Relatividade Matemática

Ficha 13

A entregar até à aula de Terça-feira dia 8 de Junho

1. Considere a acção
$$S[\psi] = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathcal{L}(\psi, \partial\psi)\, dt \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$
para funções $\psi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ com decaimento suficientemente rápido.

   (a) Mostre que
$$\delta S = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \right) \right] \delta\psi\, dt \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

   (b) Mostre que se ψ é um ponto crítico de S então
$$H(t) = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$
é constante, onde
$$\mathcal{H} = (\partial_0 \psi) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \psi)} - \mathcal{L}$$
e Σ_t é o hiperplano de t constante.

2. (a) Verifique que a equação de Klein-Gordon no espaço-tempo de Minkowski, dada por $\Box\phi - m^2\phi = 0$, pode ser obtida a partir da densidade Lagrangeana
$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left(\partial_\mu \phi\, \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2 \right).$$

   (b) Mostre que o Hamiltoniano correspondente é
$$H = \int_{\Sigma_t} \frac{1}{2} \left((\partial_0 \phi)^2 + \ldots + (\partial_n \phi)^2 + m^2 \phi^2 \right)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

   (c) A partir da acção de Einstein-Hilbert-Klein-Gordon
$$S = \int_M \left[R + \kappa \left(g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi\, \partial_\nu \phi + m^2 \phi^2 \right) \right] dV_{n+1}$$
obtenha o tensor energia momento para ϕ:
$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi\, \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left(\partial_\alpha \phi\, \partial^\alpha \phi + m^2 \phi^2 \right).$$

   (d) Verifique que T_{00} coincide com a densidade Hamiltoniana $\mathcal{H}$ (i.e. a integranda na expressão do Hamiltoniano H).