}\,\omega^\varphi \wedge \omega^0 + \frac{\dot{B}}{rAB^2}\,\omega^\varphi \wedge \omega^r; \\ \Omega^\theta{}_r &= -\Omega^r{}_\theta = \frac{B'}{rB^3}\,\omega^\theta \wedge \omega^r + \frac{\dot{B}}{rAB^2}\,\omega^\theta \wedge \omega^0; \\ \Omega^\varphi{}_r &= -\Omega^r{}_\varphi = \frac{B'}{rB^3}\,\omega^\varphi \wedge \omega^r + \frac{\dot{B}}{rAB^2}\,\omega^\varphi \wedge \omega^0; \\ \Omega^\varphi{}_\theta &= -\Omega^\theta{}_\varphi = \frac{B^2 - 1}{r^2B^2}\,\omega^\varphi \wedge \omega^\theta. \end{aligned}$$

3. Usando

$$\Omega^{\mu}{}_{\nu} = \sum_{\alpha<\beta} R_{\alpha\beta}{}^{\mu}{}_{\nu}\omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta}$$

determine as componentes $R_{\alpha\beta}{}^{\mu}{}_{\nu}$ do tensor de curvatura neste referencial ortonormado, e mostre que as componentes não nulas do tensor de Ricci neste referencial são

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{A''B - A'B'}{AB^3} + \frac{\dot{A}\dot{B} - A\ddot{B}}{A^3B} + \frac{2A'}{rAB^2};\\
R_{0r} &= R_{r0} = \frac{2\dot{B}}{rAB^2};\\
R_{rr} &= \frac{A'B' - A''B}{AB^3} + \frac{A\ddot{B} - \dot{A}\dot{B}}{A^3B} + \frac{2B'}{rB^3};\\
R_{\theta\theta} &= R_{\varphi\varphi} = -\frac{A'}{rAB^2} + \frac{B'}{rB^3} + \frac{B^2-1}{r^2B^2}.
\end{aligned}$$

4. Mostre que a equação de Einstein para o vácuo $R_{\mu\nu} = 0$ é equivalente ao sistema

$$\begin{cases}
\dfrac{A''}{A} - \dfrac{A'B'}{AB} + \dfrac{2A'}{rA} = 0\\[2ex]
\dot{B} = 0\\[2ex]
\dfrac{A''}{A} - \dfrac{A'B'}{AB} - \dfrac{2B'}{rB} = 0\\[2ex]
\dfrac{A'}{A} - \dfrac{B'}{B} - \dfrac{B^2-1}{r} = 0
\end{cases}
\Leftrightarrow
\begin{cases}
\dfrac{A'}{A} + \dfrac{B'}{B} = 0\\[2ex]
\dot{B} = 0\\[2ex]
\left(\dfrac{A'}{A}\right)' + 2\left(\dfrac{A'}{A}\right)^2 + \dfrac{2A'}{rA} = 0\\[2ex]
\dfrac{2B'}{B} + \dfrac{B^2-1}{r} = 0
\end{cases}$$

5. Mostre que a solução da última equação do sistema é

$$B = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

onde $m \in \mathbb{R}$ é uma constante de integração

6. Mostre que a primeira equação do sistema implica $A = \frac{\alpha(t)}{B}$ para alguma função $\alpha(t) > 0$. Verifique que a terceira equação é automaticamente satisfeita.

7. Justifique que é sempre possível reescalar a coordenada t de modo a pôr a métrica na forma

$$g = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2.$$