Relatividade Matemática

Ficha 11

A entregar até à aula de Terça-feira dia 25 de Maio

1. Sejam (M, g) uma variedade Lorentziana de dimensão $n+1$ e $(x^0, \dots, x^n)$ coodenadas locais em M.

   (a) Mostre que a condição para as coordenadas $(x^0, \dots, x^n)$ serem harmónicas se escreve

   $$\nabla_\alpha \nabla^\alpha x^\mu = 0 \Leftrightarrow H^\mu \equiv \partial_\alpha g^{\alpha\mu} + \frac{1}{2} g^{\alpha\mu} g^{\rho\sigma} \partial_\alpha g_{\rho\sigma} = 0$$

   $(\mu = 0, \dots, n)$.

   (b) Mostre que

   $$R^H_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} + g_{\alpha(\mu} \partial_{\nu)} H^\alpha = -\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta g_{\mu\nu} + F_{\mu\nu}(g, \partial g).$$

2. Mostre que as equações de restrição para a equação de Einstein com constante cosmológica Λ se escrevem

   $$\begin{cases} \bar{R} + \left(K^i{}_i\right)^2 - K_{ij}K^{ij} = 2\Lambda \\ \bar{\nabla}_i K^j{}_j - \bar{\nabla}_j K^j{}_i = 0 \end{cases}$$

3. Sendo γ_0 a métrica de curvatura constante canónica em $\mathbb{R}^3$, S^3 ou H^3, identifique os desenvolvimentos globalmente hiperbólicos máximos dos seguintes dados iniciais:

   (a) $(\mathbb{R}^3, \gamma_0, 0)$;
   (b) $(\mathbb{R}^3, \gamma_0, \gamma_0)$;
   (c) $(S^3, \gamma_0, 0)$;
   (d) $(H^3, \gamma_0, 0)$;
   (e) $(H^3, \gamma_0, \gamma_0)$.