

Relatividade Matemática

Ficha 1

A entregar até à aula de Terça-feira dia 9 de Março

1. **Paradoxo dos gémeos:** Dois gémeos, a Alice e o Bernardo, separam-se no seu 20º aniversário: enquanto a Alice fica na Terra (que constitui muito aproximadamente um referencial inercial), o Bernardo parte a 80% da velocidade da luz na direcção do Planeta X, situado a 8 anos-luz da Terra, que alcança portanto 10 anos mais tarde (medidos no referencial da Terra). Após uma curta estadia, o Bernardo regressa à Terra, novamente a 80% da velocidade da luz. Consequentemente, a Alice tem 40 anos quando revê o seu irmão.
 - (a) Que idade tem o Bernardo nesse reencontro?
 - (b) Como explica a assimetria nas idades dos gémeos? Afinal de contas, no referencial do Bernardo é ele quem está imóvel, e a Terra quem se afasta e depois aproxima...
 - (c) Imagine agora que cada um dos gémeos possui um telescópio ultrapotente, com o qual vai observando o outro ao longo da viagem. O que é que cada um deles vê? Em particular, quanto tempo passa para cada um deles quando vêem passar um ano para o seu gémeo?
2. Um modelo de matéria particularmente simples é dado por um **campo escalar sem massa** $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$, cujo tensor energia-momento é

$$T_{\mu\nu} = \nabla_\mu \phi \nabla_\nu \phi - \frac{1}{2} (\nabla_\alpha \phi \nabla^\alpha \phi) g_{\mu\nu}.$$

Mostre que se a variedade Lorentziana (M, g) satisfaz as equações de Einstein com este modelo de matéria então ϕ satisfaz a **equação das ondas**

$$\square \phi = 0 \Leftrightarrow \nabla^\mu \nabla_\mu \phi = 0$$

em todos os pontos em que $d\phi \neq 0$.