Relatividade Matemática

Ficha 12

A entregar até à aula de Terça-feira dia 1 de Junho

Seja g uma métrica Lorentziana estacionária e esfericamente simétrica em $\mathbb{R}^4$ cujos campos de matéria possuem suporte espacial compacto e satisfazem a condição de energia fraca. Existem funções $\phi = \phi(r)$ e $m = m(r)$ de classe C^∞ tais que a métrica se pode escrever na forma

$$g = -e^{2\phi(r)}dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2m(r)}{r}} + r^2 \left(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta d\varphi^2\right).$$

1. Mostre que as equações de Einstein implicam

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dr} &= 4\pi r^2 \rho; \\ \frac{d\phi}{dr} &= \frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r-2m)}, \end{aligned}$$

   onde ρ e p são a densidade de energia e a pressão radial medidos pelos observadores estacionários.

2. Conclua que $m \geq 0$.

3. Mostre que existem constantes $M \geq 0$ e Φ tais que

$$\lim_{r\to+\infty} m(r) = M \quad \text{e} \quad \lim_{r\to+\infty} \phi(r) = \Phi.$$

4. Deduza que se escolhermos a coordenada t de modo a que $\Phi = 0$ então M é a massa de Komar de g.

5. Mostre que $M \leq E$, onde

$$E = \int_{\{t=0\}} \rho,$$

   com igualdade exactamente no caso em que (M, g) é o espaço-tempo de Minkowski.

6. Existirá limite superior para E dado $M > 0$?