Relatividade Matemática

Ficha 10

A entregar até à aula de Terça-feira dia 18 de Maio

Considere a métrica Lorentziana dada em coordenadas locais $(t, x^1, \ldots, x^n)$ por

$$g = -dt^2 + \gamma_{ij}(t,x)dx^i dx^j.$$

Note que as hipersuperfícies de t constante são variedades Riemannianas com métrica induzida $\gamma(t) = \gamma_{ij}dx^i dx^j$ e segunda forma fundamental $K(t) = \frac{1}{2}\frac{\partial \gamma_{ij}}{\partial t}dx^i dx^j$.

1. Mostre que os símbolos de Christoffel nestas coordenadas são

$$\Gamma^0_{ij} = K_{ij}; \quad \Gamma^i_{jk} = \bar{\Gamma}^i_{jk}; \quad \Gamma^i_{0j} = K^i{}_j,$$

onde $\bar{\Gamma}^i_{jk}$ são os símbolos de Christoffel de γ.

2. Mostre que as componentes do tensor de Riemann nestas coordenadas são

$$\begin{aligned} R_{0i0}{}^j &= -\frac{\partial}{\partial t}K^j{}_i - K_{il}K^{lj}; \\ R_{ij0}{}^l &= -\bar{\nabla}_i K^l{}_j + \bar{\nabla}_j K^l{}_i; \\ R_{ijl}{}^m &= \bar{R}_{ijl}{}^m + K_{il}K^m{}_j - K_{jl}K^m{}_i, \end{aligned}$$

onde $\bar{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de γ e $\bar{R}_{ijl}{}^m$ são as componentes do tensor de Riemann de γ.

3. Mostre que as componentes do tensor de Ricci nestas coordenadas são

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{\partial}{\partial t}K^i{}_i - K_{ij}K^{ij}; \\ R_{0i} &= -\bar{\nabla}_i K^j{}_j + \bar{\nabla}_j K^j{}_i; \\ R_{ij} &= \bar{R}_{ij} + \frac{\partial}{\partial t}K_{ij} - 2K_{il}K^l{}_j + K^l{}_l K_{ij}, \end{aligned}$$

onde $\bar{R}_{ij}$ são as componentes do tensor de Riemann de γ.

4. Mostre que

$$\frac{\partial \gamma^{ij}}{\partial t} = -2K^{ij}.$$

5. Conclua que a componente $(0,0)$ do tensor de Einstein nestas coordenadas é

$$G_{00} = \frac{1}{2}\left(\bar{R} + \left(K^i{}_i\right)^2 - K_{ij}K^{ij}\right),$$

onde $\bar{R}$ é a curvatura escalar de γ.